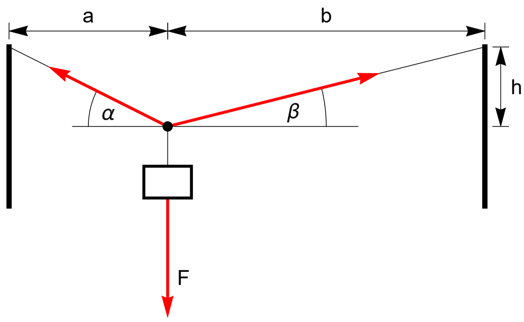
Vaje 26. marca 2020

1. Na žico med dvema stebroma je obešena utež tako kot kaže skica. Določi sili žic.



Rešitev: Silo leve žice označimo z F_1, desno z F_2. Sistem sil F, F_1 in F_2 ima skupno prijemališče v točki obremenitve. Ravnovesna enačba je ravnovesje sil $\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Potem je po komponentah

$$F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta, \qquad F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = F.$$

Tu sta α in β kota, ki ju žici oklepata z vodoravno smerjo. Potem je $F_2 = F_1 \cos\alpha / \cos\beta$ in

$$F = F_1 (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta / \cos\beta) = F_1 \sin(\alpha + \beta)/\cos\beta.$$

Sili žic sta tako

$$F_1 = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Če upoštevamo, da je

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \sin\beta = \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}},$$

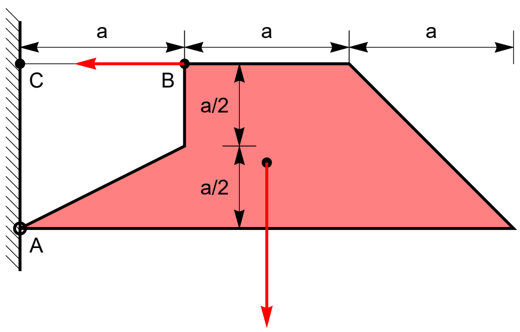
dobimo

$$F_1 = \frac{bF\sqrt{a^2+h^2}}{ah+bh}, \qquad F_2 = \frac{aF\sqrt{b^2+h^2}}{ah+bh}.$$

2. Homogena plošča s površinsko gostoto ρ, glej skico, je v točki A vpeta na steno s tečajem A, v točki B pa je pripeta z vodoravno vrvico BC.

   (a) Izračunaj koordinati masnega središča plošče.

   (b) Določi silo podpore v A in silo vrvice BC.



Rešitev: Postavimo izhodišče koordinatnega sistemav točko A. Plošča je sestavljena iz treh likov, levi trikotnik, kvadrat in desni trikotnik. Za izračun masnega središča sestavimo tabelo:

Lik	x_*	y_*	A
Levi trikotnik	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{4}a^2$
Kvadrat	$\frac{3}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2
Desni trikotnik	$\frac{7}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}a^2$

Ploščina lika je $\frac{7}{4}a^2$, koordinati masnega središča pa sta

$$x_* = \frac{4}{7a^2}\left(\frac{2}{3}a\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}aa^2 + \frac{7}{3}a\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{34}{21}a$$

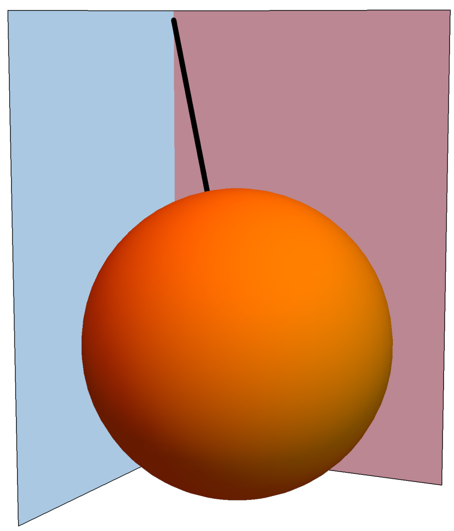
in

$$y_* = \frac{4}{7a^2}\left(\frac{1}{6}a\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}aa^2 + \frac{1}{3}a\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{17}{42}a.$$

