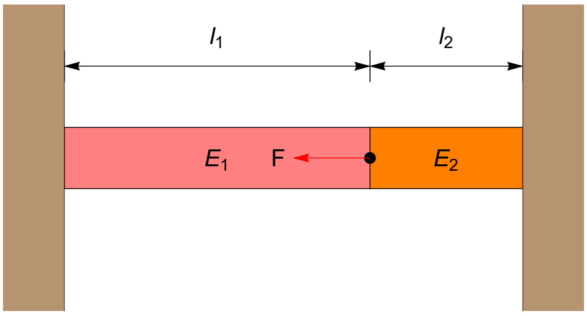
Vaje 23. april 2020

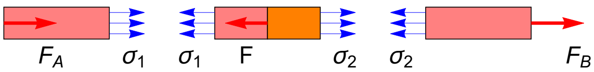
1. Med dvema togima stenam je vstavljena kompozitna palica, glej sliko 1. Palica je na oba stika s steno prilepljena. Določi sili palice na steno, če je palica na stiku med materialoma obremenjena s silo F.



Slika 1: Kompozitna palica med stenama.

Rešitev: Palica je enoosno obremenjena. Postavimo os x v smer osi palice. Silo stene na levem krajišču označimo z $\vec{F}_A = F_A\vec{\imath}$, na desnem pa z $\vec{F}_B = F_B\vec{\imath}$. Presek palice je konstanten. Označimo ga z A. Palico navidezno prerežemo z dvema prerezoma, enim levo in drugim desno od materialnega stika. Osno napetost na levem delu označimo z σ_1, na desnem pa z σ_2. Vsak odrezani del je v ravnovesju, glej sliko 2. Pripadajočde ravnovesne enačbe so

$$F_A + \sigma_1 A = 0, \qquad -\sigma_1 A - F + \sigma_2 A = 0, \qquad -\sigma_2 A + F_B = 0.$$



Slika 2: Odrezani deli kompozitne palice.

Zapisali smo tri enačbe za štiri neznanke. Manjka še ena enačba. To dobimo iz pogoja, da je palica med togima stenama. Označimo s Δl_1 spremembo dolžine prve palice in z Δl_2 spremembo dolžine druge palice. Ker, sta palici med togima stenama je $\Delta l_1 + \Delta_2 = 0$. Nadalje je $\Delta l_i = \epsilon_i l_i = \sigma_i l_i / E_i$, $i = 1, 2$. Tako dobimo enačbo

$$l_1 \frac{\sigma_1}{E_1} + l_2 \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.$$

Od tod sledi

$$\sigma_2 = -\frac{l_1 E_2}{l_2 E_1} \sigma_1.$$

Vstavimo σ_2 v ravnovesno enačbo za srednji del. Potem

$$\sigma_1 \left(1 + \frac{l_1 E_2}{l_2 E_1}\right) A = -F$$

in

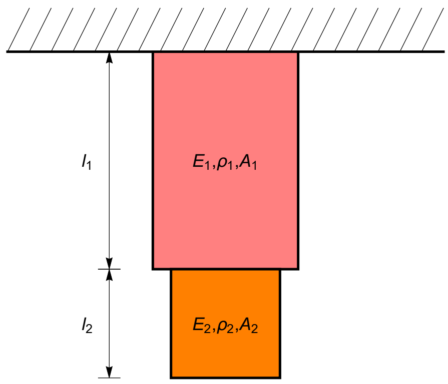
$$\sigma_1 = -\frac{F}{A}\frac{l_2E_1}{l_1E_2+l_2E_1}, \qquad \sigma_2 = \frac{F}{A}\frac{l_1E_2}{l_1E_2+l_2E_1}.$$

Po pričakovanju je napetost v levi palici kompresibilna, v desni pa natezna, saj je palica prilepljena na steno. Iskani sili sta

$$F_A = -\sigma_1 A = \frac{l_2E_1}{l_1E_2+l_2E_1}F, \qquad F_B = \sigma_2 A = \frac{l_1E_2}{l_1E_2+l_2E_1}F.$$

2. S stropa visi kompozitna palica tako kot kaže skica. Določi razteg palice zaradi lastne teže.

   Rešitev: Velja opozoriti, da v bližini materialnega stika napetost ni enoosna, je pa enosna v dovolj veliki oddaljenosti. Odstopanje je odvisno od razmerja med površinama presekov. Nalogo bomo rešili s predpostavko, da to odstopanje od enoosne napetosti nima pomembnejšega vpliva na rešitev.
   Nalogo bomo rešili na dva načina. Pri prvem bomo uporabili znan rezultat s predavanja, pri drugem pa bomo rešili ravnovesni enačbi za kompozitno palico.



Viseča kompozitna palica.

