

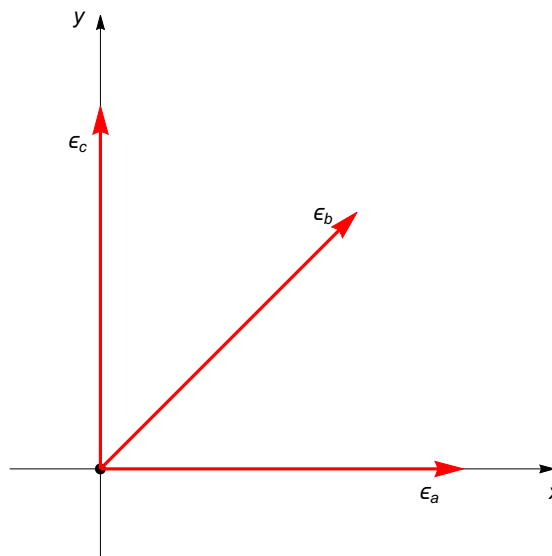
Vaje 6. maj 2021

1. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ so znane osne deformacije $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\epsilon_b = -\frac{3}{2}\epsilon_0$ in $\epsilon_c = 2\epsilon_0$, kjer je $\epsilon_0 = 10^{-3}$.

- (a) Določi deformacijski tenzor.
 (b) Skiciraj Mohrovo krožnico in določi ekstremalne vrednosti in smeri deformacije.

Rešitev:

- (a) Koordinatni sistem z osema x in y postavimo v smereh deformacije ϵ_a in ϵ_c , glej skico. V tem koordinatnem sistemu pripada deformacijskemu tenzorju matrika



$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & e_{12} \\ e_{12} & \epsilon_c \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še komponento $e_{12} = \epsilon_0 x$. Vemo, da je v smeri

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}),$$

ki oklepa kot $\varphi = \pi/4$ s smerjo x

$$\epsilon_b = \vec{e} \cdot \mathbf{e} \vec{e} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi.$$

Vstavimo v formulo naše podatke. Potem je

$$-\frac{3}{2}\epsilon_0 = \frac{3}{2}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\epsilon_0 \cos \frac{1}{2}\pi + x\epsilon_0 \sin \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\epsilon_0 + x\epsilon_0.$$

Potem je $x = -3$ in

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Po formuli sta ekstremalni osni deformaciji enaki

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} \pm \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right).$$

Izračunajmo prvo

$$\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} = \sqrt{37}\epsilon_0.$$

Potem je

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{37})\epsilon_0 \quad \text{in} \quad \epsilon_{\min} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{37})\epsilon_0.$$

Maksimalna osna deformacija nastopi v smeri

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases}$$

V našem primeru je $e_{11} < e_{22}$ in $e_{12} < 0$. Potem je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan 6 + \frac{1}{2}\pi \approx 130.3^\circ.$$

Smer minimalne osne deformacije je

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} - \frac{1}{2}\pi \approx 40.3^\circ.$$

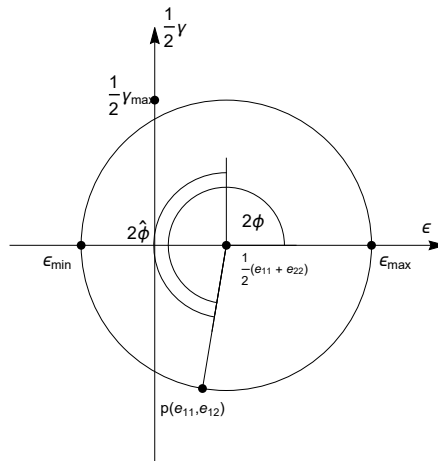
Tu smo upoštevali, da sta ekstremalni smeri med seboj pravokotni in tako lahko prištejemo ali odštejemo pravi kot, da pridemo do druge ekstremalne smeri. Maksimalna strižna deformacija oziroma sprememba kota je

$$\gamma_{\max} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min} = \sqrt{37}\epsilon_0$$

in nastopi v smeri

$$\hat{\varphi}_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\pi \approx 85.3^\circ.$$

Mohrova krožnica je na sliki 1



Slika 1: Mohrova krožnica.

2. Za ravninsko deformacijsko stanje sta podani glavni osni deformaciji $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ in $\epsilon_2 = -\epsilon_0$, kjer je ϵ_0 majhno pozitivno število. Določi osi x' in y' pri katerih je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$.