Določimo sedaj iskane sile. Označimo z A_x in A_y komponenti sile podpore v A v smeri osi x in y, z F pa silo vrvice. Sila teže je $F_g = mg = \rho A g = \frac{7}{4}\rho a^2 g$, kjer je ρ ploščinska gostota. Para sil $\{A_x\vec{\imath}, -F\vec{\imath}\}$ in $\{A_y\vec{\jmath}, -F_g\vec{\jmath}\}$ sta dvojici. Potem je $A_x = F$, $A_y = F_g$. Nadalje iz ravnovesja navora v točki A sledi $aF - x_*F_g = 0$. Potem $F = \frac{17}{6}\rho g a^2$ in tako

$$A_x = \frac{17}{6}\rho g a^2, \qquad A_y = \frac{7}{4}\rho a^2 g.$$

3. Homogena krogla s polmerom a in z maso m visi pripeta na vrvico dolžine l v vogalu med dvema pravokotnima stenama tako kot kaže skica. Določi silo vrvice.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo z navpično navzdol v smeri sile teže, osi x in y pa v smeri sten. Na kroglo deluje sila teža $\vec{F}$, sila vrvice $\vec{S}$ in sili sten $\vec{A}_1$ in $\vec{A}_2$. Sili sten sta pravokotni na steni. Očitno ima ta sistem sil skupno prijemališče, ki je v središču krogle. Ravnovesni pogoj iz katerega bomo določili silo vrvice je pogoj, da je vsota vseh sil enaka nič. Koordinatni zapis sil je $\vec{F} = mg\vec{k}$, $\vec{A}_1 = A_1\vec{\jmath}$, $\vec{A}_2 = A_2\vec{\imath}$. Zapisati moramo še silo vrvice.

Ta je v smeri od središča krogle $P_0(a, a, \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2})$ do koordinatnega izhodišča O, kjer je vrvica pripeta v vogal. Pri določitvi središča krogle smo upštevali, da je razdalja od središča krogle do O enaka $l + a$. Sila vrvice je potem enaka

$$\vec{S} = -\frac{S}{l+a}(a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}\,\vec{k}).$$

Iz pogoja $\vec{F}+\vec{S}+\vec{A}_1+\vec{A}_2=\vec{0}$ dobimo sistem

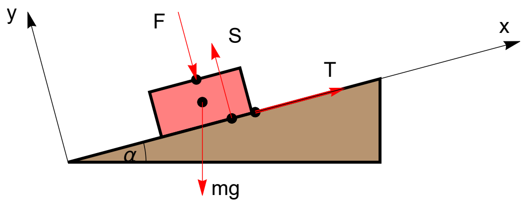
$$\begin{aligned} A_2 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ A_1 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ mg - \frac{S}{l+a}\sqrt{(l+a)^2-2a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$S = mg\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2-2a^2}}, \qquad A_1 = A_2 = mg\frac{a}{\sqrt{(l+a)^2-2a^2}}.$$

Vidimo, krajša je vrvica, večje so sile. V limiti $l \to a(\sqrt{2}-1)$ gredo sile čez vse meje.

4. Na klancu z naklonskim kotom α leži klada z maso m, glej sliko. Določi velikost sile $\vec{F}$, da klada ne zdrsne. Koeficient tenja med klado in klancem je k.



