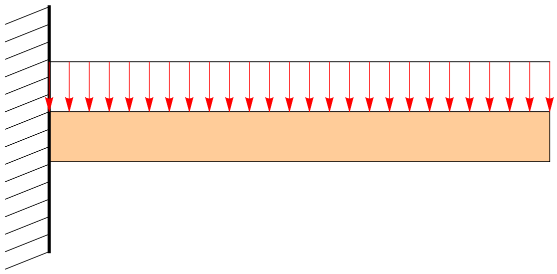
Vaje 28. maja 2020

1. Za konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo q_0:



   - določi upogib nosilca;
   - določi maksimalen upogib.

   Rešitev:

   (a) Enačba upogiba je

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju $w(0) = w'(0) = 0$ in na prostem koncu $w''(l) = w'''(l) = 0$. Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri $x = 0$ takoj sledi $C_3 = C_4 = 0$. Izračunajmo

$$w''(x) = \frac{q_0}{2EI} x^2 + 6C_1 x + 2C_2$$

in

$$w'''(x) = \frac{q_0}{EI} x + 6C_1.$$

Potem iz $w'''(l) = 0$ sledi

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{6EI}.$$

Pogoj $w''(l) = 0$ se potem glasi

$$0 = \frac{q_0 l^2}{2EI} - \frac{q_0 l^2}{EI} + 2C_2 = -\frac{q_0 l^2}{2EI} + \check{C}_2$$

in

$$C_2 = \frac{q_0 l^2}{4EI}.$$

Upogib je tako

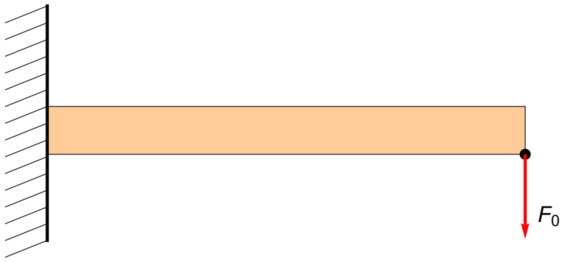
$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 - \frac{q_0 l}{6EI} x^3 + \frac{q_0 l^2}{4EI} x^2 = \frac{q_0 x^2}{24EI} \left(x^2 - 4lx + 6l^2 \right).$$

   (a) Iz narave problema je očitno, da je maksimalni upogib na koncu. Tako je

$$w_{max} = w(l) = \frac{q_0 l^2}{24EI} \left(l^2 - 4l^2 + 6l^2 \right) = \frac{q_0 l^4}{8EI}.$$

2. Za konzolno vpeti nosilec s točkovno obremenitvijo na koncu:

   - določi upogib nosilca;
   - določi maksimalen upogib in ga primerjaj z maksimalnim upogibom enekomerno obremenjenega nosilca.



Rešitev:

(a) Ker je obremenitev na koncu velja vzdolž celega nosilca enčba

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju $w(0) = w'(0) = 0$ in na obremenjenem koncu $w''(l) = 0$ in $w'''(l) = -F_0/EI$. Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri $x = 0$ tako kot prej sledi $C_3 = C_4 = 0$. Izračunajmo $w''(x) = 6C_1 x + 2C_2$ in $w'''(x) = 6C_1$. Potem iz $w'''(l) = -F_0/EI$ sledi

$$C_1 = -\frac{F_0}{6EI}.$$

Pogoj $w''(l) = 0$ se potem glasi

$$0 = -\frac{F_0 l}{EI} + 2C_2.$$

Tako dobimo

$$C_2 = \frac{F_0 l}{2EI}.$$

Upogib je tako

$$w(x) = -\frac{F_0}{6EI}x^3 + \frac{F_0 l}{2EI}x^2 = \frac{F_0}{6EI}x^2\left(-x + 3l\right).$$

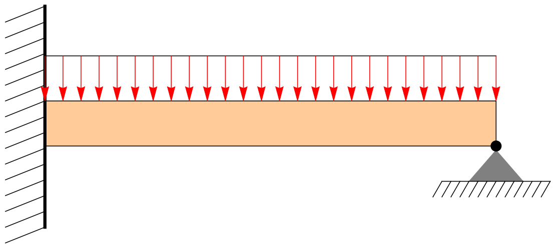
(b) Maksimalni upogib je na koncu in je

$$w_{max} = w(l) = \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Ekvivalentna enakomerna obremenitev je $q_0 = F_0/l$. Maksimalni upogib točkovno obremenjenega nosilca je za faktor $8/3$ večji od enakomernega.

3. Konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo z gosoto q_0 je na koncu členkasto podprt. Določi upogib nosilca in silo podpore na koncu.

   Rešitev: Nalogo bomo rešili na dva načina. Prvi bo po metodi superpozicije, kjer bomo uporabili rešitev prvih dveh nalog. Nato bomo nalogo rešili še direktno.



