Vaje 21. april 2021

1. Na preseku osnega elementa pod kotom $\pi/4$ je normalna napetost enaka $\sigma = 120\,\mathrm{MPa}$. Določi osno silo in strižno napetost. Osni element ima površino $A = 4\,\mathrm{cm}^2$.

   Rešitev: V osnem elementu je enoosno napetostno stanje. Pripadajoči tenzor napetosti je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Normala na presek je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$. Potem je normalna napetost enaka

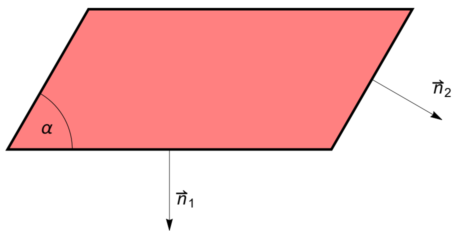
$$\sigma = t_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}t_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}t_{11}.$$

   Ker je normalna napetost $\sigma = 120\,\mathrm{MPa}$, je $t_{11} = 2\sigma = 240\,\mathrm{MPa}$. Osna sila je $F = \sigma A$. Potem je

$$F = 240\,\mathrm{MPa} \times 4\,\mathrm{cm}^2 = 960 \times 10^6 \times 10^{-4}\mathrm{N} = 96\,000\,\mathrm{N} = 96\,\mathrm{kN}.$$

2. Na rombu z vmesnim kotom α in stranico v smeri osi x je na spodnji vodoravni stranici napetost enaka $\vec{t}_1 = \tau\vec{\jmath}$ na desni poševni stranici pa je napetost enaka $\vec{t}_2 = \frac{\tau}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Določi pogoj na kot α, ki dopušča dane napetosti.

   Rešitev: Normala na spodnjo vodoravno starnico je $\vec{n}_1 = -\vec{\jmath}$, normala na desno poševno stranico pa je



Romb s predpisanima napetostima.

$$\vec{n}_2 = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)\vec{\imath} - \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)\vec{\jmath} = \sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}.$$

   Iščemo ravninski napetostni tenzor

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}$$

   tako, da je

$$\vec{t}_1 = \underline{\underline{t}}\,\vec{n}_1 \quad \text{in} \quad \vec{t}_2 = \underline{\underline{t}}\,\vec{n}_2$$

   oziroma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}\sin\alpha - t_{12}\cos\alpha \\ t_{12}\sin\alpha - t_{22}\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Dobili smo sistem enačb za komponente t_{ij}. Enačbe so štiri, neznanke pa samo tri, t_{11}, t_{12} in t_{22}. Da bo sistem rešljiv, mora veljati določen pogoj na α. Poiščimo ga. Iz prvega para enačb dobimo takoj $t_{12} = 0$ in $t_{22} = \tau$. Vstavimo to v drugi par enačb. Dobimo enačbi

$$\frac{\tau}{2} = t_{11} \sin\alpha \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2} = -\tau\cos\alpha.$$

Vidimo, da mora veljati $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Iskani kot je tako $2\pi/3$ in $t_{11} = \frac{\tau}{\sqrt{3}}$.

3. Z meritvami smo dobili napetosti $\underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = (10\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$MPa, $\left|\underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}\right| = \sqrt{34}$MPa in $\underline{\underline{t}}\,\vec{k} = \vec{0}$.
   (a) Določi napetostni tenzor.
   (b) Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh koordinatnih osi x in y.
   (c) Določi ekstremalni normalni napetosti in njuni smeri.
   (d) Skiciraj Mohrovo krožnico.
   (e) Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh diagonal prvega in drugega kvadranta.
   (f) Določi normalno in strižno napetost v ravnini, ki ima normalo v smeri vektorja $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.

Rešitev:

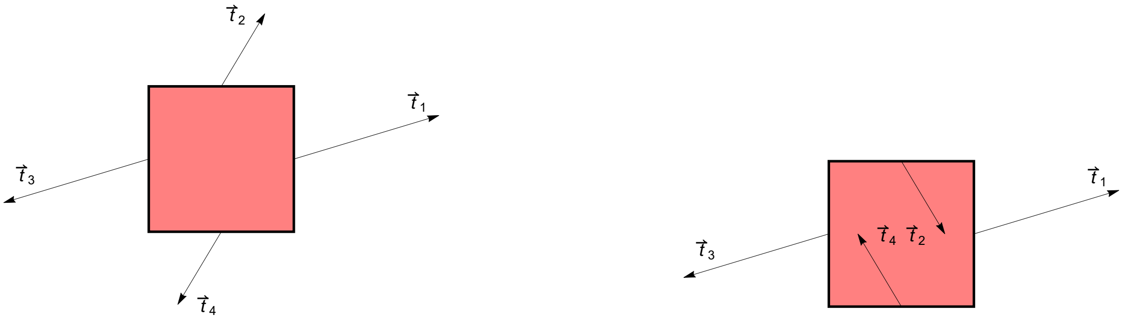
(a) Iz pogoja $\underline{\underline{t}}\,\vec{k} = \vec{0}$ sledi, da je napetostno stanje ravninsko, $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$. Iz enačbe $\underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = (10\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$MPa takoj sledi, da je $t_{11} = 10\,\text{MPa}$ in $t_{12} = 3\,\text{MPa}$. Upoštevajmo še pogoj $\left|\underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}\right| = \sqrt{34}$MPa. Izračunajmo

$$\sqrt{34}\text{MPa} = \left|\underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}\right| = \sqrt{t_{12}^2 + t_{22}^2} = \sqrt{9\,\text{MPa}^2 + t_{22}^2}.$$

