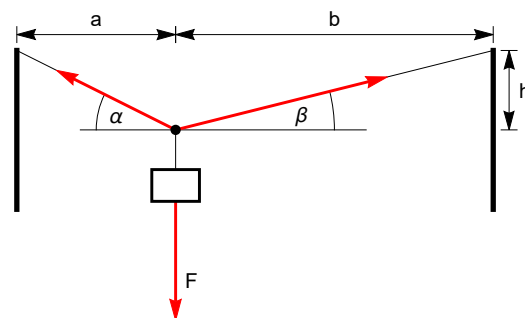


Vaje 18. marec 2021

1. Na žico med dvema stebroma je obešena utež tako kot kaže skica. Določi sili žic.

Rešitev: Silo leve žice označimo z F_1 , desno z F_2 . Sistem sil F , F_1 in F_2 ima skupno prijemašče v točki obremenitve. Ravnovesna enačba je ravnovesje sil $\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Potem je po komponentah



$$F_1 \cos \alpha = F_2 \cos \beta, \quad F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = F.$$

Tu sta α in β kota, ki ju žici oklepata z vodoravno smerjo. Potem je $F_2 = F_1 \cos \alpha / \cos \beta$ in

$$F = F_1 (\sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta / \cos \beta) = F_1 \sin(\alpha + \beta) / \cos \beta.$$

Sili žic sta tako

$$F_1 = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Če upoštevamo, da je

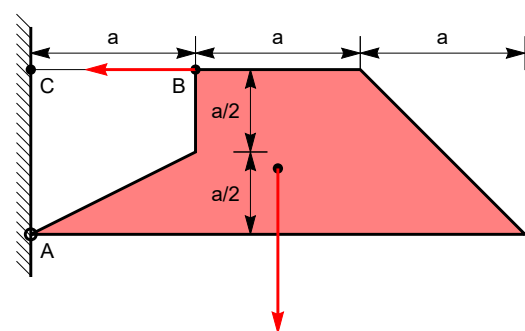
$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \sin \beta = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

dobimo

$$F_1 = \frac{bF\sqrt{a^2 + h^2}}{ah + bh}, \quad F_2 = \frac{aF\sqrt{b^2 + h^2}}{ah + bh}.$$

2. Homogena plošča s površinsko gostoto ρ , glej skico, je v točki A vpeta na steno s tečajem A , v točki B pa je pripeta z vodoravno vrstico BC .

- Izračunaj koordinati masnega središča plošče.
- Določi silo podpore v A in silo vrvice BC .



Rešitev: Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v točko A . Plošča je sestavljena iz treh likov, levi trikotnik, kvadrat in desni trikotnik. Za izračun masnega središča sestavimo tabelo:

Lik	x_*	y_*	A
Levi trikotnik	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{4}a^2$
Kvadrat	$\frac{3}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2
Desni trikotnik	$\frac{7}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}a^2$

Ploščina lika je $\frac{7}{4}a^2$, koordinati masnega središča pa sta

$$x_* = \frac{4}{7a^2} \left(\frac{2}{3}a \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}aa^2 + \frac{7}{3}a \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{34}{21}a$$

in

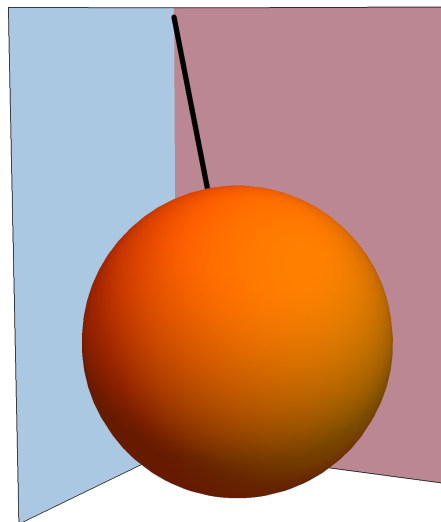
$$y_* = \frac{4}{7a^2} \left(\frac{1}{6}a \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}aa^2 + \frac{1}{3}a \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{17}{42}a.$$

Določimo sedaj iskane sile. Označimo z A_x in A_y komponenti sile podpore v A v smeri osi x in y , z F pa silo vrvice. Sila teže je $F_g = mg = \rho Ag = \frac{7}{4}\rho a^2 g$, kjer je ρ ploščinska gostota. Para sil $\{A_x \vec{i}, -F \vec{i}\}$ in $\{A_y \vec{j}, -F_g \vec{j}\}$ sta dvojici. Potem je $A_x = F$, $A_y = F_g$. Nadalje iz ravnovesja navora v točki A sledi $aF - x_* F_g = 0$. Potem $F = \frac{17}{6}\rho g a^2$ in tako

$$A_x = \frac{17}{6}\rho g a^2, \quad A_y = \frac{7}{4}\rho a^2 g.$$

3. Homogena krogla s polmerom a in z maso m visi pripeta na vrvico dolžine l v vogalu med dvema pravokotnima stenama tako kot kaže skica. Določi silo vrvice.

Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo z navpično navzdol v smeri sile teže, osi x in y pa v smeri sten. Na kroglo deluje sila teža \vec{F} , sila vrvice \vec{S} in sili sten \vec{A}_1 in \vec{A}_2 . Sili sten sta pravokotni na steni. Očitno ima ta sistem sil skupno prijemašče, ki je v središču krogle. Ravnovesni pogoj iz katerega bomo določili silo vrvice je pogoj, da je vsota vseh sil enaka nič. Koordinatni zapis sil je $\vec{F} = mg\vec{k}$, $\vec{A}_1 = A_1\vec{j}$, $\vec{A}_2 = A_2\vec{i}$. Zapisati moramo še silo vrvice.



