Vaje 19. marca 2020

1. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), (P_4, \vec{F}_4)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (0, 2a)$, $P_2 = (a, -2a)$, $P_3 = (2a, -a)$, $P_4 = (-2a, -2a)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = F_0(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_3 = 2F_0\vec{\imath}$, $\vec{F}_4 = F_0(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev:

   (a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = F_0(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath})$.

   (b) Izračunajmo

   $$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{4} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 4aF_0\vec{k} + 4aF_0\vec{k} + 2aF_0\vec{k} + 0aF_0\vec{k} = 10aF_0\vec{k}.$$

   (c) Invarianta sistema sil je enaka nič, ker je sistem ravninski. Ker je rezultanta sil različna od nič, sistem sil ni dvojica in ima skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.

   (d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

   $$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = \frac{5a}{13}(-5\vec{\imath} - \vec{\jmath}).$$

2. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{F}_3 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 0, 1)$, $P_3(1, -1, 0)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev:

   (a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

   (b) Izračunajmo

   $$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}) + (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

   (c) Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = 0$. Ker je $I(\mathcal{F}) = 0$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, ima sistem sil skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.

(d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}.$$

Kratek račun

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$$

potrdi, da je P_0 res skupno prijemališče sil.

3. Podan je sistem sil $\vec{F}_1 = F_0(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F}_2 = F_0(-3\vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F}_3 = F_0(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(a, 0, a)$, $P_2(2a, 2a, -2a)$, $P_3(-a, 0, 0)$. Dodaj sistemu silo $(P_4, \vec{F}_4)$ tako, da razširjeni sistem sil imel skupno prijemališče v točki $P_0(a, -a, a)$.

Rešitev: Računali bomo brezdimenzijsko, z $a = 1$ in $F_0 = 1$. Za vrnitev v dimenzijski zapis, sile pomnožimo z F_0, položaje z a, navore pa z aF_0. Označimo dani sistem sil s $\mathcal{F}$ in izračunajmo $\vec{N} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$. Imamo

$$\vec{N} = \Big((\vec{\imath} - 3\vec{k}) + (-6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (-4\vec{\jmath} - 4\vec{k})\Big) = (-5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 10\vec{k}).$$

Sistemu sil moramo dodati $(P_4, \vec{F}_4)$ tako, da bo $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$, saj bo potem za razširjeni sistem sil $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{(P_4, \vec{F}_4)\}$ veljalo $\vec{N}(\mathcal{G}, P_0) = \vec{0}$.

Enačba $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$ ima več rešitev. Izberimo P_4 in $\vec{F}_4$ tako, da bodo vektorji $\overrightarrow{P_0P_4}$, $\vec{F}_4$ in $\vec{N}$ med seboj paroma pravokotni. Izberimo prvo $\overrightarrow{P_0P_4} = (3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + x\vec{k})$ in določimo x tako, da bo

$$0 = \overrightarrow{P_0P_4} \cdot \vec{N} = -20 - 10x.$$

Rešitev enačbe je $x = -2$ in tako $\overrightarrow{P_0P_4} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Sila $\vec{F}_4$ je v smeri $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}$. Potem

$$\vec{F}_4 = f\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N} = 10f\left(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}\right),$$

kjer je f neznanka, ki jo določimo s pogoja

$$-\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = f\overrightarrow{P_0P_4} \times \left(\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}\right) = -f\left|\overrightarrow{P_0P_4}\right|^2 \vec{N} = -14f\vec{N}.$$

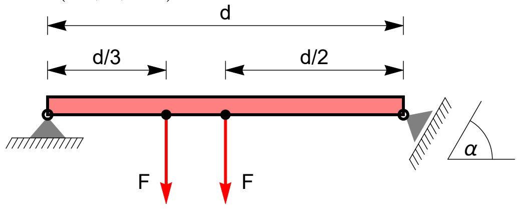
Torej $f = 1/14$. Tu smo uporabili formulo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ in upoštevali, da sta $\overrightarrow{P_0P_4}$ in $\vec{N}$ med seboj pravokotna. Dodana sila je tako

$$\frac{5F_0}{7}\left(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}\right)$$

s prijemališčem v

$$P_4 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_4} = (4a, 0, -a).$$

4. Nosilec dolžine d je podprt tako kot kaže skica. Leva podpora je nepomična, desna pa je drsna v smeri ki oklepa kot $\alpha = \pi/3$. Za dano obremenitev določi sile v podporah.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori in usmerimo os x v smeri nosilca, os y pa navpično navzgor. Silo leve podpore označimo z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne podpore pa z $\vec{B}$. Ker je desna podpora drsna, je smer sile $\vec{B}$ določena, neznana je samo njena velikost. Sila $\vec{B}$ oklepa z navpičnico kot α. Potem je $\vec{B} = B(-\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath})$. Nosilec je obremenjen v točkah $P_1(d/3, 0)$ in $P_2(d/2, 0)$.

Sile podpor določimo iz ravnovesnih enačb. Rezultanta navorov sistema sil s polom v desni podpori je enak nič. Velja torej

$$-dA_2 + \frac{d}{2}F + \frac{2d}{3}F = 0.$$

Od tod sledi $A_2 = \frac{7}{6}F$. Rezultanta navorov s polom v levi podpori je prav tako enaka nič. Potem

$$-\frac{d}{3}F - \frac{d}{2}F + B\cos\alpha = 0.$$

Rešitev je

$$B = \frac{5F}{6\cos\alpha} = \frac{5F}{3}.$$

Komponento A_1 določimo iz ravnovesnega pogoja, da je vsota vseh sil v vodoravni smeri enaka nič.

$$A_1 - B\sin\alpha = 0 \Longrightarrow A_1 = B\sin\alpha = \frac{5F}{6}\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{6}F.$$

Za kontrolo lahko še preverimo, da je tudi vsota sil v navpični smeri enaka nič. Res,

$$A_2 - F - F + B\cos\alpha = \frac{7}{6}F - 2F + \frac{5F}{6} = 0.$$