Uvodna matematika za fiziko

Aleš Mohorič
Fakulteta za matematiko in fiziko

3. maj 2005

1 Skalarji

Količine, ki jih lahko izrazimo samo s številom in enoto, imenujemo skalarji. Primer: masa, električni naboj, gostota... Seštevamo lahko samo količine, ki imajo enako enoto. Pri seštevanju in množenju skalarjev velja komutativnost:

$$a + a = b + a, \quad ab = ba.$$

Asociativnost produkta in vsote pove, da je vseeno, katere člene prej seštejemo (zmnožimo):

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

Distributivnost:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Potence vsote števil ne moremo enostavno izraziti, velja pa

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{in} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

in n-ta potenca binoma (n je naravno število):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Potenca produkta števil je produkt istih potenc števil:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Posebno pravilo velja za potenciranje predpon: običajno količine, ki se potencirajo v produktu, objamemo z oklepaji (primerjaj: $(ab)^2 = a^2b^2$ in ab^2), pri predponah pa tega ne naredimo a se vseeno potencirajo skupaj z enoto. Primer: kvadratni centimeter zapišemo kot cm^2, kar strogo matematično pomeni $(\mathrm{cm})^2$ in ga s pravilom potenciranja produktov izrazimo $\mathrm{cm}^2 = \mathrm{c}^2\ \mathrm{m}^2 = (10^{-2})^2\ \mathrm{m}^2 = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$. Pri tem smo uporabili pravilo za potenciranje potenc:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Produkt potenc z enako osnovo pa zapišemo kot

$$a^n a^m = a^{n+m}.$$

2 Polinomi

Nekaj osnovnih faktorizacij polinomov:

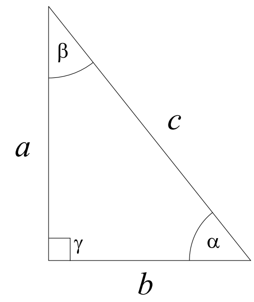
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Rešitvi kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tako lahko zapišemo tudi $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.



Slika 1:

3 Pravokotni trikotnik

En od kotov pravokotnega trikotnika meri 90^o. Stranico, ki leži nasproti tega kota, imenujemo hipotenuza. Ostali stranici sta kateti.

Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Velja tudi, da je razmerje dolžin kotu priležne katete in hipotenuze enako kosinusu kota:

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha$$

in razmerje dolžin kotu nasprotne katete in hipotenuze sinusu kota:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha.$$

Razmerje dolžin kotu nasprotne katete in priležne katete je enako tangensu tega kota:

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha.$$

Za splošne trikotnike (tudi kadar $\gamma \neq 90^o$) pa velja:

$$\text{sinusov izrek } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

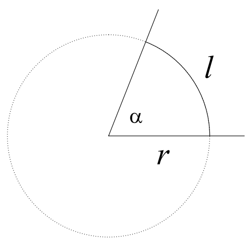
$$\text{kosinusov izrek } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$\text{tangensov izrek } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\alpha+\beta)/2}{\tan(\alpha-\beta)/2}.$$

4 Trigonometrija

Kot je v radianih enak razmerju dolžine loka l, ki ga kraka kota odsekata na krogu s središčem v vrhu kota, in polmerom tega kroga r:

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$



Slika 2:

Zveza med kotom izraženim v radianih α_r in kotom izraženim v stopinjah α_s je:

$$\alpha_s = \frac{180^o}{\pi}\alpha_r, \quad \alpha_r = \frac{\pi}{180^o}\alpha_s.$$

Stopinje uporabljamo le za kote, ki nastopajo kot argumenti kotnih funkcij.
Trigonometrične funkcije so periodične in sicer (za cela števila n):

$$\sin(x + n2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + n2\pi) = \cos x$$
$$\tan(x + n\pi) = \tan x.$$

Liha funkcija pri negativnem argumentu spremeni predznak, soda pa ne:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

Funkcije argumentov večjih od $\pi/2$ prevedemo na argumente, ki ležijo med 0 in $\pi/2$ tako, da odštejemo tolikokrat po 2π, kot je potrebno, potem pa uporabimo sledeče zveze:

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 \pm x) &= \cos x \\ \sin(\pi \pm x) &= \mp \sin x \\ \sin(3\pi/2 \pm x) &= -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x \\ \cos(\pi/2 \pm x) &= \mp \sin x \\ \cos(\pi \pm x) &= -\cos x \\ \cos(3\pi/2 \pm x) &= \pm \sin x \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x \\ \tan(\pi/2 \pm x) &= \mp 1/\tan x \\ \tan(\pi \pm x) &= \pm \tan x \\ \tan(3\pi/2 \pm x) &= \mp 1/\tan x \\ \tan(2\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

Med trigonometričnimi funkcijami veljajo sledeče zveze:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

in

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Eno trigonometrično funkcijo izrazimo z drugo takole:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \\ \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} \end{aligned}$$

Funkcije vsote in razlike kotov lahko razbijemo takole:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \sin(x + y + z) &= \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z \\ \cos(x + y + z) &= \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z \end{aligned}$$

Funkcije večkratnih argumentov izražamo

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \tan 3x &= \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \end{aligned}$$

Funkcije polovičnih argumentov izražamo

$$\begin{aligned}
\sin\frac{x}{2} &= \sqrt{(1-\cos x)/2}\\
\cos\frac{x}{2} &= \sqrt{(1+\cos x)/2}\\
\tan\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

Vsoto in razliko trigonometričnih funkcij računamo kot:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\tan x \pm \tan y &= \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}
\end{aligned}$$

