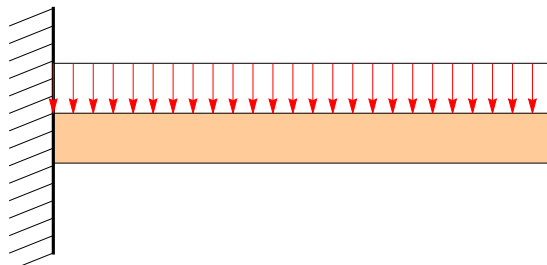


## Vaje 28. maja 2020

1. Za konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo  $q_0$ :

- določi upogib nosilca;
- določi maksimalen upogib.



**Rešitev:**

(a) Enačba upogiba je

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju  $w(0) = w'(0) = 0$  in na prostem koncu  $w''(l) = w'''(l) = 0$ . Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri  $x = 0$  takoj sledi  $C_3 = C_4 = 0$ . Izračunajmo

$$w''(x) = \frac{q_0}{2EI} x^2 + 6C_1 x + 2C_2$$

in

$$w'''(x) = \frac{q_0}{EI} x + 6C_1.$$

Potem iz  $w'''(l) = 0$  sledi

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{6EI}.$$

Pogoj  $w''(l) = 0$  se potem glasi

$$0 = \frac{q_0 l^2}{2EI} - \frac{q_0 l^2}{EI} + 2C_2 = -\frac{q_0 l^2}{2EI} + \check{C}_2$$

in

$$C_2 = \frac{q_0 l^2}{4EI}.$$

Upogib je tako

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 - \frac{q_0 l}{6EI} x^3 + \frac{q_0 l^2}{4EI} x^2 = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2).$$

(a) Iz narave problema je očitno, da je maksimalni upogib na koncu. Tako je

$$w_{max} = w(l) = \frac{q_0 l^2}{24EI} (l^2 - 4l^2 + 6l^2) = \frac{q_0 l^4}{8EI}.$$

2. Za konzolno vpeti nosilec s točkovno obremenitvijo na koncu:

- določi upogib nosilca;
- določi maksimalen upogib in ga primerjaj z maksimalnim upogibom enakomerno obremenjenega nosilca.



**Rešitev:**

(a) Ker je obremenitev na koncu velja vzdolž celega nosilca enčba

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju  $w(0) = w'(0) = 0$  in na obremenjenem koncu  $w''(l) = 0$  in  $w'''(l) = -F_0/EI$ . Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri  $x = 0$  tako kot prej sledi  $C_3 = C_4 = 0$ . Izračunajmo  $w''(x) = 6C_1 x + 2C_2$  in  $w'''(x) = 6C_1$ . Potem iz  $w'''(l) = -F_0/EI$  sledi

$$C_1 = -\frac{F_0}{6EI}.$$

Pogoj  $w''(l) = 0$  se potem glasi

$$0 = -\frac{F_0 l}{EI} + 2C_2.$$

Tako dobimo

$$C_2 = \frac{F_0 l}{2EI}.$$

Upogib je tako

$$w(x) = -\frac{F_0}{6EI} x^3 + \frac{F_0 l}{2EI} x^2 = \frac{F_0}{6EI} x^2 (-x + 3l).$$

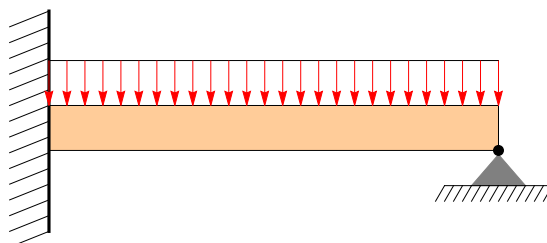
(b) Maksimalni upogib je na koncu in je

$$w_{max} = w(l) = \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Ekvivalentna enakomerna obremenitev je  $q_0 = F_0/l$ . Maksimalni upogib točkovno obremenjenega nosilca je za faktor  $8/3$  večji od enakomernega.

3. Konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo z gosoto  $q_0$  je na koncu členkasto podprt. Določi upogib nosilca in silo podpore na koncu.

**Rešitev:** Nalogo bomo rešili na dva načina. Prvi bo po metodi superpozicije, kjer bomo uporabili rešitev prvih dveh nalog. Nato bomo nalogo rešili še direktno.



- (a) Označimo z  $w_1$  rešitev za enakomerno linijsko obremenitvijo in z  $w_2$  rešitev za točkovno obremenitev. Pri  $x = l$  mora veljati  $w_1(l) + w_2(l) = 0$  oziroma

$$0 = \frac{q_0 l^4}{8EI} + \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Enačba je izpolnjena za

$$F_0 = -\frac{3q_0 l}{8}.$$

Ta sila ustreza sili podpore. Negativni predznak pomeni, da sila deluje v nasprotni smeri kot je obremenitev. Upogib je potem

$$\begin{aligned} w(x) &= w_1(x) + w_2(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2) - \frac{3q_0 l}{48EI} x^2 (-x + 3l) \\ &= \frac{q_0 x^2}{48EI} (2x^2 - 5lx + 3l^2). \end{aligned}$$

