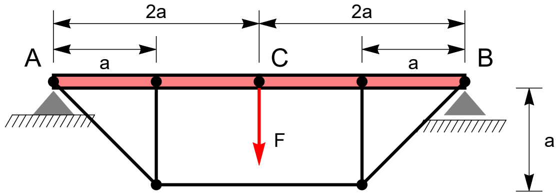
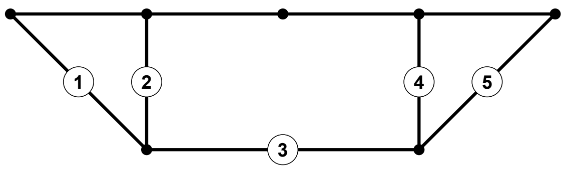
Vaje 1. april 2021

1. Dva nosilca sta členkasto speta v točki C, enostavno podprta na svojih krajiščih in spojena s paličjem tako kot kaže skica. Izračunaj sile palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Iz simetrije naloge takoj sledi, da sta sili podpor enaki $A = B = F/2$.
Za izračun sil palic, palice prvo označimo, tako kot kaže skica. Palico 3 navidezno prerežemo s prerezom skozi točko C. Na desni del konstrukcije deluje sila desne podpore, levi del konstrukcije s silo $\vec{C}$ v točki C, obtežba $\vec{F}$ in sila palice $\vec{F_3}$.



Obtežbo $\vec{F}$ lahko v celoti pripišemo levemu ali desnemu delu, lahko pa jo tudi proporcionalno razdelimo med deloma. Kot bomo kmalu videli, kako obtežbo razdelimo, ne vpliva na sile palic. Ravnotežna enačba momenta s polom v točki C je $2a\frac{1}{2}aF - aF_3 = 0$ in tako $F_3 = F$. V spoju palic 3, 4 in 5 je vsota sil palic enaka nič. Iz ravnovesja v vodoravni smeri dobimo $F_5 = \sqrt{2}F$ in nato še v navpični $F_4 = -F$. Zaradi simetrije so sile palic na levi in desni enake, velja $F_1 = F_5$ in $F_2 = F_4$.

2. Enostavno podprti nosilec dolžine l je vertikalno točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F_i}$.

   (a) Določi potek prečne sile.

   (b) Določi potek upogibnega momenta.

   (c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 3\,\mathrm{m}$, $\vec{F_i} = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.

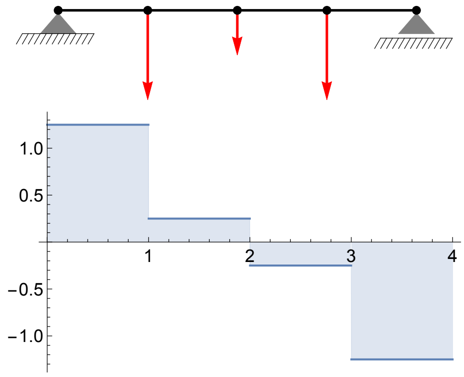
   Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

(a) Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = lB$ in $\sum_{i=1}^{n}(l-a_i)F_i = lA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}(l-a_i)F_i,$$

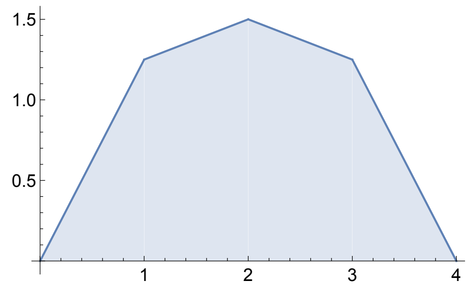
$$B = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je $A = B = 5/4\,\mathrm{kN}$.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

(b) Za enostavno podprti nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, v desnem pa $-B$. Nadalje je prečna sila odsekoma konstantna s skoki v točkah obremenitve, ki so enaki obremenitvam.
Upogibni moment M je pri enostavno podprtem nosilcu v krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

V konkretnem primeru je maksimalen upogibni moment pri $x = 2\,\mathrm{m}$ z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2(a_2 - a_1) = 3/2\,\mathrm{kNm}.$$

3. Previsni nosilec dolžine l je podprt na levem krajišču in v oddaljenosti d od levega krajišča. Nosilec je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.

(a) Določi potek prečne sile.

(b) Določi potek upogibnega momenta.

(c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 6\,\mathrm{m}$, $d = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 6\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.