Rešitev: Ker je tendenca gibanja klade navzdol, kaže sila $\vec{T}$ navzgor. Ravnovesna enačba je

$$\vec{F}+\vec{T}+\vec{S}+m\vec{g}=\vec{0}.$$

Enačbe za ravnovesje momenta ne upoštevamo, saj ni znano prijemališče normalne sile podlage $\vec{S}$. V koordinatnem sistemu na sliki je $\vec{F}=-F\vec{\jmath}$, $\vec{T}=T\vec{\imath}$, $\vec{S}=S\vec{\jmath}$ in $m\vec{g}=mg(-\sin\alpha\vec{\imath}-\cos\alpha\vec{\jmath})$. Po komponentah je potem

$$-mg\sin\alpha+T=0, \qquad -mg\cos\alpha-F+S=0.$$

Potem je

$$S=F+mg\cos\alpha, \qquad T=mg\sin\alpha.$$

Klada ne zdrsne, če velja

$$T \le kS,$$

saj je največja tangentna sila, ki jo lahko prenese podlaga enaka kS. Če smo natančni, je tu k koeficient oprijemalnega trenja oziroma koeficient lepenja. Vendar, je med koeficientom trenja in koeficientom lepenja tako majhna razlika, da med njima ne delamo razlike. Iz zgornje neenakosti sledi

$$mg\sin\alpha \le k(F+mg\cos\alpha)$$

in od tod

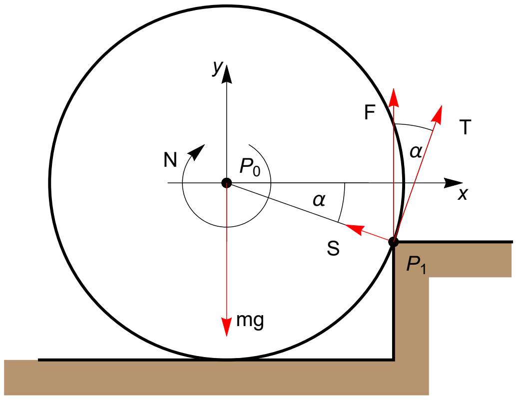
$$mg\left(\frac{1}{k}\sin\alpha-\cos\alpha\right) \le F.$$

Koeficient trenja izrazimo s tornim kotom $k=\tan\alpha_0$. Potem po krajšem računu, tu uporabimo adicijski izrek za sin sledi

$$mg\frac{\sin(\alpha-\alpha_0)}{\sin\alpha_0} < F.$$

Če je $\alpha_0>\alpha$, za ravnovesje ni potrebna sila F, za $\alpha_0<\alpha$ pa moramo klado pritiskati ob strmino, da ne zdrsne. Če ni trenja, klada zdrsne ne glede na silo F.

5. Kolo s polmerom r_0 spelje čez robnik višine h, gkej skico. Določi potrebni navor na kolo. Določi dopustno višino robnika, da se kolo ne zavrti v prazno, če je koeficient trenja med kolesom in robnikom k.



Rešitev: Na kolo deluje sila teže $m\vec{g}$, sila robnika $\vec{F}$ s prijemališčem na robniku vP_1 in navor $\vec{N}$. Iz enačbe $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$ sledi, da je $\vec{F} = -m\vec{g}$. Par $\vec{F}$ in $m\vec{g}$ je torej dvojica, ki uravnoveša navor $\vec{N} = N\vec{k}$. Potem je $N = r_0 mg \cos\alpha$ iskani navor. Upoštevajmo še, da je $\sin\alpha = (r_0 - h)/r_0$.

$$N = mg\sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}.$$

Določiti moramo še pogoj, da kolo ne zdrsne. Velikost projekcije sile $\vec{F}$ na obodno smer je T, na normalno pa S. Tako je $T = mg\cos\alpha$ in $S = mg\sin\alpha$. Pogoj, da kolo ne zdrsne je $T \leq kS$. Veljati torej mora $\cos\alpha \leq k\sin\alpha$. Če zapišemo k s tornim kotom $k = \tan\alpha_0$, se pogoj glasi

$$\tan\alpha_0 \geq \cot\alpha = \frac{\sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}}{r_0 - h}.$$