Rešitev: V koordinatnem sistemu z baznima vektorjema \vec{i} in \vec{j} v smeri koordinatnih osi x in y pripada deformaciji diagonalna matrika

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iščemo bazo \vec{i}' in \vec{j}' v kateri je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$. Naj bo $\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$. Potem je

$$0 = e'_{11} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_0 \cos 2\varphi.$$

Tako dobimo

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{3}$$

in

$$\varphi = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Rešitev je določena do predznaka, saj je \cos soda funkcija. Predznak določimo iz pogoja $e'_{12} > 0$. Velja

$$0 < e'_{12} = -\frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi = -\frac{3}{2}\epsilon_0 \sin 2\varphi$$

Funkcija $\sin 2\varphi$ je negativna za $2\varphi \in (\pi, 2\pi)$. Po drugi strani je $\cos 2\varphi < 0$ in zato $2\varphi \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Potemtakem je $2\varphi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ in

$$\varphi \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right). \quad (1)$$

Tako je

$$\varphi = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Določiti moramo še bazna vektorja \vec{i}' in \vec{j}' . V ta namen moramo prvo izračunati $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$. Izračunajmo

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = \frac{2}{3}.$$

Potem je zaradi (1)

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Iskana baza je

$$\vec{i}' = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{j} \quad \text{in} \quad \vec{j}' = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}.$$

3. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja \vec{i} je normalna napetost enaka σ_0 , v smeri vektorja \vec{j} , ki je pravokoten na \vec{i} pa je normalna napetost enaka $2\sigma_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika pripadajočega deformacijskega tenzorja v bazi \vec{i}, \vec{j} enaka

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi tudi napetostni tenzor.

Rešitev: Deformacijo in napetost povezuje posplošen Hookov zakon

$$\mathbf{t} = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{e} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{sl} \mathbf{e} \mathbf{i} = \frac{\epsilon_0 E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kjer je \mathbf{i} enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{i} \cdot \underline{\underline{t}} \vec{i} = \sigma_0$ in $\vec{j} \cdot \underline{\underline{t}} \vec{j} = 2\sigma_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0 E}{1 + \nu} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} &= \sigma_0, \\ \frac{3\epsilon_0 E}{1 + \nu} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} &= 2\sigma_0. \end{aligned}$$

Od druge enačbe odštejemo prvo. Tako dobimo

$$\frac{\epsilon_0 E}{1 + \nu} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (3)$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (4)$$

V drugi enačbi upoštevajmo prvo. Potem je

$$\frac{4\nu}{1 - 2\nu} = 1 \Rightarrow \nu = \frac{1}{6},$$

iz prve enačbe pa dobimo

$$E = \frac{7}{12} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Vstavimo (3) in (4) v (2). Potem po krajšem računu sledi

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je deformacija ravninska, napetost pa ne.

4. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja \vec{i} je osna deformacija enaka ϵ_0 , v smeri vektorja \vec{j} , ki je pravokoten na \vec{i} pa je osna deformacija enaka $-\frac{2}{3}\epsilon_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika napetostnega tenzorja v bazi \vec{i}, \vec{j} enaka

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi tudi deformacijski tenzor.

Rešitev: Deformacijo in napetost povezuje posplošen Hookov zakon

$$\mathbf{e} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{t} - \frac{\nu}{E} \text{sl} \mathbf{t} \mathbf{i} = \frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu\sigma_0}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Tu je \mathbf{i} enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{i} \cdot \underline{\underline{e}} \vec{i} = \epsilon_0$ in $\vec{j} \cdot \underline{\underline{e}} \vec{j} = -\frac{2}{3}\epsilon_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned} \frac{2(1 + \nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= \epsilon_0, \\ -\frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= -\frac{2}{3}\epsilon_0, \end{aligned}$$

Od prve enačbe odštejemo drugo. Tako dobimo

$$\frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} = \frac{5\epsilon_0}{9} \quad (6)$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{\nu\sigma_0}{E} = \frac{\epsilon_0}{9}. \quad (7)$$

Iz (6) potem sledi

$$E = \frac{9}{4} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$

iz (7) pa

$$\nu = \frac{1}{4}.$$

Sedaj izračunamo še deformacijski tenzor. Iz (5) sledi

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -5/9 & 0 \\ -5/9 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da tudi ravninsko napetostno stanje povzroči prostorsko deformacijo.