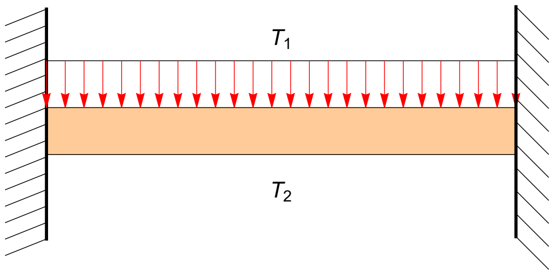
Vaje 27. maja 2021

1. Linijsko enakomerno obremenjeni nosilec dolžine l je obojestransko konzolno vpet. Na spodnji strani je temperatura enaka T_2, na zgornji pa T_1. Določi upogib nosilca.



Rešitev: Enačba prevajanja toplote je $\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = 0$. Potem je $T = \beta z + T_0$l, kjer je $\beta = (T_2 - T_1)/h$. Tu smo s h označili višino nosilca. Temperatura je linearna funkcija koordinate z, zato velja enačba

$$w'' = -\frac{M + M_T}{EI}, \tag{1}$$

kjer je $M_T = \alpha\beta ET$. Potem je

$$w'''' = \frac{q_0}{EI}.$$

Tu smo upoštevali, da je M_T konstanta in da je

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q.$$

Robni pogoji so, v levem konzolnem vpetju $w(0) = w'(0) = 0$ in $w(l) = w'(l) = 0$ na desnem koncu. Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri $x = 0$ takoj sledi $C_3 = C_4 = 0$. Izračunajmo

$$w'(x) = \frac{q_0}{6EI}x^3 + 3C_1x^2 + 2C_2x.$$

Iz pogojev na desnem vpetju dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{24EI}l^4 + C_1l^3 + C_2l^2 = 0, \\ \frac{q_0}{6EI}l^3 + 3C_1l^2 + 2C_2l = 0, \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{24EI}l^2 + C_1l + C_2 = 0, \\ \frac{q_0}{6EI}l^2 + 3C_1l + 2C_2 = 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo pomnožimo z -2 in seštejemo. Tako dobimo

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{12EI}$$

in potem še

$$C_2 = \frac{q_0 l^2}{24EI}.$$

Upogibnica je tako

$$w = \frac{q_0}{24EI} x^2 (x-l)^2.$$

Vidimo, da upogib ni odvisen od temperature. V primeru $\beta = 0$ oziroma $T_2 = T_1$ je $w = 0$. Od temperature pa je odvisen upogibni moment. Iz (1) sledi

$$M = -EIw'' + \alpha\beta EI = -\frac{q_0}{24}\left(12x^2 - 12lx + 2l^2\right) + \alpha\beta EI.$$

V vpetju je potem

$$M(x=0) = M(x=l) = -\frac{q_0 l^2}{12} + \alpha\beta EI.$$

V posebnem primeru

$$q_0 = \frac{12\alpha\beta EI}{l^2}$$

se konzolni podpori reducirata v členkasti.

2. Nosilec dolžine l je enostavno podprt. Na spodnji strani je temperatura enaka T_2, na zgornji pa T_1.

   - Določi upogib nosilca.
   - Določi točkovno obremenitev nosilca, da bo upogib nosilca na sredini enak nič.

   Rešitev:

   (a) Ker je nosilec brez obtežbe, je enačba nosilca

   $$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0.$$

   Robni pogoji so $w(0) = w(l) = 0$ in $M(0) = M(l) = 0$. Iz (1) potem sledi

   $$w''(0) = w''(l) = -\alpha\beta.$$

   Iz pogoja $w(0) = 0$ sledi $C_4 = 0$. Po kratkem računu dobimo

   $$w'' = 6C_1 x + 2C_2.$$

   Upoštevajmo pogoj $w''(0) = -\alpha\beta$. Potem je

   $$C_2 = -\frac{1}{2}\alpha\beta.$$

   Zapišimo še pogoja na desnem krajišču. Dobimo sistem

   $$\begin{aligned} C_1 l^3 + C_2 l^2 + C_3 &= 0, \\ 6C_1 l + 2C_2 &= -\alpha\beta. \end{aligned}$$