Produkti funkcij:

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]\\
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]
\end{aligned}$$

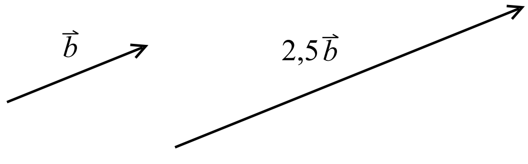
Potence funkcij:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\\
\sin^3 x &= \frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\\
\cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)
\end{aligned}$$

5 Vektorji

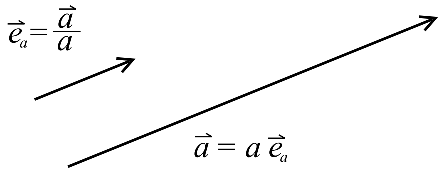
Vektor je količina, ki ima smer in velikost. Primer: hitrost, pospešek, sila, navor... Vektor predstavimo z daljico. Na enem koncu daljice narišemo konico. Smer vektorja je enaka smeri daljice in kaže od začetka vektorja, proti koncu vektorja. Vektorje v tiskanem besedilu označimo z mastno črko $\mathbf{v}$, kadar pa pišemo na roko, nad ime vektorja dodamo puščico: $\vec{v}$. Velikost vektorja označimo z $|\mathbf{v}|$ ali krajše kar v. Vektor 0 ima dolžino enako nič, smeri pa nima določene. Vektor enote (enotni vektor) ima dolžino enako ena. Vektorji so kolinearni, če so vzporedni isti premici. Koplanarni vektorji so vzporedni isti ravnini. Vektorja sta enaka, če sta vzporedna, enako dolga in kažeta v isto smer. Če kažeta v nasprotnih smereh, sta vektorja nasprotna. Pri tej definiciji se vektor ne spremeni, če ga vzporedno prestavimo. V določenih primerih to ne velja (denimo pri vektorju sile v navoru).

Vektor množimo s skalarjem c tako, da smer vektorja ostane enaka, dolžina vektorja pa se spremeni za c-krat. Slika 3 kaže vektor $\vec{b}$ in produkt vektorja z 2,5.



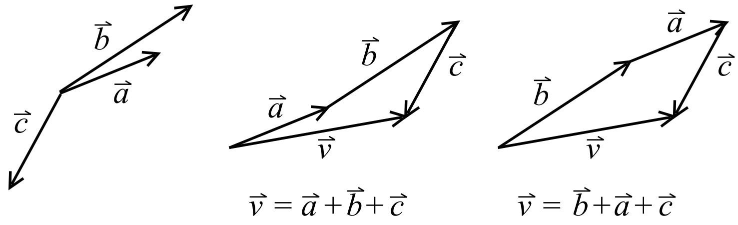
Slika 3:

Vektor lahko predstavimo kot produkt njegove velikosti in enotnega vektorja (sl. 4), ki kaže v isto smer: $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a$. Od tu tudi razberemo recept, kako dobimo enotni vektor, ki kaže v smeri vektorja: vektor delimo z njegovo velikostjo: $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/a$.



Slika 4:

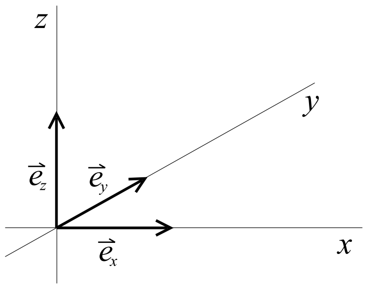
Vektorje seštevamo tako, da jih nanizamo drugega za drugim in sicer tako, da začetek naslednjega vektorja vzporedno prestavimo na konec prejšnjega. Končni rezultat je vektor, ki kaže od začetka prvega vektorja, do konca zadnjega vektorja. Rezultat ni odvisen od vrstnega reda vektorjev (sl. 5).



Slika 5:

5.0.1 Kartezični koordinatni sistem

V prostoru izberimo tri med seboj pravokotne smeri. Vzdolž vsake od smeri usmerimo enotni vektor. Imenujemo jih lahko $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ in $\mathbf{k}$ ali pa tudi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$. Prestavimo te vektorje tako, da se njihovi začetki stikajo in definirali smo kartezični koordinatni sistem, ki ima izhodišče v točki, kjer se ti trije vektorji stikajo (slika 6). Osi koordinatnega sistema so obrnjene vzdolž enotnih vektorjev in imajo enote enake kot vektor (koordinatne osi, v katerih prikažemo vektor hitrosti imajo enote v m/s, koordinatni sistem, v katerem opišemo vektor sile, pa ima osi z enoto newton). Pozitivni del osi je na tisti strani, v katero kaže enotni vektor.



Slika 6:

Koordinatni sistem imenujemo desnosučni, če je trojica enotnih vektorjev obrnjena tako, da kaže prvi vektor vzdolž palca desne roke, drugi vektor vzdolž kazalca in tretji vektor vzdolž sredinca desne roke (slika 7).

V kartezičnem koordinatnem sistemu lahko katerikoli vektor zapišemo z linearno kombinacijo (vsoto) treh vektorjev, ki ležijo v smeri koordinatnih osi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z.$$

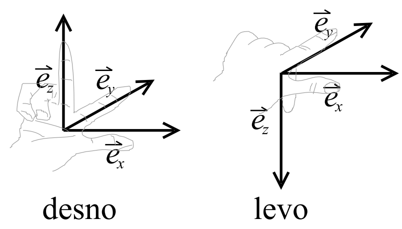
Skalarje v_x, v_y in v_z imenujemo komponente vektorja in vektor s komponentami drugače napišemo tudi $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (glej sliko 8).

