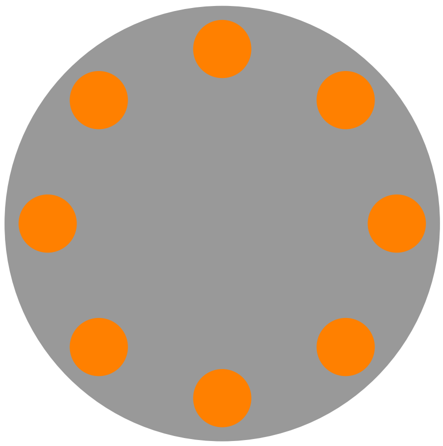
Vaje 15. april 2020

1. Odsekan stožec z višino h in polmerom a spodnje ter polmerom b zgornje ploskve je osno obremenjen v smeri osi stožca. Določi potek osne napetosti.

   Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri stožca z izhodiščem na spodnji osnovni ploskvi. Presek stožca z ravnino z normalo v smeri osi x je krog. Polmer kroga r se z x linearno spreminja od a pri $x = 0$ do b pri $x = h$. Potem je r funkcija spremenljivke x dana z
   $$r(x) = a + \frac{(b-a)x}{h}.$$
   Površina preseka je $A(x) = \pi r^2$. Označimo z $\sigma(x)$ napetost na preseku x. Posebej označimo $\sigma_0 = \sigma(x = 0)$ in $A_0 = A(x = 0)$. Ker je odsekan stožec v ravnovesju, velja
   $$A_0\sigma_0 = A(x)\sigma(x)$$
   za vsak $x \in [0, h]$. Potemtakem je
   $$\sigma(x) = \frac{A_0}{A(x)}\sigma_0 = \frac{a^2}{r(x)^2}\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\frac{x}{h}\right)^2}.$$
   V posebnem primeru $x = h$ je
   $$\sigma(x = h) = \frac{a^2}{b^2}\sigma_0.$$

2. Železobetonski steber s prečnim presekom na sliki ima volumensko razmerje beton : železo 6 : 1. Pripadajoče razmerje Youngovih modulov je 1 : 9. Steber je osno obremenjen s silo F. Določi v kakšnem razmerju je obremenitev betona in železa.

   Prečni presek železobetonskega stebra.

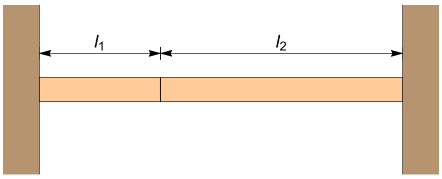
   Rešitev: Označimo z A_1 in E_1 presek in Youngov modul betona ter z A_2 in E_2 presek in Youngov modul železa. Osno silo stebra F zapišimo kot vsoto $F = F_1 + F_2$, kjer sta F_1 in F_2 osni sili betona oziroma železa. Potem je
   $$F_1 = A_1\sigma_1 = A_1E_1\sigma_1$$
   in
   $$F_2 = A_2\sigma_2 = A_2E_2\sigma_2.$$
   Potem je
   $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1E_1}{A_2E_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$
   Tu smo upoštevali, da je $A_1/A_2 = 6$ in $E_1/E_2 = 1/9$. Betonski del stebra nosi 2/3 obremenitve.

3. Med dve togi steni je vstavljena kompozitna palica. Levi del palice z dolžino l_1 ima Youngov modul E_1 in koeficient termalnega raztezka α_1, desni dolžine l_1 pa E_2 in α_2. Palico segrejemo za ΔT.

   (a) Izračunaj termalno naletost v palici.

   (b) Izračunaj deformaciji palic.

   (c) Za koliko se sprementa dolžini l_1 in l_2.



Kompozitna palica.

Rešitev:

(a) Označimo z ϵ_1 in ϵ_2 deformaciji levega in desnega dela palice. Ker je palica vpeta med dve togi steni, je $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Deformacija ϵ_i, $i = 1, 2$ je vsota termalne ϵ_i^{T} in elastične deformacije ϵ_i^{E}. Velja torej $\epsilon_i = \epsilon_i^{\mathrm{T}} + \epsilon_i^{\mathrm{E}}$. Potemtakem je

$$\epsilon_1^{\mathrm{T}} + \epsilon_1^{\mathrm{E}} + \epsilon_2^{\mathrm{T}} + \epsilon_2^{\mathrm{E}} = 0.$$

Uporabimo sedaj konstitutivni zvezi

$$\epsilon_i^{\mathrm{T}} = \alpha_1 \Delta T \quad \text{in} \quad \epsilon_i^{\mathrm{E}} = \frac{\sigma_i}{E_i}.$$