Potem je $t_{22} = \pm 5\,\text{MPa}$. Napetostni tenzor

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \pm 5 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

(b) Vektor napetosti na nasprotni stranici je nasproten vektorju napetosti na stranici, $\underline{\underline{t}}\,(-\vec{\imath}) = -\underline{\underline{t}}\,\vec{\imath}$ in $\underline{\underline{t}}\,(-\vec{\jmath}) = -\underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}$. Skica napetosti je na sliki 1.



Slika 1: Skica napetosti na stranicah kvadrata. Levo $t_{22} > 5\,\text{MPa}$, desno $t_{22} > -5\,\text{MPa}$.

(c) V nadaljevanju se bomo omejili na primer $t_{22} = 5\,\text{MPa}$. Ekstremalni napetosti izračunamo po formuli

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\left(t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}\right).$$

Po krajšem računu dobimo

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{61}\right) \text{MPa} \quad \text{in} \quad \sigma_{\min} = \frac{1}{2}\left(15 - \sqrt{61}\right) \text{MPa}.$$

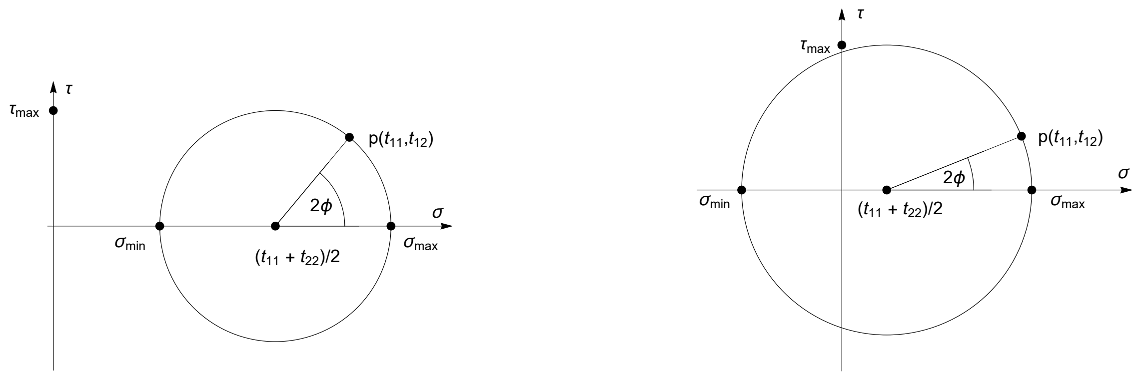
Smer maksimalne normalne napetosti dobimo po formuli

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22} \end{cases}.$$

V našem primeru je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{6}{5} \approx 25.1°.$$

(d) Mohrovi krožnici za oba primera sta na sliki 2.



Slika 2: Mohrovi krožnici. Levo $t_{22} > 5\,\text{MPa}$, desno $t_{22} > -5\,\text{MPa}$.

(e) Normala na diagonalo prvega kvadranta koordinatnega sistema xy je $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{MPa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Normalna napetost je potem $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = 9/2$, strižna pa

$$t_s = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t} - t_n^2} = \frac{5}{2}\text{MPa}.$$

Normala na diagonalo drugega in četrtega kvadranta je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$. Potem je $\vec{t} = \frac{13}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - 4\sqrt{2}\vec{\jmath}$, $t_n = 21/2\,\text{MPa}$ in $t_s = 5/2\,\text{MPa}$.

(f) Normala v smeri vektorja $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ je $\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$. Potem podobno kot prej izračunamo $\vec{t} = (\frac{13}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \frac{8}{\sqrt{3}}\vec{\jmath})\text{MPa}$, $t_n = 7\,\text{MPa}$ in $t_s = \sqrt{86/3}\text{MPa}$.

4. Naj za ravninsko napetostno stanje velja, da je sl $\underline{\underline{t}} = 0$. Pokaži, da obstaja KS v katerem sta diagonalni komponenti napetostnega tenzorja enaki nič.

Rešitev: Izberimo poljubni koordinatni sistem in priredimo tenzorju matriko z elementi t_{ij}. Ker je sled tenzorja neodvisna od koordinatnega sistema, je $t_{11} + t_{22} = 0$. Iščemo nov koordinatni sistem v katerem ima $\underline{\underline{t}}$ matriko z elementi t'_{ij} za katero je $t'_{11} = t'_{22} = 0$. Po formulah s predavanj je

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi.$$

Iz $t_{11} + t_{22} = 0$ sledi, da je $t_{22} = -t_{11}$. Potem je

$$t'_{11} = t_{11}\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -t_{11}\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi.$$

Vidimo, da je dovolj poiskati kot φ pri katerem je $t'_{11} = 0$. Iskani kot je rešitev enačbe

$$\cot 2\varphi = -\frac{t_{12}}{t_{11}}.$$

Iskani koordinatni sistem je sistem zavrten za kot φ, ki je rešitev zgornje enačbe.