Komponente vektorja dobimo tako, da poiščemo pravokotne projekcije vektorja na osi. Pravokotno projekcijo naredimo tako, da potegnemo od konca vektorja premico, ki seka os pod pravim kotom. Ta premica seka os v točki, ki ustreza komponenti vektorja na tej osi.

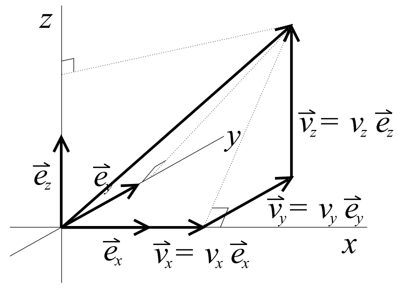
Produkt vektorja in skalarja po komponentah:

$$c\mathbf{v} = c(v_x, v_y, v_z) = (cv_x, cv_y, cv_z).$$

Primer: telo z maso m = 2 kg se premika s pospeškom $\mathbf{a}$ = (2 m/s^2, 0, 1 m/s^2). Kolikšna sila deluje nanj? Drugi Newtonov zakon pove $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sila je torej produkt skalarja (masa m) in vektorja (pospešek $\mathbf{a}$): $\mathbf{F}$ = (2 kg 2 m/s^2, 2 kg 0, 2 kg 1 m/s^2) = (4 N, 0, 2 N).



Slika 7:



Slika 8:

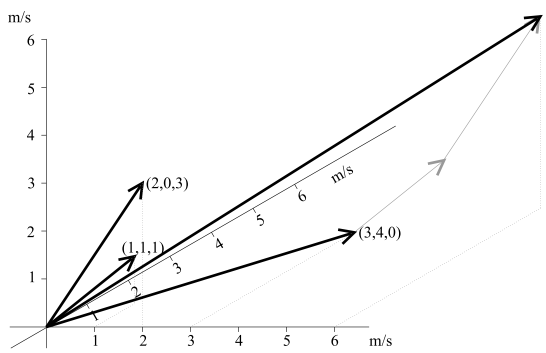
Vsota vektorjev po komponentah:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Izraz brez težav posplošimo:

$$\sum_i \mathbf{v}_i = (\sum_i v_{ix}, \sum_i v_{iy}, \sum_i v_{iz}).$$

Primer (slika 9): Seštejmo vektorje $\mathbf{v}_1$ = (2 m/s, 0 m/s, 3 m/s), $\mathbf{v}_2$ = (1 m/s, 1 m/s, 1 m/s) in $\mathbf{v}_3$ = (3 m/s, 4 m/s, 0 m/s). Rezultat $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ = (2 m/s + 1 m/s + 3 m/s, 0 m/s + 1 m/s + 4 m/s, 3 m/s + 1 m/s + 0 m/s) = (6 m/s, 5 m/s, 4 m/s).



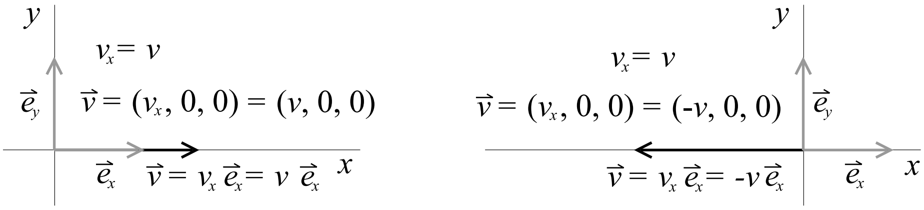
Slika 9:

Vektorju $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ nasprotni vektor je $-\mathbf{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$.

Vektorju $\mathbf{v}$ odštejemo vektor $\mathbf{w}$ tako, da vektorju $\mathbf{v}$ prištejemo $-\mathbf{w}$: $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$.

Kadar v problemu nastopajo samo kolinearni vektorji, se vektorske enačbe in računanje poenostavi na računanje s skalarji, saj lahko koordinatno os usmerimo vzporedno vektorjem. Komponente vektorjev v smeri prve koordinatne osi so enake (ali nasprotno enake) velikosti vektorja (velikost vektorja je vedno pozitivna, komponenta pa je lahko tudi negativna), komponente vektorjev v smeri ostalih koordinatnih osi so enake nič (slika 10).

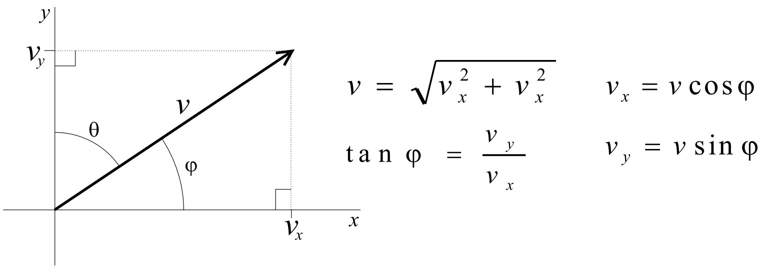
Primer: Klada z maso m = 2 kg leži v breztežnem prostoru. V desno jo vleče sila z velikostjo 3 N, v levo pa sila z velikostjo 1 N. Kolikšen je pospešek klade? Drugi Newtonov zakon pravi, da je produkt mase in pospeška telesa enak vsoti vseh sil, ki delujejo na telo: $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$. To je vektorska enačba in z vektorji računamo v koordinatnem sistemu. Če obrnemo koordinatni sistem tako, da enotni vektor $\mathbf{e}_x$ kaže vzdolž prve sile, potem se vektorji sil in pospeška zapišejo: $\mathbf{F}_1$ = (3 N, 0, 0), $\mathbf{F}_2$ = (-1 N, 0, 0) in $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Vektor pospeška smo zaenkrat napisali še z vsemi komponentami, saj jih ne poznamo. Če vektorje vstavimo v vektorsko enačbo dobimo za vsako od komponent novo enačbo: $ma_x = F_{1x} + F_{2x}, ma_y = F_{1y} + F_{2y}$ in $ma_z = F_{1z} + F_{2z}$. Iz prve enačbe sledi a_x = (3 N - 1 N)/2 kg = 1 m/s^2.