Nadalje je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ saj imata oba dela palice enak presek. Z upoštevanjem konstitutivne zveze dobimo

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T + \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma = 0.$$

Termalna napetost je tako

$$\sigma = -\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T.$$

(b) Deformacija levega dela palice je

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\mathrm{T}} + \epsilon_1^{\mathrm{E}} = \alpha_1 \Delta T + \frac{\sigma}{E_1} = \left(\alpha_1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right)\Delta T.$$

Podobno dobimo

$$\epsilon_2 = \left(\alpha_2 - \frac{E_1}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right)\Delta T.$$

(c) Sprememba dolžine palice je $\Delta l_i = \epsilon_i l_i$. Potem je z upoštevanjem zgornjih formul

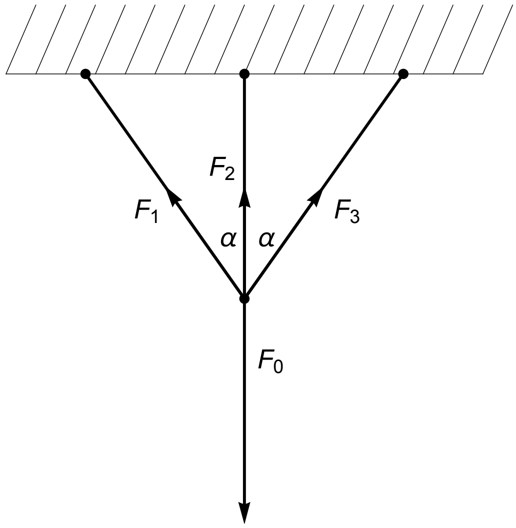
$$\Delta l_1 = \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} l_1 \Delta T$$

in

$$\Delta l_2 = \frac{\alpha_2 E_2 - \alpha_1 E_1}{E_1 + E_2} l_2 \Delta T.$$

Če je $\alpha_1 E_1 = \alpha_2 E_2$ se dolžini delov palic ne spremenita, če pa ne velja enakost, se en del palice podaljša na račun druge, ki se skrajša.

4. Paličje na sliki je sestavljeno iz treh elastičnih palic. Vse tri imajo enak presek A in Youngov modul E. Kot α je $\pi/4$, srednja palica pa ima dolžino 1 m. Palice so pritrjene členkasto na stropu in so v spodnjem členku obremenjene s silo $F_0 = 15\,\mathrm{kN}$. Določi sile v palicah in izračunaj pomik spodnjega členka.



Rešitev: Sistem treh neznanih sil ima skupno prijemališče, zato je naloga statično nedoločena. Za določitev sil palic moramo upoštevati osne deformacije palic. Zaradi simetrije je $F_1 = F_3$. Ravnovesna enačba sil v navpični smeri je

$$2F_1 \cos\alpha + F_2 = F_0.$$

Po Hookovem zakonu je

$$F_1 = AE\frac{\Delta l_1}{l_1}, \qquad F_2 = AE\frac{\Delta l_2}{l_2},$$

kjer sta l_1 in l_2 dolžini leve in sredinske palice, Δl_1 in Δl_2 pa njuna osna pomika. Pri obtežitvi se paličje raztegne v navpični smeri. Po deformaciji velja

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = d^2 + (l_2 + \Delta l_2)^2.$$

Tu je d razdalja med pritrdiščema palic na stropu. Ker je $l_1^2 = d^2 + l_2^2$, sledi da je

$$2l_1\Delta l_1 + (\Delta l_1)^2 = 2l_2\Delta l_2 + (\Delta l_2)^2.$$

Pri predpostavki majhnih deformacij pri kateri velja Hookov zakon smemo zanemariti člena $(\Delta l_1)^2$ in $(\Delta l_2)^2$. Tako dobimo

$$l_1\Delta l_1 = l_2\Delta l_2.$$

oziroma $\Delta l_1 = \Delta l_2 l_2/l_1$. Ravnovesna enačbe se potem glasi

$$F_0 = \frac{2AE\Delta l_2 l_2 \cos\alpha}{l_1^2} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2} = \frac{2AE\Delta l_2 l_2^2}{l_1^3} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2}.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $\cos\alpha = l_2/l_1$. Rešitev enačbe je

$$\Delta l_2 = \frac{F_0 l_1^3 l_2}{AE\,(l_1^3 + 2l_2^3)}.$$

Sili sta potem

$$F_1 = \frac{F_0 l_1 l_2^2}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0\cos^2(\alpha)}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 15(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN},$$
$$F_2 = \frac{F_0 l_1^3}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 30(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN}.$$