Vaje 15. april 2021

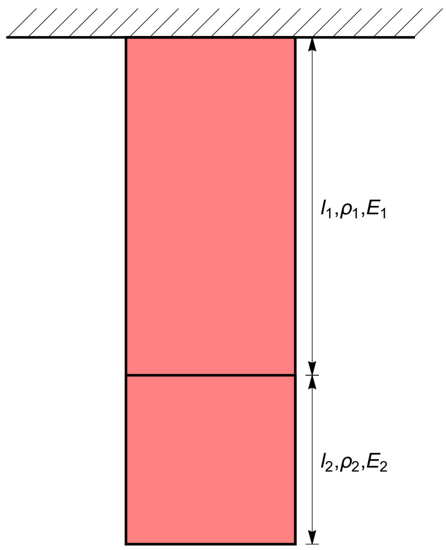
1. Kompozitna palica visi s stropa, glej skico. Oba dela palic imata enako površino preseka. Določi razteg palice zaradi lastne teže.

   Rešitev: Označimo z u_1 pomik zgornjega dela palice, z u_2 pa pomik spodnjega dela. Os x usmerimo v smeri palice navzdol in postavimo $x = 0$ na pritrdišču palice na strop. Za pomika velja ravnovesna enačba osne deformacije

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x}\right) + \rho_i g A = 0.$$

Rešitvi sta

$$u_1 = -\frac{g\rho_1}{E_1}x^2 + C_1x + C_2,$$
$$u_2 = -\frac{g\rho_2}{E_2}x^2 + C_3x + C_4.$$



Kompozitna palica.

Konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 določajo robni pogoji. Palica je pripeta na strop, zato je $u_1(x = 0) = 0$. Na stiku obeh delov palice velja $u_1(x = l_1) = u_2(x = l_1)$, in $\sigma_1(x = l_1) = \sigma_2(x = l_1)$. Tu smo s σ_i, $i = 1, 2$ zapisali napetost v i-tem delu palice. Spodnji konec palice je prost, zato je tam napetost enaka nič, torej $\sigma_2(x = l_1 + l_2) = 0$. Upoštevajmo, da je napetost dana z

$$\sigma_i = E_i\epsilon_i = E_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x}.$$

Tako dobimo sistem enačb.

$$\begin{aligned}
0 &= C_2,\\
-\frac{g\rho_1}{E_1}l_1^2 + C_1l_1 + C_2 &= -\frac{g\rho_2}{E_2}l_1^2 + C_3l_1 + C_4,\\
-g\rho_1l_1 + E_1C_1 &= -g\rho_2l_1 + E_2C_3,\\
0 &= -g\rho_2(l_1 + l_2) + E_2C_3.
\end{aligned}$$

Potem je

$$C_2 = 0 \quad \text{in} \quad C_3 = \frac{g\rho_2}{E_2}(l_1 + l_2).$$

in

$$C_1 = \frac{g}{E_1}\left(\rho_1l_1 + \rho_2l_2\right)$$

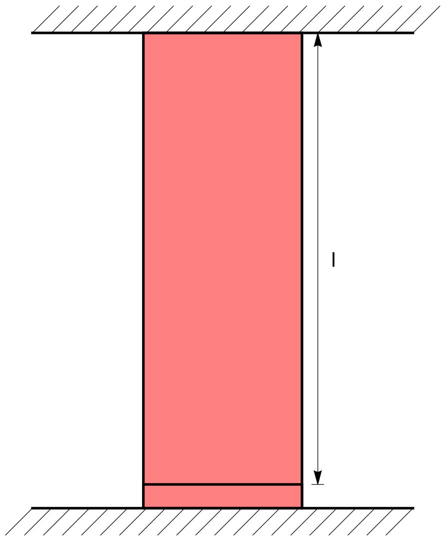
in po krajšem računu

$$C_4 = \frac{1}{2}gl_1^2\left(\frac{\rho_1}{E_1} - \frac{\rho_2}{E_2}\right) + \frac{E_2 - E_1}{E_1E_2}g\rho_2l_1l_2.$$

Razteg palice je tako enak

$$u_2(x = l_1 + l_2) = \frac{1}{2} g \left(\frac{\rho_1 l_1^2}{E_1} + \frac{\rho_2 l_2^2}{E_2} \right) + \frac{g \rho_2 l_1 l_2}{E_1}.$$

2. Homogena palica, visi s stropa in se zaradi lastne teže raztegne tako, da se dotakne togih tal. Nato palico segrejemo za ΔT. Določi napetostno stanje v palici. Pri kateri spremembi temperature bo v celotni palici napetost kompresibilna.