Slika 10:

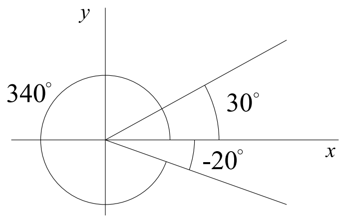
Ostali dve enačbi pa razkrijeta, da so komponente pospeška v drugih smereh enake nič: $a_y = a_z = 0$. Vidimo, da se je račun poenostavil: dobili smo enak rezultat, kot če bi računali s skalarno enačbo $\sum_i F_i = ma$, kjer silo štejemo pozitivno, če kaže v eno smer (to smer izberemo sami) in za negativno (velikost sile je seveda še vedno pozitivna), če kaže v drugo smer.

Kadar vsi vektorji ležijo v eni ravnini (ali pa so koplanarni), potem je problem dvodimenzionalen in shajamo samo z dvema komponentama vektorja in dvema koordinatnima osema. Komponente vektorja dobimo tako, da iz konca vektorja potegnemo pravokotnice na vse osi. Tam, kjer nam pravokotnice sekajo osi, so komponente vektorja. Komponenta vzdolž osi z je enaka nič. Komponenti x in y pa izrazimo s kotom φ, ki ga vektor oklepa z osjo x, in velikostjo vektorja v tako, kot kaže slika 11. Ravno tako lahko s komponentama izrazimo velikost in smer vektorja.



Slika 11:

Smer vektorja, ki leži v ravnini, podamo tako, da v ravnini izberemo premico in podamo kot, ki ga vektor oklepa s to premico. Običajno merimo ta kot od osi x in kot je pozitiven, kadar ga merimo v nasprotni smeri urinega kazalca (slika 12).



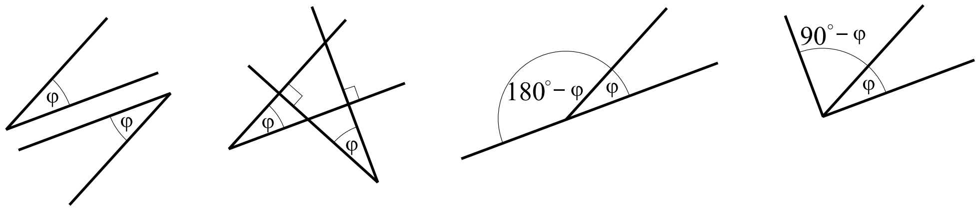
Slika 12:

Včasih smer vektorja ni podana s kotom, ki ga vektor oklepa z osjo x. Tedaj ta kot izračunamo, ali pa smiselno uporabimo predpis za iskanje komponent. Pri tem nam pride prav, da sta kota, ki imata paroma pravokotne krake, enaka. Enako velja za kota, ki imata paroma vzporedne krake. Brez težav pa poiščemo vrednost sokotov in komplementarnih kotov (slika 13).

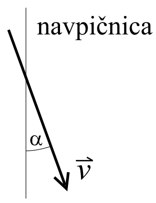
Podrobneje si oglejmo postopek računanja komponent za primer, ko vektor z velikostjo $v = 10$ m/s oklepa kot $\alpha = 20^o$ z navpičnico in kaže navzdol (slika 14).

Komponente lahko določimo na več načinov, saj koordinatni sistem lahko obrnemo kot nas je volja. Na sliki 15 a) in b) je koordinatni sistem zasukan tako, da je os x vodoravna in kaže od leve proti desni, v primeru na sliki 15 c) je sistem zasukan tako, da je pozitivni del osi x obrnjen proti levi (os y pa še vedno kaže navzgor - to je dokaj nenavadno zasukan sistem), na sliki 15 d) pa je sistem obrnjen tako, da kaže vektor vzdolž osi x.

Primera na sliki 15 a) in b) sta enaka, le lotili se bomo vsakega na drug način. V primeru a) izračunajmo kot, ki ga vektor oklepa z osjo x. Vidimo, da moramo trem četrtinam polnega kota dodati kot α, pa smo na konju: $\varphi = 270^o + \alpha = 290^o$. Komponenti izračunamo po predpisu: $v_x = v \cos\varphi = 10$ m/s $\cos 290^o = 3,42$ m/s in $v_y = v \sin\varphi = 10$ m/s $\sin 290^o = -9,40$ m/s. Komponenta z je enaka nič in vektor zapišemo $\mathbf{v} = (3{,}42$ m/s, - 9,40 m/s, 0). Podobno, bi lahko namesto pozitivnega kota φ določili negativni kot φ', ki ga dobimo tako, da -90^o (smer negativne osi y) prištejemo kot



Slika 13:



Slika 14:

α: $\varphi' = -90^o + \alpha = -90^o + 20^o = -70^o$. Tudi s tem kotom lahko izračunamo komponenti po receptu: $v_x = v\cos\varphi' = 10$ m/s $\cos -70^o = 3,42$ m/s in $v_y = v\sin\varphi = 10$ m/s $\sin -70^o = -9,40$ m/s. Vidimo, da obakrat dobimo enak rezultat.