   Tako je $C_1 = 0$ in

   $$C_3 = \frac{1}{2}\alpha\beta l.$$

   Rešitev je tako

   $$w = \frac{1}{2}\alpha\beta x(l-x).$$

   Maksimalni upogib je očitno pri $x = l/2$ in je enak

   $$w_{max} = \frac{1}{8}\alpha\beta l^2.$$

(b) Označimo z w_1 toplotni upogib in z w_2 upogib zaradi točkovne obremenitve. Upogib nosilca s točkovno in toplotno obremenitvijo je potem $w = w_1 + w_2$. Za točkovno obremenitvijo vemo, da je njen upogib na sredini maksimalen in je enak

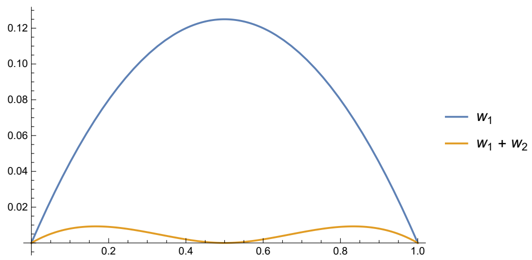
$$w_2^{max} = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Iščemo silo F tako, da bo $w(x = \frac{1}{2}l) = w_1(\frac{1}{2}l) + w_2(\frac{1}{2}l) = 0$. Tako dobimo enačbo

$$0 = \frac{1}{8}\alpha\beta l^2 + \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Iskana sila je

$$F = -\frac{6\alpha\beta EI}{l}.$$



Slika 1: Brezdimenzijski potek upogibnice.

3. Za krožni presek določi potek strižne napetosti.

Rešitev: Označimo polmer preseka z r. Strižna napetost na preseku je dana s formulo

$$\tau(z_0) = \frac{QS(z_0)}{Ib(z_0)},$$

kjer je $b(z_0)$ širina preseka pri $z = z_0$, $S(z_0)$ pa je linearen ploskovni moment dela preseka za katerega je $z \geq z_0$, glej sliko 2. Ta odrezani presek označimo z A_0. I pa je ploskovni moment krožnega preseka in je enak $I = \frac{1}{4}\pi r^4$.

Za linearen ploskovni moment lika A_0 velja $S(z_0) = |A(z_0)|z_0^*$, kjer je z_0^* centralna točka lika. Prvo obravnavajmo primer $z_0 > 0$, leva slika v 2. V tem primeru je A_0 krožni odsek. Znano je, da za krožni odsek velja

$$|A_0| = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) \quad \text{in} \quad z_0^* = \frac{4r}{3}\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Potem je

