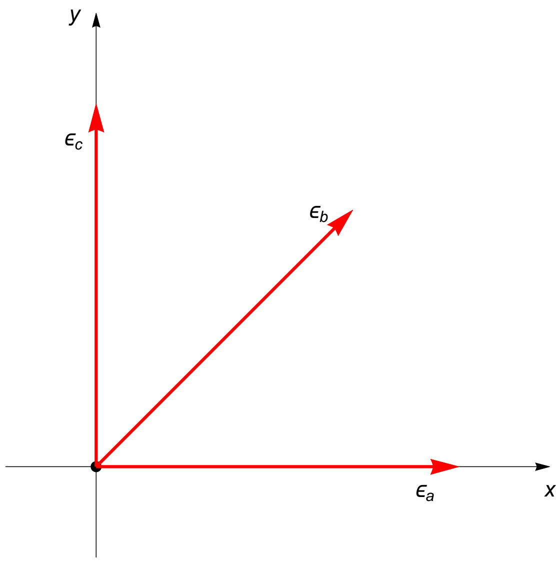
# Vaje 14. maja 2020

1. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ so znane osne deformacije $\epsilon_\mathrm{a} = \epsilon_0$, $\epsilon_\mathrm{b} = -\frac{3}{2}\epsilon_0$ in $\epsilon_\mathrm{c} = 2\epsilon_0$, kjer je $\epsilon_0 = 10^{-3}$.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Skiciraj Mohrovo krožnico in določi ekstremalne vrednosti in smeri deformacije.




**Rešitev:**

(a) Koordinatni sistem z osema $x$ in $y$ postavimo v smereh deformacije $\epsilon_\mathrm{a}$ in $\epsilon_\mathrm{c}$, glej skico. V tem koordinatnem sistemu pripada deformacijskemu tenzorju matrika

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_\mathrm{a} & e_{12} \\ e_{12} & \epsilon_\mathrm{c} \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še komponento $e_{12} = \epsilon_0 x$. Vemo, da je v smeri

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}),$$

ki oklepa kot $\varphi = \pi/4$ s smerjo $x$

$$\epsilon_\mathrm{b} = \vec{e} \cdot \mathbf{e}\,\vec{e} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\cos 2\varphi + e_{12}\sin 2\varphi.$$

Vstavimo v formulo naše podatke. Potem je

$$-\frac{3}{2}\epsilon_0 = \frac{3}{2}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\epsilon_0 \cos\frac{1}{2}\pi + x\epsilon_0 \sin\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\epsilon_0 + x\epsilon_0.$$

Potem je $x = -3$ in

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Po formuli sta ekstremalni osni deformaciji enaki

$$\epsilon_\mathrm{ext} = \frac{1}{2}\left(e_{11} + e_{22} \pm \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2}\right).$$

Izračunajmo prvo

$$\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} = \sqrt{37}\,\epsilon_0.$$

Potem je

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{37})\epsilon_0 \quad \text{in} \quad \epsilon_{\min} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{37})\epsilon_0.$$

Maksimalna osna deformacija nastopi v smeri

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2e_{12}}{e_{11}-e_{22}} + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases}$$

V našem primeru je $e_{11} < e_{22}$ in $e_{12} < 0$. Potem je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2}\arctan 6 + \frac{1}{2}\pi \approx 130.3^\circ.$$

Smer minimalne osne deformacije je

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} - \frac{1}{2}\pi \approx 40.3^\circ.$$

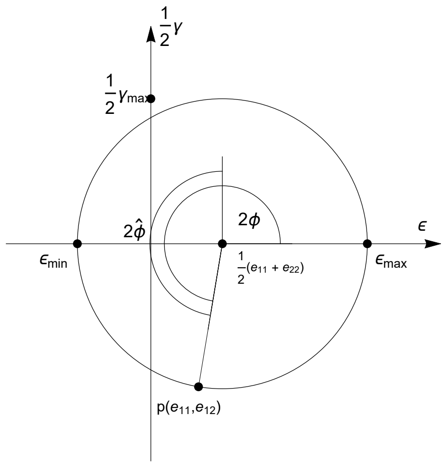
Tu smo upoštevali, da sta ekstremalni smeri med seboj pravokotni in tako lahko prištejemo ali odštejemo pravi kot, da pridemo do druge ekstremalne smeri. Maksimalna strižna deformacija oziroma sprememba kota je

$$\gamma_{\max} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min} = \sqrt{37}\,\epsilon_0$$

in nastopi v smeri

$$\hat{\varphi}_{\max} = \frac{1}{2}\arctan\frac{e_{22}-e_{11}}{2e_{12}} + \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\pi \approx 85.3^\circ.$$

Mohrova krožnica je na sliki 1




Slika 1: Mohrova krožnica.

2. Za ravninsko deformacijsko stanje sta podani glavni osni deformaciji $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ in $\epsilon_2 = -\epsilon_0$, kjer je $\epsilon_0$ majhno pozitivno števio. Določi osi $x'$ in $y'$ pri katerih je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$.