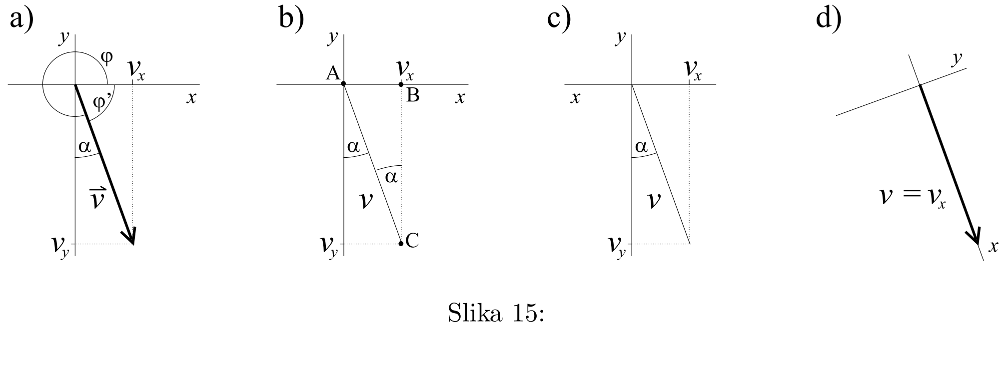
Skica b) nam pomaga rešiti enak primer, na drugačen način. Pri tem bomo uporabili pravila, ki veljajo za pravokotne trikotnike. Na skici je tak trikotnik označen z ABC. Pravi kot je pri oglišču B. Hipotenuza trikotnika AC je dolga toliko, kot je dolg vektor: AC $= v$. Velikost katete AB je enaka komponenti x: AB $= v_x$. Dolžina katete BC pa v tem primeru ni enaka komponenti y (ki je negativna) ampak velikosti te komponente: BC $= |v_y|$. Za pravokotni trikotnik velja: $AB/AC = \sin\alpha$ in $BC/AC = \cos\alpha$ in tako sledi: $v_x = v\sin\alpha = 10$ m/s $\sin 20^o = 3{,}42$ m/s in $v_y = -v\cos\alpha = -10$ m/s $\cos 20^o =$ - 9,40 m/s. Tu smo pri komponenti y sami zapisali negativen predznak, saj nam račun vrne samo velikost komponente, smer pa ugotovimo iz skice. Rezultat je enak kot v primeru a), saj opišemo isti vektor v istem koordinatnem sistemu.

V primeru c) je izbira koordinatnih osi nenavadna. V takem sistemu je kot pozitiven, če ga merimo v smeri urinega kazalce (to najlažje ugotovimo tako, da poiščemo kot med pozitivnim krakom osi x in pozitivnim krakom osi y in ta mora biti $+90^o$). Kot φ, ki nastopa v receptu za računanje komponent, bi sedaj določili tako, da bi trem četrtinam polnega kota odvzeli kot α: $\varphi = 270^o - \alpha = 250^o$ in po receptu sledi $v_x = -3,42$ m/s in $v_y = -9,40$ m/s. V tem koordinatnem sistemu sta obe komponenti negativni, kar vidimo tudi na skici. Velikosti komponent bi lahko izračunali tudi tako, kot v primeru b), le da bi tu morali obema rezultatoma pripisati negativni predznak.

V primeru d) računanje ni potrebno, saj je koordinatni sistem obrnjen v smeri vektorja in je komponenta vektorja vzdolž osi, ki je usmerjena vzdolž vektorja, enaka velikosti vektorja, vse ostale komponente pa so enake nič. V našem primeru, ko je vzdolž vektorja usmerjena os x, je: $v_x = v = 10$ m/s, $v_y = v_z = 0$, oziroma $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Rezultat je zapisan po komponentah drugačen kot prej, čeprav je vektor, ki ga tako opišemo, isti. Tako je zaradi izbire koordinatnega sistema.

Kadarkoli bomo imeli opravka s problemom, kjer vsi vektorji kažejo v isti smer (ali nasprotno) bomo eno od koordinatnih osi obrnili vzdolž vektorjev in bomo računali samo s komponentami v tej smeri. Računanje z vektorji se poenostavi v računanje s skalarji.

Kadar vektorji kažejo v različnih smereh, se koordinatnemu sistemu ne bomo mogli izogniti. Obrniti ga skušamo tako, da bo čimveč vektorjev kazalo vzdolž katere od osi, tako da bomo imeli čimmanj računanja.



Slika 15:

5.0.2 Množenje vektorjev

Množenje vektorja s skalarjem že poznamo. Vektorje pa lahko množimo tudi med sabo. Spoznali bomo dva produkta: skalarni in vektorski.

