Vaje 7. maja 2020

1. Ravninska deformacija deformira pravokotnik s stranicama $a = 1\,\text{cm}$ in $b = 2\,\text{cm}$ v romboid s stranicama $1.02\,\text{cm}$ in $1.97\,\text{cm}$ in vmesnim kotom med stranicama $89.7°$.

   (a) Zapiši deformacijski tenzor.

   (b) Določi osno deformacijo diagonale pravokotnika.

   Rešitev:

   (a) Infinitezimalni deformacijski tenzor bomo določili v koordinatnem sistemu, ki ima osi v smereh pravokotnika. Diagonalna elementa sta enaka relativni spremembi dolžin stranic pravokotnika, izvendiagonalni pa spremembi kota. Deformacija stranice v smeri osi x je

   $$\epsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{0.02}{1} = 0.02.$$

   Deformacija v smeri osi y pa je

   $$\epsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{-0.03}{2} = -0.015.$$

   Sprememba kota je $\Delta\varphi = 90° - 89.7° = 0.3°$. Vrednost v stopinjah moramo pretvoriti v radiane. Ker se je kot zmanjšal, je $\gamma > 0$. Potem je

   $$\gamma = 0.3\frac{\pi}{180} \approx 0.005.$$

   Infinitezimalni deformacijski tenzor je enak

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.0025 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} = 10^{-2}\begin{bmatrix} 2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 \end{bmatrix}$$

   (b) Enotski vektor v smeri diagonale je $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$. Relativna sprememba v smeri diagonale je potem

   $$\begin{aligned} \epsilon_d = \vec{e}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{e} &= \frac{1}{5}10^{-2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}10^{-2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/2 \\ -11/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}10^{-2}\left(-\frac{6}{2}\right) = -0.6\times 10^{-2}. \end{aligned}$$

2. Ravninska deformacija deformira pravokotni trikotnik z dolžinama stranic a in b v smeri koordinatnih osi v trikotnik z oglišči v točkah $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0 + a_{11}, y_0 + a_{12})$ in $C = (x_0 + a_{21}, y_0 + a_{22})$. Tu so a_{ij} dane konstante.

   (a) Določi deformacijski tenzor na geometrijski način.

   (b) Določi pogoje na a_{ij}, da bo deformacija res majhna.

   (c) Zapiši gradient deformacije in izračunaj deformacijski tenzor.

   Rešitev:

(a) Koordinatni sistem postavimo v smereh katet trikotnika. Kateta v smeri osi x se preslika v stranico AB. Njena dolžina je $|AB| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}$. Potem je

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{a} - 1.$$

Kateta v smeri osi y se preslika v stranico AC. Njena dolžina je $|AC| = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}$. Potem je

$$\epsilon_2 = \frac{\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}{b} - 1.$$

Določiti moramo še izvendiagonalni element, ki ga določa sprememba kota. Pravi kot se deformira v kot $\varphi = \angle CAB$ z vrhom v A. Po kosinusnem izreku je

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\,|AB|\,|AC| \cos\varphi.$$

Od tod potem

$$(a_{21} - a_{11})^2 + (a_{22} - a_{12})^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 - 2\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}\cos\varphi$$

in po krajšem računu

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}.$$

Ker je $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, je $\cos\varphi = \sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Pri pogoju, da je deformacija majhna, je infinitezimalni deformacijski tenzor enak

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}{a} - 1 & \frac{1}{2}\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}} \\ & \frac{\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}{b} - 1 \end{bmatrix}.$$

Tu smo zaradi zapisali samo zgornji trikotni del simetrične matrike.

(b) Sedaj moramo določiti pogoje na koeficiente a_{ij}, da je deformacja res majhna. Da bo pisava lažja, bomo predpostavili, da so vsi koeficienti pozitivi. Prepišimo $\cos\varphi$ v

$$\cos\varphi = \frac{a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}}{\sqrt{1 + (a_{12}/a_{11})^2}\sqrt{1 + (a_{21}/a_{22})^2}}.$$

Izraz je majhne, če je $|a_{12}/a_{11}| << 1$ in $|a_{21}/a_{22}| << 1$. Potem je

$$\cos\varphi \approx (a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}).$$

Nadalje je

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{a} - 1 \approx \frac{|a_{11}|}{a} - 1.$$

Veljati mora torej $|a_{11}| \approx a$. Podobno dobimo pogoj $|a_{22}| \approx b$. Konstanti a_{11} in a_{22} sta torej pozitivni. Za majhne deformacije je tako

