Vaje 21. maja 2020

1. V zaprto togo kotanjo v obliki kocke dimenzije $a \times a \times a$ vložimo elastično kocko enakih dimenzij. Kocko segrejemo za ΔT. Določi napetost v kocki. Pri tem upoštevaj, da je kotanja odprta.

   Rešitev: Celotna deformacija je vsota termalne in elastične, velja torej

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_E + \underline{\underline{\epsilon}}_T.$$

   Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh stranic kocke, z osjo z v smeri odprtine kotaje. Ker je kocka vložena v togo kotanjo, ki je odprta so vse komponente deformacijskega tenzorja $\underline{\underline{e}}$ enake nč, razen komponente e_{33}. Potem je

   $$e_{12}^E = e_{13}^E = e_{23}^E = 0 \quad \text{in} \quad e_{11}^E = e_{22}^E = -\alpha \Delta T.$$

   Komponente e_{33}^E torej ne poznamo. Zato pa poznamo napetost na zgornji ploskvi kocke. Ta napetost je enaka nič, ker kotanja ni zaprta in je ta ploskev prosta. Uporabimo sedaj Hookov zakon

   $$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{sl} \underline{\underline{\epsilon}}\, \underline{\underline{i}}.$$

   za komponento t_{33}. Velja

   $$0 = t_{33} = \frac{E}{1+\nu} e_{33}^E + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11}^E + e_{22}^E + e_{33}^E).$$

   Potem je

   $$\frac{2\alpha\nu\Delta T}{1-2\nu} = \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) e_{33}^E = \frac{1-\nu}{1-2\nu} e_{33}^E.$$

   Potem je

   $$e_{33}^E = \frac{2\alpha\nu}{1-\nu}\Delta T.$$

   Sedaj poznamo vse komponente elastične deformacije in lahko izračunamo napetost po Hookovem zakonu. Prvo izračunajmo sled

   $$\operatorname{sl} \underline{\underline{\epsilon}} = e_{11}^E + e_{22}^E + e_{33}^E = 2\alpha \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta T.$$

   Potem po krajšem računu dobimo

   $$t_{11} = t_{22} = -\frac{\alpha E \Delta T}{1-\nu}.$$

   Ker so vse ostale komponente napetostnega tenzorja enake nič je s tem napetost določena.

2. Votli enostavno podprt nosilec dolžine 2 m s tankostenskim kvadratnim presekom $a = 4\,\mathrm{cm}$ in debelino $t = 4\,\mathrm{mm}$ je enakomerno linijsko obremenjen z gostoto q_0. Določi q_0 obremenitve, da bo napetost po velikosti manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

   Rešitev: Upogibni moment enakomerne linijske obremenitve je paraboličen z maksimumom na sredini nosilca z vrednostjo $M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{8}$. Osna napetost v nosilcu je dana s formulo

   $$\sigma = \frac{M}{I} z.$$

Veljati mora

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max} \leq \sigma_0,$$

kjer je $z_{\max}$ maksimalna z koordinata na preseku, torej $z_{\max} = \frac{1}{2}a$. Izračunati moramo še ploskovni moment I.

Formulo

$$I = \frac{tb^2}{12}(b + 3a)$$

za ploskovni moment votlega kvadratnega preseka z debelino t poznamo s predavanj. V formulo vstavimo $b = a$. Tako dobimo

$$I = \frac{ta^3}{3}.$$

Potem je

$$q_0 = \frac{16ta^2\sigma_0}{3l^2}.$$

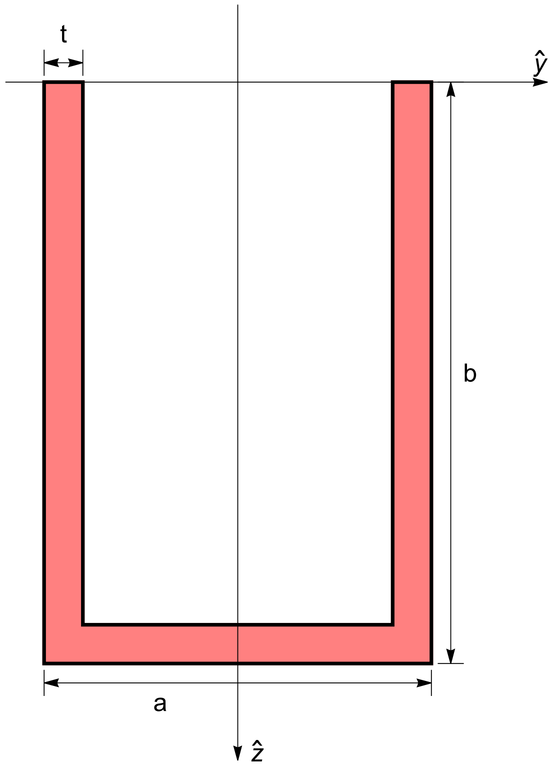
Za dane vrednosti potem mora veljati

$$q_0 \leq 1024\,\mathrm{N/m} = 1.024\,\mathrm{kN/m}.$$

3. Za presek v obliki črke U na sliki izračunaj ploskovni moment. Račun naredi za $b = \frac{3a}{2}$ in $t = \frac{a}{10}$.

Rešitev: Na U presek lahko gledamo kot na unijo treh pravokotnikov ali kot na pravokotni izrez iz pravokotnika. Izbrali bomo drugo možnost. Nalogo bomo rešili v treh korakih. Prvo bomo poiskali središče U preseka, nato bomo zapisali ploskovni moment za oba pravokotnika v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v središču U preseka. Na tretjem korakau bomo ta dva momenta odšteli.

Poiščmo torej prvo središče U preseka. V ta namen postavimo pomožni koordinatni sistem $\hat{y}\hat{z}$ tako kot kaže slika. Izrezan pravokotnik označimo z A_1, njgovo središče pa z $\hat{z}_1^*$. Podobno označimo za zunanji pravokotnik A_2 in $\hat{z}_2^*$. Potem je



$$|A_1| = (a - 2t)(b - t) = \frac{28a^2}{25} = 1.12a^2,$$
$$|A_2| = ab = \frac{3a^2}{2} = \frac{28a^2}{25} = 1.52a^2,$$
$$\hat{z}_1^* = \frac{1}{2}(b - t) = 0.7a,$$
$$\hat{z}_2^* = \frac{1}{2}b = \frac{3a}{4} = 0.75a$$

in

$$\hat{z}_0 = \frac{1}{-|A_1| + |A_2|}(-\hat{z}_1^* |A_1| + \hat{z}_2^* |A_2|) = 0.8973a.$$

Sedaj postavimo koordinatni sistem yz, ki ima izhodišče v $\hat{z}_0$. V tem koordinatnem sistemu imata pravokotnika središči v točkah

$$z_1^* = \hat{z}_1^* - z_0 = -0.1974a \quad \text{in} \quad z_2^* = \hat{z}_2^* - z_0 = -0.1474a.$$

Ploskovna momenta sta

$$I_1 = \frac{(a-2t)(b-t)^3}{12} + |A_1|(z_1^*)^2 = 0.2266a^4,$$
$$I_2 = \frac{ab^3}{12} + |A_2|(z_2^*)^2 = 0.3138a^4.$$

Ploskovni moment U preseka je potem

$$I = I_2 - I_1 = 0.0873a^4.$$