Skalarni produkt dveh vektorjev označimo s piko na sredini vrstice in je enak produktu velikosti obeh vektorjev in kosinusa medsebojnega kota (s φ zdaj označujemo drugo količino kot prej!):

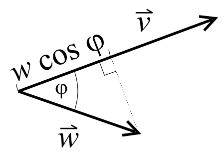
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = vw \cos \varphi.$$

Rezultat je skalar in nima smeri. Produkt je komutativen: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$. Drugače bi lahko produkt opisali tudi takole: skalarni produkt je enak produktu velikosti prvega vektorja in velikosti projekcije drugega vektorja na smer prvega (ali obratno produkt velikosti drugega in velikosti projekcije prvega na smer drugega) (glej sliko 16). Če sta vektorja zapisana s komponentami v nekem koordinatnem sistemu, lahko skalarni produkt izračunamo po predpisu:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je največji, če sta vektorja vzporedna in enak nič, če sta pravokotna. Skalarni produkt vektorja s samim seboj nam vrne kvadrat velikosti vektorja

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$



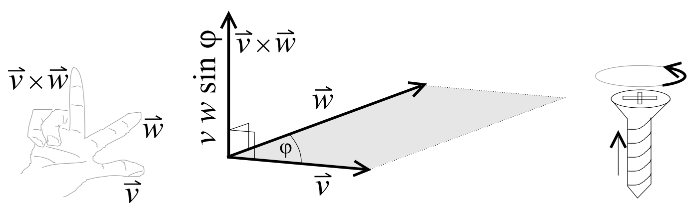
Slika 16:

Vektorski produkt dveh vektorjev označimo s $\times$. Rezultat vektorskega produkta je vektor, ki kaže pravokotno na ravnino, ki jo tvorita vektorja, ki ju množimo (slika 17). Velikost tega vektorja je enaka ploščini paralelograma, ki ga tvorita vektorja:

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = vw \sin \varphi.$$

Kot med vektorjema označimo s φ. Smer vektorja (ali kaže nad ravnino ali pod njo) določimo s pravilom desne roke: če palec desne roke kaže v smeri prvega vektorja in kaže kazalec v smeri drugega vektorja, potem sredinec kaže v smeri vektorskega produkta. Enako velja pravilo desnosučnega vijaka: vektorski produkt kaže v tisto smer, kamor se pomika desnosučni vijak, ki ga vrtimo v tisto smer, da prvi vektor po najkrajši poti zavrtimo v drugi vektor. Vektorski produkt je antikomutativen (spremeni predznak, če zamenjamo vrstni red vektorjev v produktu): $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. Vektorski produkt dveh vektorjev je največji, kadar sta vektorja pravokotna (pri dani dolžini stranic ima pravokotnik največjo ploščino od vseh paralelogramov) in enak nič, kadar sta vzporedna. Če imamo vektorja zapisana s komponentami, bomo vektorski produkt izračunali po naslednjem predpisu:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x).$$



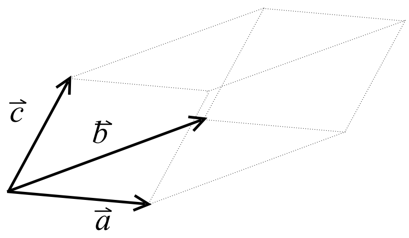
Slika 17:

Mešani produkt treh vektorjev je skalar in je enak prostornini paralepipeda, ki ga trije vektorji razpenjajo:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Vrstni red vektorjev v mešanem produktu lahko ciklično permutiramo. Po komponentah ga izračunamo kot

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x.$$



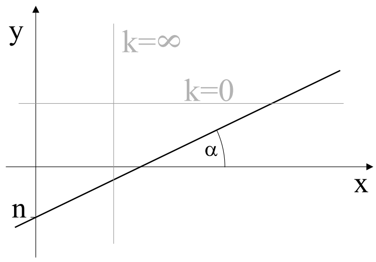
Slika 18:

6 Funkcije

Linearna funkcija je dana z enačbo premice

$$y = kx + n,$$

kjer je smerni koeficient premice enak tangensu naklonskega kota premice $k = \tan\alpha$. Če je $k > 0$ premica narašča, če je $k < 0$ premica pada. Kadar je $k = 0$ potem je premica vzporedna osi x, kadar $k = \infty$ pa je $\alpha = 90^o$ in je premica vzporedna osi y.



Slika 19:

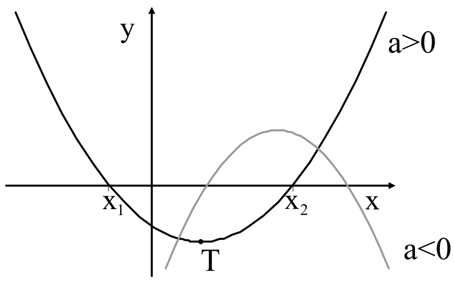
Kvadratna enačba je podana s parabolo

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Če je $a > 0$ je parabola obrnjena tako kot črka U, če pa je $a < 0$ pa na glavo. Parabola seka os x v točkah, ki ju imenujemo ničli funkcije. Če parabola ne seka osi x sta njeni ničli kompleksni. Determinanta parabole je $D = b^2 - 4ac$, ničli pa dobimo kot

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Teme parabole je v točki $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$. V temenu ima parabola ekstrem.



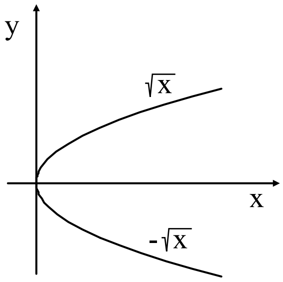
Slika 20:

Poseben primer parabole je korenska funkcija $y^2 = x$. Graf korenske funkcije dobimo tako, da parabolo zavrtimo za 90^o. Korenska funkcija ni enolična; gornji in spodnji krak sta podana s $\sqrt{x}$ in $-\sqrt{x}$. V ničli je graf navpičen, funkcija ni definirana za negativne argumente.