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Prvo moramo poiskati funkcijo pomika. Vsa oglišča trikotnika so pomaknjena za $\vec{r}_0 = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath}$. Potem je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \begin{bmatrix} a_{11}/a & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b \end{bmatrix} \vec{R}.$$

Vektor pomika je dan z enačbo $\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}$. Tako dobimo

$$\vec{U}(X,Y) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Gradinet pomika je

$$\operatorname{Grad}\vec{U} = \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}.$$

Deformaciski tenzor pa je

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\vec{U} + (\operatorname{Grad}\vec{U})^T\right) &= \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/b + a_{12}/a) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Z ekstenziometrom smo izmerili osne deformacije $3 \cdot 10^{-3}$, $\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ in $-\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ v smereh, ki oklepajo kot $2\pi/3$. Določi deformacijski tenzor.

Rešitev: Uporabili bomo formulo s predavanj

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\cos 2\varphi + e_{12}\sin 2\varphi$$

za kote $\varphi = 0, 2\pi/3$ in $4\pi/3$. Potem je $2\varphi = 0, 4\pi/3, 8\pi/3 = 2\pi/3$. Upoštevajmo, da je $\cos 4\pi/3 = \cos 8\pi/3 = -\frac{1}{2}$ in $\sin 4\pi/3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in $\sin 8\pi/3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{-3} &= e_{11} \\ \sqrt{3} \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) - \frac{1}{4}(e_{11} - e_{22}) - e_{12}\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) - \frac{1}{4}(e_{11} - e_{22}) + e_{12}\frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

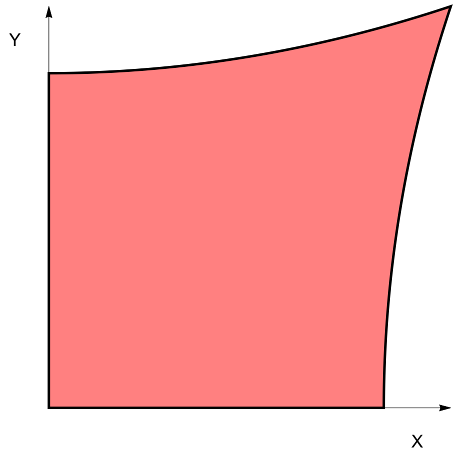
Iz prve enačbe sledi $e_{11} = 3 \cdot 10^{-3}$. Če seštejemo drugo in tretjo enačbo dobimo $0 = \frac{1}{2}e_{11} + \frac{3}{2}e_{22}$ in potem $e_{22} = -\frac{1}{3}e_{11} = -10^{-3}$. Odštejmo od tretje enačbe drugo. Dobimo $\sqrt{3}e_{12} = -2\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ in $e_{12} = -2 \cdot 10^{-3}$. Matrika infinitezimalnega tenzorja je tako

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Podana je funkcija pomika $\vec{U} = \alpha(XY^2\vec{\imath} + X^2Y\vec{\jmath})$.
   (a) Skiciraj, kam se preslika kvadrat $[0,a] \times [0,a]$.
   (b) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor.
   (c) Izračunaj deformacijski tenzor in ugotovi kdaj je deformacija majhna.

Rešitev:

(a) Izberimo $a = 1$ in $\alpha = 1/5$ Sliko narišemo tako, da narišemo stranice deformiranega lika.



Slika 1: SkicSlika deformiarnega kvadrata $a = 1$ in $\alpha = 1/5$.

(b) Gradient pomika je

$$\operatorname{Grad}\vec{U} = \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y \\ \partial U_2/\partial X & \partial U_2/\partial Y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = \alpha \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix}.$$

Ker je deformacija odvisna od položaja, deformacija ni homogena.

(c) Deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\vec{U})^T \operatorname{Grad}\vec{U}.$$

Izračunajmo posebej

$$(\operatorname{Grad}\vec{U})^T \operatorname{Grad}\vec{U} = \alpha^2 \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} Y^4 + 4X^2Y^2 & 2(XY^3 + X^3Y) \\ & X^4 + 4X^2Y^2 \end{bmatrix}.$$

Deformacija je majhna, če so komponente tenzorja $\operatorname{Grad}\vec{U}$. To dosežemo, če je α majhen in $|X| \leq 1$ in $|Y| \leq 1$.