PREHODNE MATRIKE ZA GEOMETRIJSKO OPTIKO

Aleš Mohorič
Fakulteta za matematiko in fiziko

22. maj 2008

S prehodnimi matrikami si pomagamo pri obravnavi optičnih sistemov z geometrijsko optiko, to pomeni v približku:

- obosno dogajanje (obosni žarki): $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$,
- ne deluje za napake leč: kromatična, sferna aberacija.

Metoda funkcionira tudi za debele leče.
Žarek opišemo z odmikom od optične osi in naklonom

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

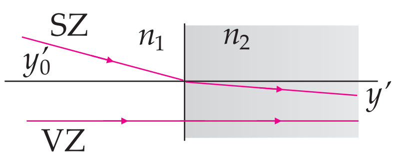
Optična naprava lahko spremeni smer in lego vpadnega žarka $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$ v izstopni žarek $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$. Matematično transformacijo opišemo z matriko

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

A lahko dobimo tako, da piščemo transformacijo za bazna vektorja

- VZ - vzporedni žarek $\begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- SZ - sredinski žarek $\begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$

Prehod preko ravne meje Karakteristična žarka sta prikazana na sliki 1



Slika 1:

Vzporedni žarek se pri prehodu ne spremeni: $y = y_0$, naklon sredinskega žarka pa po lomnem zakonu in v približku majhnih kotov $\frac{y'}{y_0'} = \frac{n_1}{n_2}$. Nastavek za A vzamemo splošno, kot prej, in iz enačbe:

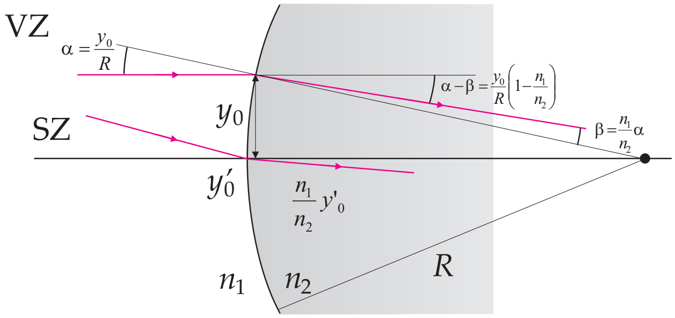
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sledi $uy_0 = y_0 \Rightarrow u = 1$ ter $wy_0 = 0 \Rightarrow w = 0$. Drug karakteristični žarek da enačbo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_1}{n_2} y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

iz katere sledi $vy_0' = 0 \Rightarrow v = 0$ ter $zy_0' = \frac{n_1}{n_2} y_0' \Rightarrow z = \frac{n_1}{n_2}$. Prehodna matrika za prehod preko ravne meje je torej

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$



Slika 2:

Prehod preko konveksne meje Karakteristična žarka sta na sliki 2.

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{y_0}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

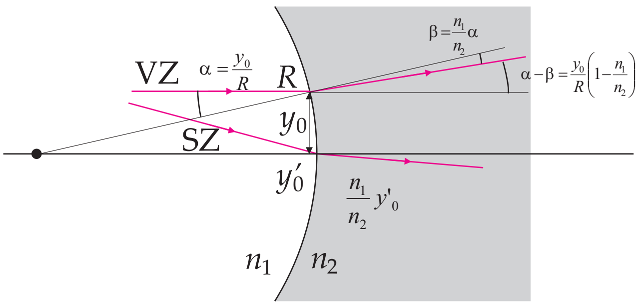
in za SZ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_1}{n_2} y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Prehodna matrika za prehod preko konveksne meje je torej

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Prehod preko konkavne meje Karakteristična žarka sta na sliki 3.



Slika 3:

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

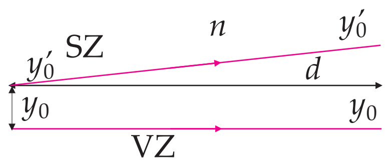
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \frac{y_0}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in za SZ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_1}{n_2} y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Prehodna matrika za prehod preko konkavne meje je torej

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$



Slika 4:

Prehod skozi plast s fiksnimi optičnimi lastnostmi Karakteristična žarka sta na sliki 4.

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in za SZ

$$\begin{bmatrix} y_0' d \\ y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

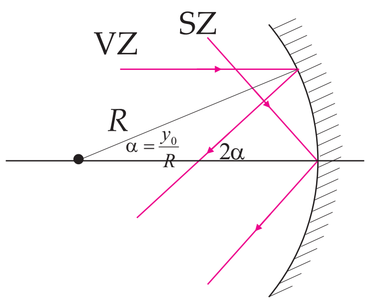
Prehodna matrika za prehod preko konkavne meje je torej

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ravno zrcalo Ravno zrcalo obrne smer koordinatnih osi, kar upoštevamo "v glavi". Prehodna matrika je preprosto

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konkavno zrcalo Karakteristična žarka sta na sliki 5.