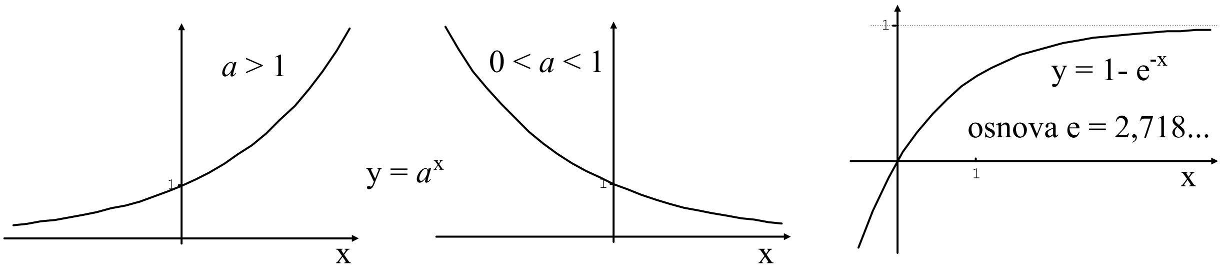
Eksponentna funkcija je dana z enačbo

$$y = a^x.$$

Rezultat je vedno pozitiven. Konstanto a imenujemo tudi osnova eksponentne funkcije. Naravna osnova je enaka $e = 2,71828...$ Število $1/e$ imenujemo tudi Eulerjeva konstanta. Kadar je osnova večja od 1 eksponentna funkcija narašča,



Slika 21:



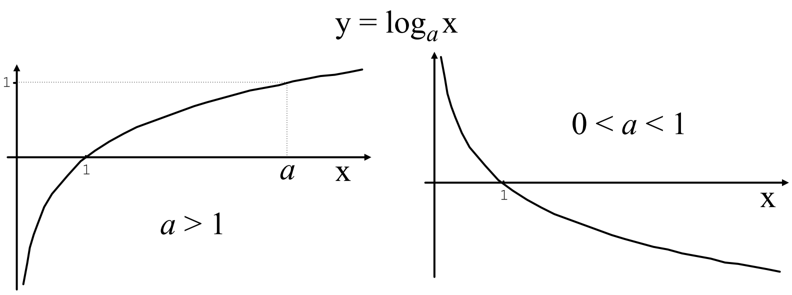
Slika 22:

kadar pa je osnova manjša, pa pada. Osnova mora biti pozitivna. Pogosto zasledimo enačbo, ki opisuje eksponentno približevanje $y = 1 - e^{-x}$, ki je poseben primer eksponentne funkcije.

Eksponentni funkciji inverzna je logaritemska funkcija:

$$y = \log_a x.$$

Velja torej tudi $a^y = x$. Kadar je osnova logaritma enaka e, imenujemo funkcijo naravni logaritem in pišemo $y = \ln x$.



Slika 23:

Od trigonometričnih funkcij v glavnem uporabljamo sinus, kosinus in tangens. Te funkcije so periodične - ponavljajo se s periodo 2π. Pri črtanju teh funkcij si lahko pomagamo z enotsko krožnico.

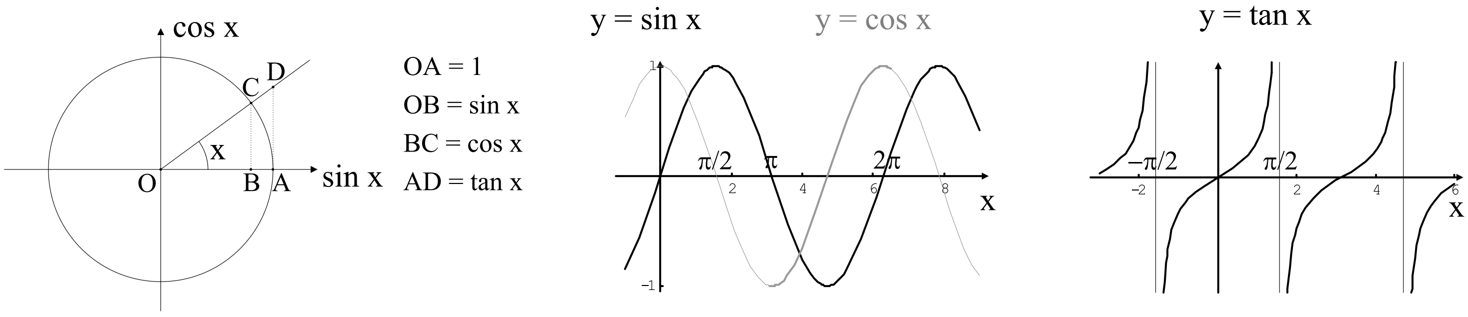
7 Odvod

Odvod funkcije je definiran s kvocientom prirastka funkcije in prirastka spremenljivke v limiti, ko gre prirastek spremenljivke proti nič:

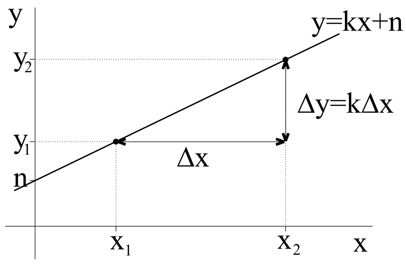
$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Geometrični pomen odvoda bomo lažje razumeli, če si ogledamo graf premice $y = kx + n$ (slika 25). Premica seka os y v točki n in se, kadar x povečamo za Δx, dvigne za $\Delta y = k\Delta x$. k imenujemo smerni koeficient premice. Če imamo v ravnini, ki jo tvorita osi x in y, dani dve točki s koordinatama (x_1, y_1) in (x_2, y_2), potem lahko napišemo enačbo premice kot: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Velja tudi $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ in $n = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$. Večji ko je smerni koeficient, bolj strmo se premica dviga. Kadar je smerni koeficient negativen, se premica spušča, ko se veča x, kadar pa je enak nič, je premica vodoravna.