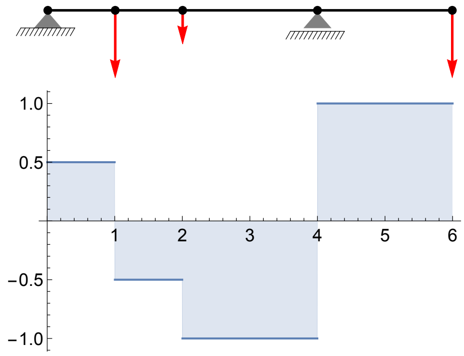
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

(a) Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = dB$ in $\sum_{i=1}^{n}(d - a_i)F_i = dA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}(d - a_i)F_i,$$

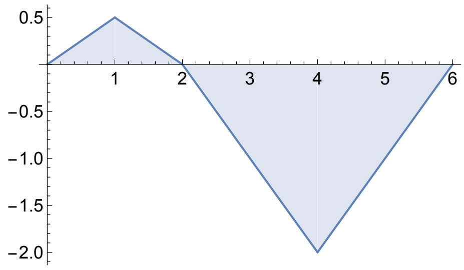
$$B = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je $A = 1/2\,\mathrm{kN}$, $B = 2\,\mathrm{kN}$.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

(b) Za previsni nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi. Tu moramo kot točkovno obremenitev upoštevati tudi desno podporo, kjer ima prečna sila skok podpore.
Upogibni moment M je na krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

V konkretnem primeru je ekstremalni upogibni moment v desni podpori $x = 4\,\mathrm{m}$ z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2(a_2 - a_1) + Q_3(a_3 - a_2) = -4\,\mathrm{kNm}.$$

4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$ je točkovno obremenjen v točki $a_1 = 1\,\mathrm{m}$ z vertikalno silo navzdol $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Izračunaj sile podpor.

Rešitev: Nalogo bomo reševali v brezdimenzijski obliki. Končne vrednosti bomo pomnožili z ustreznimi dimenzijami.

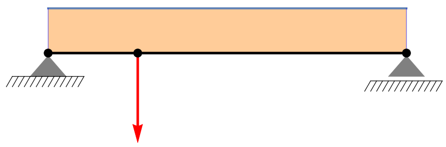
(a) Nosilec razdelimo v dve polji $0 \leq x < 1$ in $1 < x \leq 4$. Prečno silo in upogibni moment na prvem polju označimo z Q_1 in M_1, na drugem pa z Q_2 in M_2. Na obeh poljih je linijska obremenitev zvezna, zato velja zveza $dQ/dx = -q$ na vsakem polju posebej. Potem

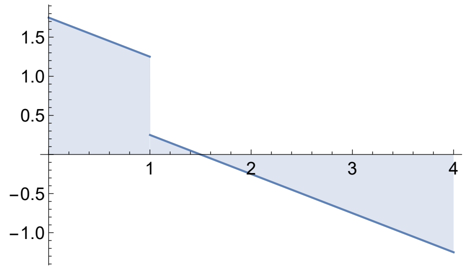
$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + C_1, \qquad Q_2 = -\frac{1}{2}x + C_2$$

in

$$M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_3,$$

$$M_2 = -\frac{1}{4}x^2 + C_2 x + C_4.$$



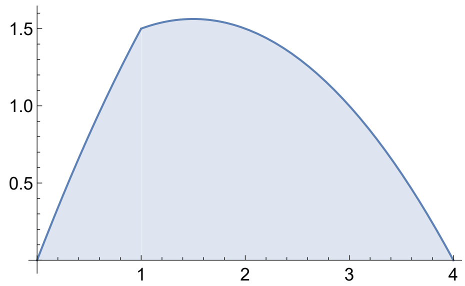


Brezdimenzijski potek prečne sile.

Konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 določimo iz pogojev, da ima prečna sila v točki obremenitve skok enak obremenitvi in pogojev, da sta krajišči tečaja, kjer je upogibni moment enak nič. Upoštevamo še dejstvo, da je upogibni moment zvezen v točki obremenitve. Tako dobimo

$$Q_1(1) - 1 = Q_2(1), \quad M_1(0) = 0,$$

$$M_2(4) = 0, \quad M_1(1) = M_2(1).$$



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Iz enačb sledi

$$C_1 - 1 = C_2, \quad C_3 = 0, \quad 0 = -4 + 4C_2 + C_4, \quad -\frac{1}{4} + C_1 + C_3 = -4 + 4C_2 + C_4.$$

Rešitev je

$$C_1 = \frac{7}{4}, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

in tako

$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, \qquad Q_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \qquad Q_2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

(b) Določimo še sile podpor. Ker je nosilec enostavno podprt, je sila sila leve podpore enaka enaka prečni sili v levi podpori, sila desne podpore pa je nasprotno enaka prečni sili. Velja torej

$$A = Q_1(0) = C_1 = \frac{7}{4}\text{kN}, \qquad B = -Q_2(l) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}\text{kN}.$$

Upogibni moment je maksimalen v temenu parabole M_2. Teme je v točki, ko je $Q_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$, torej pri $x = 3/2$. Vrednost momenta v tej točki je

$$M_{max} = \frac{25}{16}\text{kNm}.$$

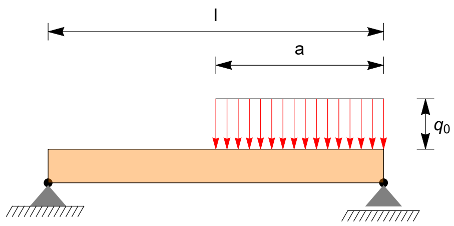
5. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je obremenjen na delu od $a = 1/2\,\mathrm{m}$ do l s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1\,\mathrm{N/m}$, glej skico.