Slika 5:

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{2}{R} y_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in za SZ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

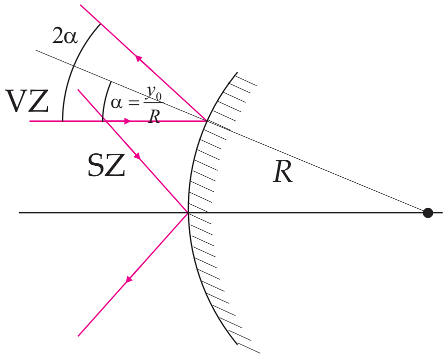
Prehodna matrika za odboj na konkavnem zrcalu je torej

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Konveksno zrcalo Karakteristična žarka sta na sliki 6.

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \frac{2}{R} y_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Slika 6:

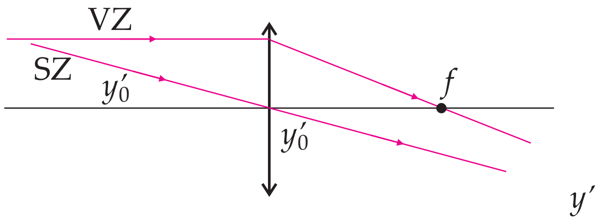
in za SZ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Prehodna matrika za odboj na konveksnem zrcalu je torej

$$A_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

Zbiralna leča Karakteristična žarka sta na sliki 7.



Slika 7:

Tu za karakteristična žarka veljata sledeči enačbi: za VZ

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ -\frac{y_0}{f} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in za SZ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Prehodna matrika za lom na zbiralni leči je torej

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

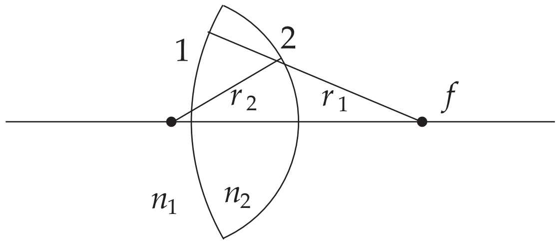
pri razpršilni leči pa le spremenimo predznak pred f.

Enačbo TANKE leče lahko na drug način dobimo tudi tako, da lečo obravnavamo kot dva prehoda preko konveksne oziroma konkavne meje med sredstvi z različnim lomnim kvocientom in pri tem ustrezno upoštevamo indekse 1 in 2. Za zbiralno lečo prikazano na sliki 8 sestavimo to kot najprej prehod preko konveksne meje in nato preko konkavne meje. Prehodno matriko napišemo enostavno kot produkt prehodnih matrik za posamezni dogodek, s tem, da matrike nizamo po vrsti z desne:

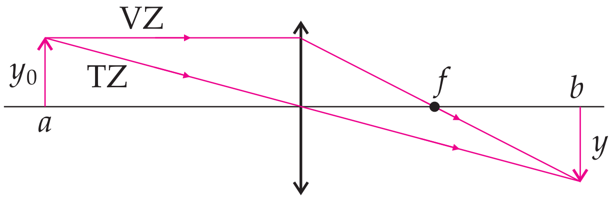
$$A = A_c A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{r_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{r_2} + \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1}{n_1} - 1\right)\frac{1}{r_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Ker vemo, da v levo spodaj v tej matriki leži $-1/f$ od tu brez težav zapišemo enačbo za goriščno razdaljo leče iz snovi z lomnim kvocientom n in krivinskima radijema r_1 in r_2.

S prehodnimi matrikami poiščemo enačbo leče tako, kot nakazuje slika 9.



Slika 8:



Slika 9:

Vzporedni žarek VZ prepotuje razdaljo a, nato se lomi na leči ter se na razdalji slike b seka s temenskim žarkom TZ, ki izhaja iz iste točke in nelomljen preide skozi teme leče. Prehodna matrika za tak sistem je

$$A = A_d(b) A_h A_d(a) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b}{f} & a - \frac{b\ a}{f} + b \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{bmatrix}$$

Če s to matriko delujemo na VZ, dobimo

$$A \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - by_0/f \\ -y_0/f \end{bmatrix},$$

na TZ pa

$$A \begin{bmatrix} y_0 \\ -y_0/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -by_0/a \\ -y_0/a \end{bmatrix}.$$

V razdalji slike se morata odmika obeh žarkov od optične osi ujemati: $y_0 - by_0/f = -by_0/a$ oz. $1/b + 1/a = 1/f$, kar je enačba leče.