

Vaje 30. aprila 2020

1. Na preseku osnega elementa pod kotom $\pi/4$ je normalna napetost enaka $\sigma = 120$ MPa. Določi osno silo in strižno napetost. Osni element ima površino $A = 4$ cm².

Rešitev: V osnem elementu je enoosno napetostno stanje. Pripadajoči tenzor napetosti je

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Normala na presek je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Potem je normalna napetost enaka

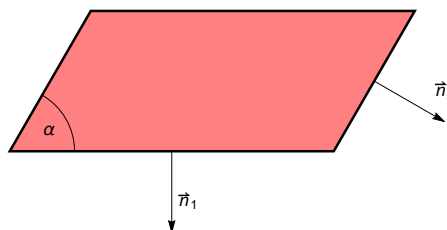
$$\sigma = t_n = \vec{n} \cdot \underline{t} \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} t_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} t_{11}.$$

Ker je normalna napetost $\sigma = 120$ MPa, je $t_{11} = 2\sigma = 240$ MPa. Osna sila je $F = \sigma A$. Potem je

$$F = 240 \text{ MPa} \times 4 \text{ cm}^2 = 960 \times 10^6 \times 10^{-4} \text{ N} = 96\,000 \text{ N} = 96 \text{ kN}.$$

2. Na rombu z vmesnim kotom α in stranico v smeri osi x je na spodnji vodoravni stranici napetost enaka $\vec{t}_1 = \tau\vec{j}$ na desni poševni stranici pa je napetost enaka $\vec{t}_2 = \frac{\tau}{2}(\vec{i} + \vec{j})$. Določi pogoj na kot α , ki dopušča dane napetosti.

Rešitev: Normala na spodnjo vodoravno stranico je $\vec{n}_1 = -\vec{j}$, normala na desno poševno stranico pa je



Romb s predpisanima napetostima.

$$\vec{n}_2 = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\vec{j} = \sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j}.$$

Iščemo ravninski napetostni tenzor

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}$$

tako, da je

$$\vec{t}_1 = \underline{t} \vec{n}_1 \quad \text{in} \quad \vec{t}_2 = \underline{t} \vec{n}_2$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \sin\alpha - t_{12} \cos\alpha \\ t_{12} \sin\alpha - t_{22} \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Dobili smo sistem enačb za komponente t_{ij} . Enačbe so štiri, neznanke pa samo tri, t_{11} , t_{12} in t_{22} . Da bo sistem rešljiv, mora veljati določen pogoj na α . Poiščimo ga. Iz prvega para enačb dobimo takoj $t_{12} = 0$ in $t_{22} = \tau$. Vstavimo to v drugi par enačb. Dobimo enačbi

$$\frac{\tau}{2} = t_{11} \sin \alpha \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2} = -\tau \cos \alpha.$$

Vidimo, da mora veljati $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Iskani kot je tako $2\pi/3$ in $t_{11} = \frac{\tau}{\sqrt{3}}$.

3. Z meritvami smo dobili napetosti $\underline{t}\vec{i} = (10\vec{i} + 3\vec{j})\text{MPa}$, $|\underline{t}\vec{j}| = \sqrt{34}\text{MPa}$ in $\underline{t}\vec{k} = \vec{0}$.

- Določi napetostni tenzor.
- Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh koordinatnih osi x in y .
- Določi ekstremalni normalni napetosti in njuni smeri.
- Skiciraj Mohrovo krožnico.
- Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh diagonal prvega in drugega kvadranta.
- Določi normalno in strižno napetost v ravnini, ki ima normalo v smeri vektorja $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rešitev:

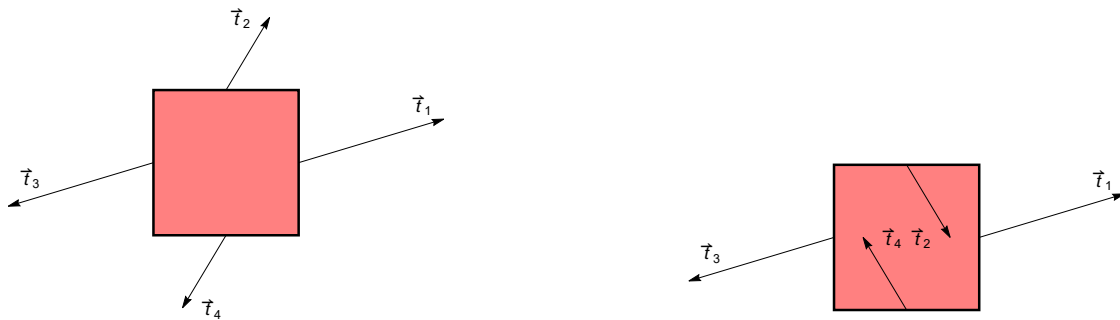
- Iz pogoja $\underline{t}\vec{k} = \vec{0}$ sledi, da je napetostno stanje ravninsko, $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$. Iz enačbe $\underline{t}\vec{i} = (10\vec{i} + 3\vec{j})\text{MPa}$ takoj sledi, da je $t_{11} = 10\text{MPa}$ in $t_{12} = 3\text{MPa}$. Upoštevajmo še pogoj $|\underline{t}\vec{j}| = \sqrt{34}\text{MPa}$. Izračunajmo

$$\sqrt{34}\text{MPa} = |\underline{t}\vec{j}| = \sqrt{t_{12}^2 + t_{22}^2} = \sqrt{9\text{MPa}^2 + t_{22}^2}.$$