(a) Označimo z w_1 rešitev za enakomerno linijsko obremenitvijo in z w_2 rešitev za točkovno obremenitev. Pri $x = l$ mora veljati $w_1(l) + w_2(l) = 0$ oziroma

$$0 = \frac{q_0 l^4}{8EI} + \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Enačba je izpolnjena za

$$F_0 = -\frac{3q_0 l}{8}.$$

Ta sila ustreza sili podpore. Negativni predznak pomeni, da sila deluje v nasprotni smeri kot je obremenitev. Upogib je potem

$$\begin{aligned} w(x) = w_1(x) + w_2(x) &= \frac{q_0 x^2}{24EI}\left(x^2 - 4lx + 6l^2\right) - \frac{3q_0 l}{48EI} x^2 \left(-x + 3l\right) \\ &= \frac{q_0 x^2}{48EI}\left(2x^2 - 5lx + 3l^2\right). \end{aligned}$$

(b) Nalogo rešimo še po drugi poti. Rešujemo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

z robnimi pogoji $w(0) = w'(0) = 0$ v vpetju in $w(l) = w''(l) = 0$ v desni podpori. Rešitev enačbe z upoštevanjem pogojev pri $x = 0$ je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2.$$

Iz robnih pogojev pri $x = l$ potem sledi

$$0 = w(l) = \frac{q_0}{24EI} l^2 + C_1 l + C_2.$$

in

$$0 = w''(l) = \frac{q_0}{2EI} l^2 + 6C_1 l + 2C_2.$$

Dobili smo dve enačbi za dve neznanki. Pomnožimo prvo enačbo z -2 in jo prištejmo k drugi. Po krajšem računu dobimo

$$C_1 = -\frac{5q_0 l}{48EI}.$$

Nato pa še

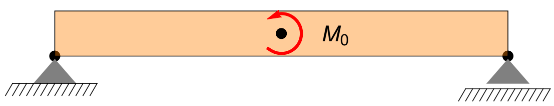
$$C_2 = \frac{3q_0 l^2}{48EI}.$$

Dobili smo enako rešitev kot po prvi poti.

4. Enostavno podprti nosilec je na sredini obremenjen s točkovnim upogibnim momentom M_0.

   (a) Določi upogib nosilca.

   (b) Skiciraj upogib in določi maksimalni upogib.



Rešitev:

(a) Nosilec razdelimo v dve polji, levo in desno od točke obremenitve. Pomik na levem delu označimo z w_l na desnem pa z w_d. Za oba dela velja enačba

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0,$$

saj nosilec ni linijsko obremenjen. Označimo z l dolžino nosilca. Robni pogoji so

$$w_l(0) = w_l''(0) = 0 \quad \text{in} \quad w_d(l) = w_d''(l) = 0.$$

Rešitvi enačb sta očitno

$$\begin{aligned} w_l(x) &= C_1 x^3 + C_2 x, \\ w_d(x) &= C_3 (l-x)^3 + C_4 (l-x), \end{aligned}$$

kar tudi potrdi kratek račun. Konstante C_i, $i = 1, \ldots, 4$ določajo sklopitveni pogoji

$$w_l(l/2) = w_d(l/2), \quad w_l'(l/2) = w_d'(l/2), \quad w_l''(l/2) = -\frac{M_0}{EI}, \quad w_d''(l/2) = \frac{M_0}{EI}.$$

Tu smo upoštevali, da se nosilec ne prelomi v točki obremenitve in definicijo upogibnega momenta, ki pravi da je to moment s katerim desni del nosilca deluje na levi. Potem je moment levega dela na desni enak $-M_0$. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l &= \frac{1}{8} C_3 l^3 + \frac{1}{2} C_4 l, \\ 3\frac{1}{8} C_1 l^2 + \frac{1}{2} C_2 &= -3\frac{1}{8} C_3 l^2 - \frac{1}{2} C_4, \\ 3 C_1 l &= -\frac{M_0}{EI}, \\ 3 C_3 l &= \frac{M_0}{EI}. \end{aligned}$$

Potem je

$$C_1 = -\frac{M_0}{3EIl} \quad \text{in} \quad C_3 = \frac{M_0}{3EIl}.$$

Vstavimo v prvi dve enačbi.

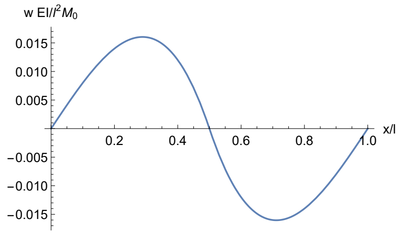
$$\begin{aligned} C_2 - C_4 &= \frac{M_0 l^2}{6EIl}, \\ C_2 + C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$C_2 = -C_4 = \frac{M_0 l^2}{12EIl}.$$

Tako je

$$\begin{aligned} w_l(x) &= -\frac{M_0}{3EIl} x^3 + \frac{M_0 l^2}{12EIl} x = -\frac{M_0}{12EIl} x (4x^2 - l^2), \\ w_d(x) &= \frac{M_0}{3EIl} (l-x)^3 - \frac{M_0 l^2}{12EIl} (l-x) = \frac{M_0}{12EIl} (l-x)(4(l-x)^2 - l^2). \end{aligned}$$



Slika 1: Upogib nosilca s točkovnim momentom.

(b) Skica upogibnega momenta je na sliki 1.
Koordinato maksimalni upogiba levega dela dobimo iz enačbe $w_l'(x) = 0$. Rešitev enačbe

$$0 = w_l'(x) = \frac{M_0}{12EIl}(-12x^2 + l^2).$$

je $x = l/2\sqrt{3}$. Maksimalni upogib je potem

$$w_{max} = -\frac{M_0 l^2}{72\sqrt{3}EI} + \frac{M_0 l^2}{24\sqrt{3}EI} = \frac{M_0 l^2}{36\sqrt{3}EI}.$$