   (a) Izračunaj sile podpor.

   (b) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

Rešitev: Nalogo bomo reševali v brezdimenzijski obliki za podatke l, a in q_0.

(a) Za izračun sli podpor smemo linijsko obremenitev zamenjati z njeno ekvipolentno tockovno silo, ki ima prijemališče v $l - a/2$, velkost aq_0 in smer navpično navzdol. Momentna enačba s polom v levem krajišču A je $(l - a/2)aq_0 = lB$. Potem je sila desne podpore $B = (1 - a/2l)aq_0$ v smeri navpično navzgor. Momentna enačba s polom v B je $a^2q_0/2 = lA$. Sila leve podpore je $A = a^2q_0/2l$.

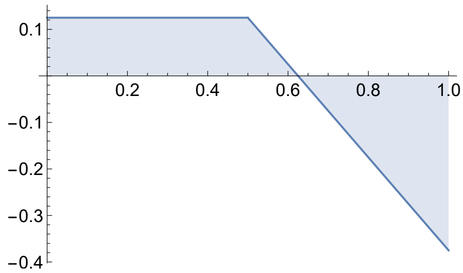


(b) Nosilec sedaj razdelimo v dve polji $0 \le x < l - a$ in $l - a \le x \le l$. Prečno silo in upogibni moment na prvem polju označimo s Q_1 in M_1, na drugem pa s Q_2 in M_2. Na obeh poljih je linijska obremenitev zvezna, zato velja zveza $dQ/dx = -q$ na vsakem polju posebej. Potem

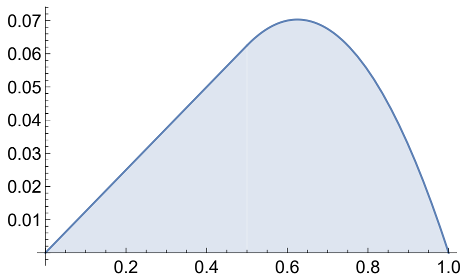
$$Q_1 = A = \frac{a^2 q_0}{2l}, \qquad Q_2 = -q_0 x + C_1.$$

Tu smo upoštevali, da je prečna sila Q_1 konstantna in enaka sili podpore A. Konstanto C_1 določimo iz pogoja, da je $Q_2(l) = -B$. Tako dobimo enačbo

$$-q_0 l + C_1 = -\left(1 - \frac{a}{2l}\right) a q_0.$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Rešitev je

$$C_1 = -\left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{a}\right) a q_0.$$

in tako

$$Q_2 = \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a} - \frac{x}{a}\right) a q_0.$$

Če vsatvimo v Q_2 koordinato $x = l - a$, dobimo

$$Q_2(l - a) = \frac{a^2 q_0}{2l}.$$

Vidimo, da je prečna sila zvezna. Določimo sedaj upogibni moment. Iz enačbe $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$

dobimo

$$
\begin{aligned}
M_1(x) &= \frac{a^2 x q_0}{2l} + C_2 \\
M_2(x) &= \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right) a x q_0 - \frac{1}{2} x^2 q_0 + C_3.
\end{aligned}
$$

Konstanti C_2 in C_3 določimo iz pogoja, da je $M_1(x=0)=0$ in $M_2(x=l)=0$. Druga možnost za določitev konstant je, da upoštevamo en robni pogoj in zveznost upogibnega momenta. Konstanta C_2 je očitno enaka nič. Iz pogoja $M_2(x=l)=0$ sledi enačba

$$
C_3 = \left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{a}\right) a l q_0 + \frac{1}{2} l^2 q_0 = -\frac{1}{2}(l-a)^2 q_0.
$$

Potem je

$$
M_2(x) = -\frac{1}{2} x^2 q_0 + \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right) a x q_0 - \frac{1}{2}(l-a)^2 q_0.
$$

Preverimo še, da je $M_1(l-a) = M_2(l-a)$,

$$
\begin{aligned}
M_2(l-a) &= -\frac{1}{2}(l-a)^2 q_0 + \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right)(l-a) a q_0 - \frac{1}{2}(l-a)^2 q_0 \\
&= -(l-a)^2 q_0 + (l-a)^2 q_0 + \frac{a^2 (l-a) q_0}{2l} \\
&= \frac{a^2 (l-a) q_0}{2l} = M_1(l-a).
\end{aligned}
$$