Ta je v smeri od središča krogle $P_0(a, a, \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2})$ do koordinatnega izhodišča O , kjer je vrvica pripeta v vogal. Pri določitvi središča krogle smo upštevali, da je razdalja od središča krogle do O enaka $l+a$. Sila vrvice je potem enaka

$$\vec{S} = -\frac{S}{l+a} (a\vec{i} + a\vec{j} + \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}\vec{k}).$$

Iz pogoja $\vec{F} + \vec{S} + \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{0}$ dobimo sistem

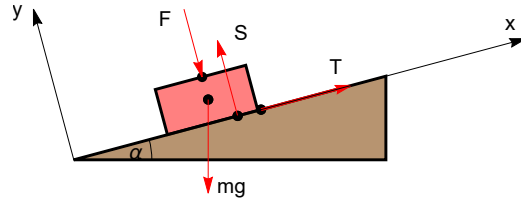
$$\begin{aligned} A_2 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ A_1 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ mg - \frac{S}{l+a} \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$S = mg \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}, \quad A_1 = A_2 = mg \frac{a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}.$$

Vidimo, krajša je vrstica, večje so sile. V limiti $l \rightarrow a(\sqrt{2} - 1)$ gredo sile čez vse meje.

4. Na klancu z naklonskim kotom α leži klada z maso m , glej sliko. Določi velikost sile \vec{F} , da klada ne zdrsne. Koeficient trenja med klado in klancem je k .



Rešitev: Ker je tendenca gibanja klade navzdol, kaže sila \vec{T} navzgor. Ravnovesna enačba je

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{S} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Enačbe za ravnovesje momenta ne upoštevamo, saj ni znano prijemališče normalne sile podlage \vec{S} . V koordinatnem sistemu na sliki je $\vec{F} = -F\vec{j}$, $\vec{T} = T\vec{i}$, $\vec{S} = S\vec{j}$ in $m\vec{g} = mg(-\sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j})$. Po komponentah je potem

$$-mg \sin \alpha + T = 0, \quad -mg \cos \alpha - F + S = 0.$$

Potem je

$$S = F + mg \cos \alpha, \quad T = mg \sin \alpha.$$

Klada ne zdrsne, če velja

$$T \leq kS,$$

saj je največja tangentska sila, ki jo lahko prenese podlaga enaka kS . Če smo natančni, je tu k koeficient oprijemalnega trenja oziroma koeficient lepenja. Vendar, je med koeficientom trenja in koeficientom lepenja tako majhna razlika, da med njima ne delamo razlike. Iz zgornje neenakosti sledi

$$mg \sin \alpha \leq k(F + mg \cos \alpha)$$

in od tod

$$mg \left(\frac{1}{k} \sin \alpha - \cos \alpha \right) \leq F.$$

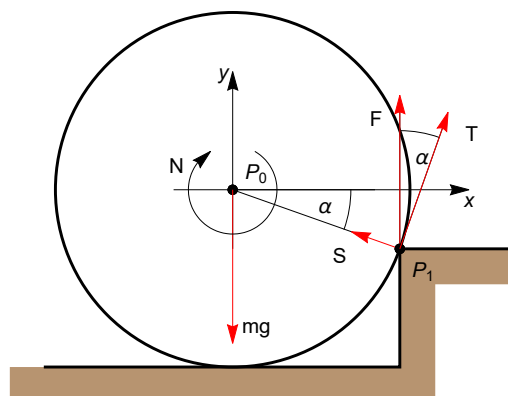
Koeficient trenja izrazimo s tornim kotom $k = \tan \alpha_0$. Potem po krajšem računu, tu uporabimo adicijski izrek za sin sledi

$$mg \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin \alpha_0} < F.$$

Če je $\alpha_0 > \alpha$, za ravnovesje ni potrebna sila F , za $\alpha_0 < \alpha$ pa moramo klado pritiskati ob strmino, da ne zdrsne. Če ni trenja, klada zdrsne ne glede na silo F .

5. Kolo s polmerom r_0 spelje čez robnik višine h , gkej skico. Določi potrebni navor na kolo. Določi dopustno višino robnika, da se kolo ne zavrti v prazno, če je koeficient trenja med kolesom in robnikom k .

Rešitev: Na kolo deluje sila teže $m\vec{g}$, sila robnika \vec{F} s prijemališčem na robniku v P_1 in navor \vec{N} . Iz enačbe $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$ sledi, da je $\vec{F} = -m\vec{g}$. Par \vec{F} in $m\vec{g}$ je torej dvojica, ki uravnoveša navor $\vec{N} = N\vec{k}$. Potem je $N = r_0 mg \cos \alpha$ iskani navor. Upoštevajmo še, da je $\sin \alpha = (r_0 - h)/r_0$.



$$N = mg \sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}.$$

Določiti moramo še pogoj, da kolo ne zdrsne. Velikost projekcije sile \vec{F} na obodno smer je T , na normalno pa S . Tako je $T = mg \cos \alpha$ in $S = mg \sin \alpha$. Pogoj, da kolo ne zdrsne je $T \leq kS$. Veljati torej mora $\cos \alpha \leq k \sin \alpha$. Če zapišemo k s tornim kotom $k = \tan \alpha_0$, se pogoj glasi

$$\tan \alpha_0 \geq \cot \alpha = \frac{\sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}}{r_0 - h}.$$