   **Rešitev:** V koordinatnem sistemu z baznima vektorjema $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$ v smeri koordinatnih osi $x$ in $y$ pripada deformaciji diagonalna matrika

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iščemo bazo $\vec{\imath}\,'$ in $\vec{\jmath}\,'$ v kateri je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$. Naj bo $\vec{\imath}\,' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$. Potem je

$$0 = e'_{11} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\cos 2\varphi + e_{12}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_0\cos 2\varphi.$$

Tako dobimo

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{3}$$

in

$$\varphi = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Rešitev je določena do predznaka, saj je cos soda funkcija. Predznak določimo iz pogoja $e'_{12} > 0$. Velja

$$0 < e'_{12} = -\frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\sin 2\varphi - e_{12}\cos 2\varphi = -\frac{3}{2}\epsilon_0\sin 2\varphi$$

Funkcija $\sin 2\varphi$ je negativna za $2\varphi \in (\pi, 2\pi)$. Po drugi strani je $\cos 2\varphi < 0$ in zato $2\varphi \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Potemtakem je $2\varphi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ in

$$\varphi \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi). \tag{1}$$

Tako je

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Določiti moramo še bazna vektorja $\vec{\imath}\,'$ in $\vec{\jmath}\,'$. V ta namen moramo prvo izračunati $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$. Izračunajmo

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = \frac{2}{3}.$$

Potem je zaradi (1)

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Iskana baza je

$$\vec{\imath}\,' = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\jmath} \quad \text{in} \quad \vec{\jmath}\,' = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath}.$$

3. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja $\vec{\imath}$ je normalna napetost enaka $\sigma_0$, v smeri vektorja $\vec{\jmath}$, ki je pravokoten na $\vec{\imath}$ pa je normalna napetost enaka $2\sigma_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika pripadajočega deformacijskega tenzorja v bazi $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ enaka

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi tudi napetostni tenzor.

**Rešitev:** Deformacijo in napetost povezuje posplošen Hookov zakon

$$\mathbf{t} = \frac{E}{1+\nu}\mathbf{e} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\mathrm{sl}\,\mathbf{e}\,\mathbf{i} = \frac{\epsilon_0 E}{1+\nu}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4\epsilon_0\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

kjer je $\mathbf{i}$ enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{\imath}\cdot\underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = \sigma_0$ in $\vec{\jmath}\cdot\underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath} = 2\sigma_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0 E}{1+\nu} + \frac{4\epsilon_0\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} &= \sigma_0,\\ \frac{3\epsilon_0 E}{1+\nu} + \frac{4\epsilon_0\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} &= 2\sigma_0.\end{aligned}$$

Od druge enačbe odštejemo prvo. Tako dobimo

$$\frac{\epsilon_0 E}{1+\nu} = \frac{\sigma_0}{2} \tag{3}$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{4\epsilon_0\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\sigma_0}{2}. \tag{4}$$

V drugi enačbi upoštevajmo prvo. Potem je

$$\frac{4\nu}{1-2\nu} = 1 \Rightarrow \nu = \frac{1}{6},$$

iz prve enačbe pa dobimo

$$E = \frac{7}{12}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Vstavimo (3) in (4) v (2). Potem po krajšem računu sledi

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je deformacija ravninska, napetost pa ne.

4. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja $\vec{\imath}$ je osna deformacija enaka $\epsilon_0$, v smeri vektorja $\vec{\jmath}$, ki je pravokoten na $\vec{\imath}$ pa je osna deformacija enaka $-\frac{2}{3}\epsilon_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika napetostnega tenzorja v bazi $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ enaka

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Določi tudi deformacijski tenzor.

**Rešitev:** Deformacijo in napetost povezuje posplošen Hookov zakon

$$\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{t} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}\,\mathbf{t}\,\mathbf{i} = \frac{(1+\nu)\sigma_0}{E}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{\nu\sigma_0}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Tu je $\mathbf{i}$ enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{\imath}\cdot\underline{\underline{e}}\,\vec{\imath} = \epsilon_0$ in $\vec{\jmath}\cdot\underline{\underline{e}}\,\vec{\jmath} = -\frac{2}{3}\epsilon_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned}\frac{2(1+\nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= \epsilon_0,\\ -\frac{(1+\nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= -\frac{2}{3}\epsilon_0,\end{aligned}$$

Od prve enačbe odštejemo drugo. Tako dobimo

$$\frac{(1+\nu)\sigma_0}{E} = \frac{5\epsilon_0}{9} \tag{6}$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{\nu\sigma_0}{E} = \frac{\epsilon_0}{9}. \tag{7}$$

Iz (6) potem sledi

$$E = \frac{9}{4}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$

iz (7) pa

$$\nu = \frac{1}{4}.$$

Sedaj izračunamo še deformacijski tenzor. Iz (5) sledi

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -5/9 & 0 \\ -5/9 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da tudi ravninsko napetostno stanje povzroči prostorsko deformacijo.