- (b) Nalogo rešimo še po drugi poti. Rešujemo enačbo

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

z robnimi pogoji  $w(0) = w'(0) = 0$  v vpetju in  $w(l) = w''(l) = 0$  v desni podpori. Rešitev enačbe z upoštevanjem pogojev pri  $x = 0$  je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2.$$

Iz robnih pogojev pri  $x = l$  potem sledi

$$0 = w(l) = \frac{q_0}{24EI} l^2 + C_1 l + C_2.$$

in

$$0 = w''(l) = \frac{q_0}{2EI} l^2 + 6C_1 l + 2C_2.$$

Dobili smo dve enačbi za dve neznanke. Pomnožimo prvo enačbo z  $-2$  in jo prištejmo k drugi. Po krajšem računu dobimo

$$C_1 = -\frac{5q_0 l}{48EI}.$$

Nato pa še

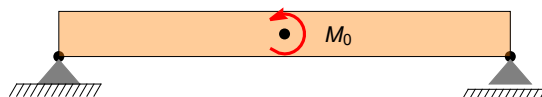
$$C_2 = \frac{3q_0 l^2}{48EI}.$$

Dobili smo enako rešitev kot po prvi poti.

4. Enostavno podprti nosilec je na sredini obremenjen s točkovnim upogibnim momentom  $M_0$ .

- (a) Določi upogib nosilca.

- (b) Skiciraj upogib in določi maksimalni upogib.



**Rešitev:**

- (a) Nosilec razdelimo v dve polji, levo in desno od točke obremenitve. Pomik na levem delu označimo z  $w_l$  na desnem pa z  $w_d$ . Za oba dela velja enačba

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0,$$

saj nosilec ni linijsko obremenjen. Označimo z  $l$  dolžino nosilca. Robni pogoji so

$$w_l(0) = w_l''(0) = 0 \quad \text{in} \quad w_d(l) = w_d''(l) = 0.$$

Rešitvi enačb sta očitno

$$\begin{aligned} w_l(x) &= C_1 x^3 + C_2 x, \\ w_d(x) &= C_3 (x-l)^3 + C_4 (x-l), \end{aligned} \quad (1)$$

kar tudi potrdi kratek račun. Konstante  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  določata sklopitvena pogoja

$$w_l(l/2) = w_d(l/2), \quad w_l'(l/2) = w_d'(l/2)$$

in ravnovesna pogoja za infinitezimalno kratek nosilec v okolici delovanja  $M_0$

$$-Q(l/2-) + Q(l/2+) = 0 \quad -M(l/2-) + M(l/2+) + M_0 = 0.$$

Tu se zapis  $l/2-$  nanaša na infinitezimalno bližino z leve,  $l/2+$  pa z desne. Upoštevajmo, da je

$$Q = -EIw''' \quad \text{in} \quad M = -EIw''.$$

Tako dobimo robna pogoja

$$w_l''(l/2) - w_d''(l/2) = -\frac{M_0}{EI}, \quad w_l'''(l/2) = w_d'''(l/2).$$

Tu smo upoštevali, da se nosilec ne prelomi v točki obremenitve in definicijo upogibnega momenta, ki pravi da je to moment s katerim desni del nosilca deluje na levi.

Potem ko v robne pogoje vstavimo (1), dobimo sistem enačb:

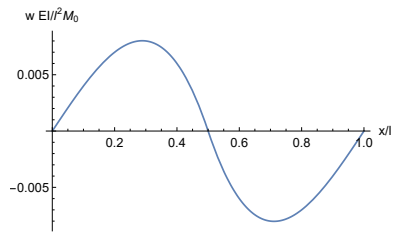
$$\begin{aligned} \frac{1}{8}C_1 l^3 + \frac{1}{2}C_2 l &= -\frac{1}{8}C_3 l^3 + -\frac{1}{2}C_4 l, \\ 3\frac{1}{8}C_1 l^2 + C_2 &= 3\frac{1}{8}C_3 l^2 + C_4, \\ 3C_1 l &= -3C_3 l - \frac{M_0}{EI}, \\ C_1 &= C_3. \end{aligned}$$

Po krajšem računu dobimo rešitev

$$C_1 = C_3 = -\frac{M_0}{6EI} \quad \text{in} \quad C_2 = C_4 = \frac{M_0}{24EI}.$$

Tako je

$$\begin{aligned} w_l(x) &= \frac{M_0}{24EI} x(l^2 - 4x^2), \\ w_d(x) &= \frac{M_0}{8EI} (l-x)(3l^2 - 2xl + 4x^2). \end{aligned}$$



Slika 1: Upogib nosilca s točkovnim momentom.

- (b) Skica upogibnega momenta je na sliki 1.

Koordinato maksimalnega upogiba levega dela dobimo iz enačbe  $w'_l(x) = 0$ . Rešitev enačbe

$$0 = w'_l(x) = \frac{M_0}{24EI} (l^2 - 12x^2).$$

je  $x = l/2\sqrt{3}$ . Maksimalen upogib je potem

$$w_{max} = \frac{M_0 l^2}{72\sqrt{3}EI}.$$