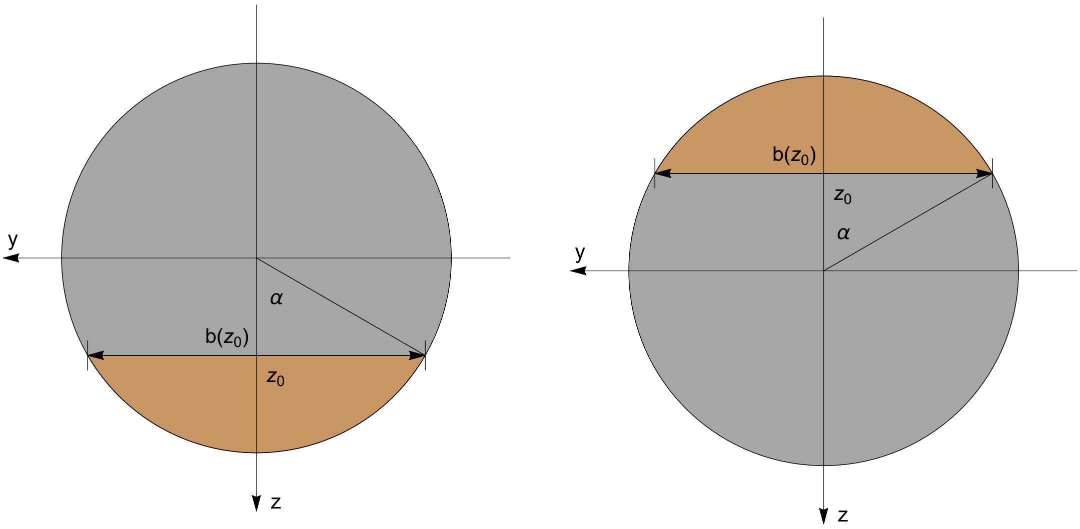
$$S(z_0) = z_0^*|A_0| = \frac{2}{3}r^3\sin^3\alpha$$

in po krajšem računu, pri tem upoštevamo, da je $b(z_0) = 2r\sin\alpha$, dobimo

$$\tau = \frac{4Q\sin^2\alpha}{3\pi r^2}.$$

Upoštevajmo še, da velja $\cos\alpha = \frac{z_0}{r}$ in $|A| = \pi r^2$. Tako dobimo

$$\tau = \frac{4Q}{3|A|}(1 - (z_0/r)^2).$$



Slika 2: Presek za $z_0 > 0$ levo in $z_0 < 0$ desno.

Poglejmo sedaj izračun $S(z_0)$ za $z_0 < 0$. Odeskan presek je sedaj razlika kroga A_1 in odseka A_2. Koordinata z središča kroga je $z_1^* = 0$, odseka pa

$$z_2^* = -\frac{4r}{3}\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Potem je

$$z_0^* = \frac{z_1^*|A_1| - z_2^*|A_2|}{|A_1| - |A_2|}$$

in

$$S(z_0) = |A_0|z_0^* = (|A_1| - |A_2|)z_0^* = -z_2^*|A_2| = \frac{2}{3}r^3\sin^3\alpha.$$

Velja torej $S(z_0) = S(-z_0)$ in tako

$$\tau = \frac{4Q}{3|A|}(1 - (z_0/r)^2)$$

za vsak $z_0 \in [-r, r]$.

4. Palica dolžine l s krožnim presekom polmera r_0 je torzijsko obremenjena z momentom $M =$ 2kNm. Določi polmer palice, da napetost ne bo presegla vrednosti 180MPa. Kakšen je zasuk pri minimalno dopustnem r_0, če je $G = 90$GPa.

Rešitev: Torzijski moment palice s krožnim presekom je

$$M = \frac{\alpha}{2l}\mu\pi r_0^4, \tag{2}$$

edini neničelni komponenti naptosti pa sta

$$t_{13} = -\mu\frac{\alpha}{l}y \quad \text{in} \quad t_{23} = \mu\frac{\alpha}{l}x.$$

Tu smo kompoenti zapisali v koordinatnem sistemu, ki ima os z v smeri osi palice.

Napetost je ekstremalna na robu palice. Potem mora veljati

$$\mu \frac{\alpha}{l} r_0 < \sigma_0.$$

Iz (2) sledi

$$\mu \frac{\alpha}{l} r_0 = \frac{2M}{\pi r_0^3}$$

in tako

$$\left(\frac{2M}{\pi \sigma_0} \right)^{1/3} < r_0.$$

Za dane vrednosti mora tako veljati

$$r > \left(\frac{1}{45\pi} \right)^{1/3} \mathrm{dm} \approx 1.92\,\mathrm{cm}.$$

Zasuk na dolžinsko enoto je pri najmanjšem dopustnem r enak

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\sigma_0}{\mu r_0} \approx 0.01042 \approx 0.6^\circ.$$