- Poglejmo prvo rešitev. S predavanj vemo, da se palica zaradi lastne teže raztegne za

$$\Delta l = \frac{mgl}{2AE}.$$

  Vemo tudi, da sila F na koncu palice palico raztegne za

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE}.$$

  Uporabimo to za razteg prve palice na katero deluje na njenem koncu teža druge palce. Tako dobimo

$$\Delta l_1 = \frac{m_1gl_1}{2A_1E_1} + \frac{m_2gl_1}{A_1E_1} = \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)\frac{gl_1}{A_1E_1}.$$

  Razteg druge palice zaradi lastne teže je $\frac{m_2gl_2}{2A_2E_2}$. Tako je razteg palice

$$\Delta L = \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)\frac{gl_1}{A_1E_1} + \frac{m_2gl_2}{2A_2E_2}.$$

- Rešimo sedaj nalogo še na drugi način. Označimo z u_1 pomik prve palice in z u_2 pomik druge palice. Ravnovesna enačba za prvo palico je

$$A_1E_1\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2} + \rho_1gA_1 = 0,$$

  za drugo pa

$$A_2E_2\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}x^2} + \rho_2gA_2 = 0.$$

Obakrat smo upoštevali, da je osna togost A_iE_i konstantna na vsakem delu palice posebej. Rešitev prve enačbe je

$$u_1 = -\frac{\rho_1 g}{2E_1}x^2 + C_1 x,$$

druge enačbe pa

$$u_2 = -\frac{\rho_2 g}{2E_2}(x - l_1)^2 + C_2(x - l_1) + C_3.$$

Pri prvi rešitvi smo že upoštevali, da je $u_1(x = 0) = 0$, pri drugi pa smo za neodvisno spremenljivko raje uporabili $(x - l_1)$ namesto x, saj bomo tako lažje zapisali robne pogoje.
Določiti moramo tri konstante. Pogoji, ki jih določajo so

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \qquad A_1\sigma_1(x = 0) = (m_1 + m_2)g, \qquad \sigma_2(l_1 + l_2) = 0.$$

Prva enačba pravi, da je pomik zvezen, druga da pritrdišče palice nosi celotno težo palice, tretji pa je pogoj, da je konec palice prost. Pri zapisu prve in tretje enačbe pride do izraza, zakaj smo izbarali spremenljivko $x-l_1$. Enako rešitev dobimo, to naj vsak preveri sam, če namesto drugega pogoja uporabimo ranovesni pogoj $A_1\sigma_1(l_1) = A_2\sigma_2(l_1)$. Prva enačba se glasi

$$C_3 = -\frac{\rho_1 g}{2E_1}l_1^2 + C_1 l_1.$$

Druga enačba je

$$A_1E_1C_1 = (m_1 + m_2)g.$$

Tretja enačba pa je

$$-\frac{\rho_2 g}{E_2}l_2 + C_2 = 0.$$

Rešitev sistema enačb za konstante C_1, C_2 in C_3 je

$$C_1 = \frac{1}{A_1E_1}(m_1 + m_2)g, \qquad C_2 = \frac{\rho_2 g}{E_2}l_2, \qquad C_3 = (\frac{1}{2}m_1 + m_2)\frac{gl_1}{A_1E_1}.$$

Razteg palice je tako

$$\Delta L = u_2(l_1 + l_2) = -\frac{\rho_2 g}{2E_2}l_2^2 + C_2 l_2 + C_3 = \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)\frac{gl_1}{A_1E_1} + \frac{m_2 g l_2}{2A_2E_2}.$$

Dobili smo enako rešitev kot po prvi poti.

3. V izbranem kartezičnem koordinatnem sistemu napetostnemu tenzorju pripada matrika

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunaj normalno in strižno napetost za ravnino xy.

(b) Izračunaj normalno in strižno napetost za ravnino z normalo v smeri vektorja $\vec{j} + \vec{k}$.

Rešitev:

(a) Normala na ravnino je $\vec{k} = (0,0,1)^T$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Normalna napetost je

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Potem je vektor normalne napetosti ničelen in vektor strižne napetosti je kar vektor napetsoti $\vec{t}_s = \vec{t}$. Strižna napetost je tako

$$t_s = \left|\vec{t}_s\right| = \left|\vec{t}\right| = |\sigma_0| \sqrt{1+\alpha^2}.$$

(b) Normala je v smeri vektorja $\vec{\jmath} + \vec{k}$. Vendar to ni normala, ker vektor ni normiran. Pripadajoči normiran vektor je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$. Potem je vektor napetosti

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_0 \vec{n}.$$

Vektor $\vec{n}$ je lastni vektor napetostnega tenzorja. Normalna napetost je očitno σ_0. Ker je vektor normalne napetosti v smeri vektorja napetosti je strižna napetost enaka nič.