Viseča palica.

Rešitev: Nalogo rešimo v dveh korakih. Na prvem koraku določimo napetost v palici, ki nastane zaradi raztega zaradi lastne teže. Označimo to napetost s σ_1. Za σ_1 velja ravnovesna enačba

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A\sigma_1) + g\rho A = 0.$$

Potem je

$$\sigma_1 = -g\rho x + C_1.$$

Spodnji konec palice je prost, zato je $\sigma_1(x = l) = 0$. Tako dobimo

$$\sigma_1 = g\rho(l - x).$$

Na vrsti je drugi korak. Sedaj palico segrejemo. Deformacija palice na drugem koraku je vsota temperaturne in elastične deformacije

$$\epsilon_2 = \epsilon_T + \epsilon_E = \alpha \Delta T + \frac{\sigma_2}{E}. \tag{1}$$

Velja omeniti, da iz pogoja, da je palica vpeta med dvema togima stenama, na tem mestu ne sledi, da je $\epsilon_2 = 0$. Na palico deluje sila teže, zato napetost σ_2 ni konstantna in tako tudi deformacija ϵ_2 ni konstantna, torej ni enakomerna in je tako sklep, da je $\epsilon_2 = 0$ napačen.

Iz (1) sledi, da je

$$\sigma_2 = E\epsilon_2 - \alpha E \Delta T = E\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} - \alpha E \Delta T. \tag{2}$$

Za napetost velja ravnovesna enačba

$$\frac{\mathrm{d}A\sigma_2}{\mathrm{d}x} + g\rho A = 0.$$

V enačbo vstavimo (2). Potem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A \left(E\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} - \alpha E \Delta T \right) \right) + g\rho A = 0.$$

Upoštevamo, da je člen $\alpha E \Delta T$ konstanten. Potem se enačba poenostavi v

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{g\rho}{E} g = 0.$$

Ršitev enačbe je

$$u_2(x) = -\frac{g\rho}{2E}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Konstanti C_1 in C_2 določata robna pogoja, da je pomik palice na krajiščih enak nic". Iz pogoja $u_2(x=0)=0$ takoj sledi $C_2 = 0$. Iz pogoja $u_2(x=\hat{l})=0$ pa $C_1 = \frac{g\rho\hat{l}}{2E}$. Tu je $\hat{l}$ dolžina raztegnjene palice. Potem je

$$u_2 = \frac{g\rho}{2E}x(\hat{l}-x)$$

in

$$\sigma_2 = \frac{g\rho}{2E}(\hat{l}-2x) - \alpha E \Delta T.$$

Celotna napetost v palici je $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Torej

$$\sigma = g\rho(l-x) + \frac{g\rho}{2}(\hat{l}-2x) - \alpha E \Delta T.$$

Vidimo, da z x napetost pada. Največja je torej pri $x=0$. Potemtakem bo vsa palica v kompresijskem napetostnem stanju, če bo $\sigma(x=0) \leq 0$ oziroma

$$g\rho l + \frac{g\rho}{2}\hat{l} - \alpha E \Delta T \leq 0.$$

Palica je vsa v kompresijskem stanju, če je

$$g\rho l + \frac{g\rho}{2}\hat{l} \leq \Delta T.$$

Izraz lahko poenostavimo, če upoštevamo, da je razteg palice zaradi lastne teže majhen. Velja torej $\hat{l} \approx l$. Potem je palica vsa v kompresijskem stanju, če je

$$\frac{3g\rho}{2}\hat{l} \leq \Delta T.$$