Potem je $t_{22} = \pm 5\text{MPa}$. Napetostni tenzor

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \pm 5 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

- Vektor napetosti na nasprotni stranici je nasproten vektorju napetosti na stranici, $\underline{t}(-\vec{i}) = -\underline{t}\vec{i}$ in $\underline{t}(-\vec{j}) = -\underline{t}\vec{j}$. Skica napetosti je na sliki 1.



Slika 1: Skica napetosti na stranicah kvadrata. Levo $t_{22} > 5\text{MPa}$, desno $t_{22} > -5\text{MPa}$.

- V nadaljevanju se bomo omejili na primer $t_{22} = 5\text{MPa}$. Ekstremalni napetosti izračunamo po formuli

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right).$$

Po krajšem računu dobimo

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} (15 + \sqrt{61}) \text{ MPa} \quad \text{in} \quad \sigma_{\min} = \frac{1}{2} (15 - \sqrt{61}) \text{ MPa}.$$

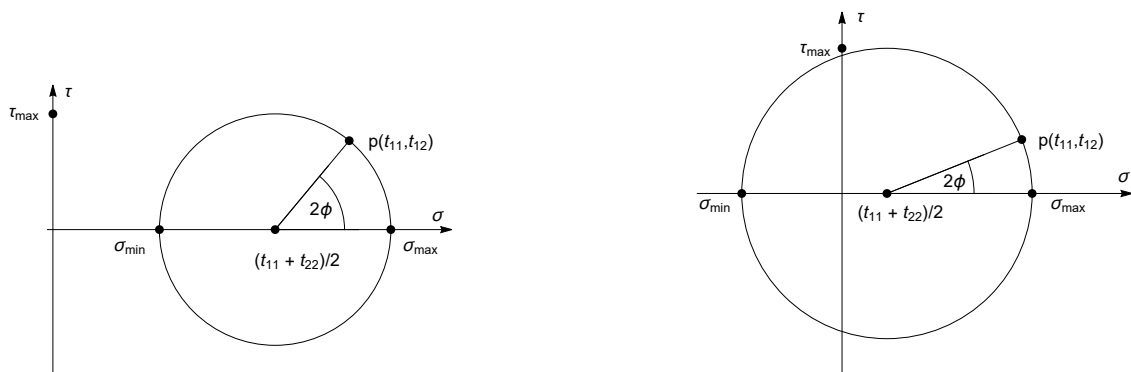
Smer maksimalne normalne napetosti dobimo po formuli

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22} \end{cases}.$$

V našem primeru je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{6}{5} \approx 25.1^\circ.$$

(d) Mohrovi krožnici za oba primera sta na sliki 2.



Slika 2: Mohrovi krožnici. Levo $t_{22} > 5$ MPa, desno $t_{22} > -5$ MPa.

(e) Normala na diagonalo prvega kvadranta koordinatnega sistema xy je $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ MPa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Normalna napetost je potem $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = 9/2$, strižna pa

$$t_s = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t} - t_n^2} = \frac{5}{2} \text{ MPa}.$$

Normala na diagonalo drugega in četrtega kvadranta je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Potem je $\vec{t} = \frac{13}{\sqrt{2}}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}$, $t_n = 21/2$ MPa in $t_s = 5/2$ MPa.

(f) Normala v smeri vektorja $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ je $\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Potem podobno kot prej izračunamo $\vec{t} = (\frac{13}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{3}}\vec{j})$ MPa, $t_n = 7$ MPa in $t_s = \sqrt{86/3}$ MPa.

4. Naj za ravninsko napetostno stanje velja, da je $\text{sl } \underline{t} = 0$. Pokaži, da obstaja KS v katerem sta diagonalni komponenti napetostnega tenzorja enaki nič.

Rešitev: Izberimo poljubni koordinatni sistem in priredimo tenzorju matriko z elementi t_{ij} . Ker je sled tenzorja neodvisna od koordinatnega sistema, je $t_{11} + t_{22} = 0$. Iščemo nov

koordinatni sistem v katerem ima \underline{t} matriko z elementi t'_{ij} za katero je $t'_{11} = t'_{22} = 0$. Po formulah s predavanj je

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi.$$

Iz $t_{11} + t_{22} = 0$ sledi, da je $t_{22} = -t_{11}$. Potem je

$$t'_{11} = t_{11} \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -t_{11} \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi.$$

Vidimo, da je dovolj poiskati kot φ pri katerem je $t'_{11} = 0$. Iskani kot je rešitev enačbe

$$\cot 2\varphi = -\frac{t_{12}}{t_{11}}.$$

Iskani koordinatni sistem je sistem zavrten za kot φ , ki je rešitev zgornje enačbe.