Graf na sliki 26 kaže funkcijo $f(x)$. Prirastka funkcije Δf, če x povečamo za Δx, sedaj ne moremo izračunati tako enostavno kot pri premici: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Prirastek je odvisen tudi od točke, v kateri prirastek računamo.



Slika 24:

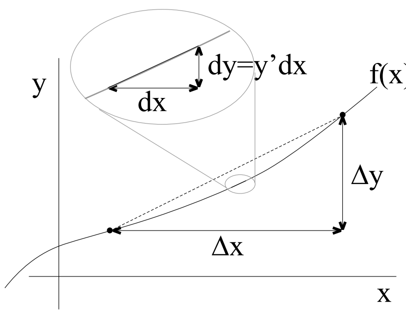


Slika 25:

Točkama $(x, f(x))$ in $(x+\Delta x, f(x)+\Delta f(x))$ lahko pripišemo premico, kije na grafu narisana črtkano. Ta premica se ujema z grafom funkcije le približno. Izkaže se, da (razen v izjemnih primerih) bomo krivuljo dovolj dobro opisali s premico, če vzamemo dovolj majhen interval Δx. V limiti, ko gre ta interval proti nič, ga zapišemo z dx. Kvocient prirastka funkcije $df(x)$ in dx imenujemo odvod funkcije v točki x:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Ta kvocient ustreza smernemu koeficientu premice, ki jo potegnemo skozi točki $(x, f(x))$ in $(x + dx, f(x) + df(x))$. Ti točki sta zelo blizu skupaj in vlimiti preideta v eno točko. Premica je v tem primeru tangenta na krivuljo. Tako torej velja: odvod funkcije v dani točki nam pove smerni koeficient tangente na krivuljo v tej točki. Kadar se krivulja izravna je njen odvod enak nič. V takih točkah ima funkcija ekstrem (lokalni minimum ali maksimum) ali pa je tam ravna.



Slika 26:

Pravila za računanje odvodov:

- Odvod konstante je nič:

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

- Odvod vsote funkcij je enak vsoti odvodov funkcij:

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

- Odvod funkcije pomnožene s konstanto je:

$$\frac{dcf(x)}{dx} = c\frac{df(x)}{dx}.$$

- Odvod produkta dveh funkcij:

$$\frac{df(x)g(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

- Odvod kvocienta dveh funkcij:

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}.$$

- Posredni odvod:

$$\frac{f(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{g(x)}{dx}.$$

Tabela odvodov nekaterih funkcij:

$$\frac{dc}{dx} = 0$$
$$\frac{dx}{dx} = 1$$
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$
$$\frac{d}{dx}\sin kx = k\cos kx$$
$$\frac{d}{dx}\cos kx = -k\sin kx$$
$$\frac{d}{dx}\tan kx = \frac{k}{\cos^2 kx}$$
$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

Funkcijo večih spremenljivk $f(x, y, z, ...)$ lahko odvajamo po katerikoli spremenljivki in tak odvod imenujemo parcialni odvod. Primer parcialnega odvoda funkcije po spremenljivki z:

$$\frac{\partial f(x, y, z, ...)}{\partial z}.$$

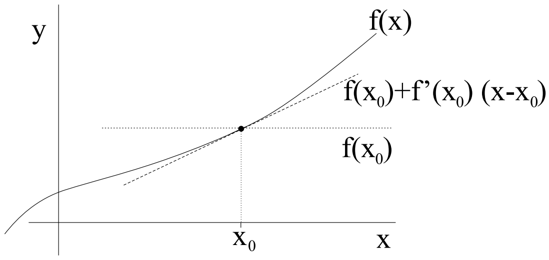
Pri parcialnem odvodu vse ostale spremenljivke upoštevamo kot konstante. Primer: naj bo funkcija spremenljivk y in z dana z: $f(y, z) = yz + y + z$. Parcialni odvod te funkcije po y izračunamo: $\frac{\partial f}{\partial y} = z\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} + 0 = z + 1$. Upoštevali smo, da je $\partial z/\partial y = 0$, saj štejemo spremenljivko z pri odvajanju po y kot konstanto.

Odvode odvodov imenujemo višji odvodi. Tako je drugi odvod enak odvodu prvega odvoda. Tretji odvod je enak odvodu drugega odvoda in tako naprej. Primer: izračunajmo tretji odvod funkcije $f(x) = 3x^4 + 2x^2$. Prvi odvod je enak $f'(x) = 34x^3 + 22x$. Drugi odvod je $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x) = 123x^2 + 4$. Tretji odvod je $\frac{d^3f(x)}{dx^3} = f'''(x) = 362x = 72x$. Četrti odvod je $f^{(iv)} = 72$.

Pri parcialnem odvodu poznamo tudi mešani odvod po različnih spremenljivkah, Primer: naj bo $f(x, y) = x^2y^3$, potem je $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 12xy$.

8 Razvoj funkcije v potenčno vrsto

Vrednost funkcije $f(x)$ lahko poiščemo v okolici točke x_0 tako, da jo aproksimiramo s polinomom poljubne stopnje in poiščemo vrednost polinoma. Postopek je pojasnjen na sliki 27.



Slika 27:

V ničtem približku, bomo funkcijo $f(x)$ v okolici x_0 zamenjali kar s konstatno vrednostjo funkcije v tej točki: $f(x) = f(x_0)$. V naslednjem približku bomo krivuljo funkcije zamenjali s premico, ki gre skozi $f(x_0)$ in ima enak naklon, kot graf funkcije v tej točki: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. V naslednjem približku upoštevamo ukrivljenost krivulje in prištejemo še člen z drugim odvodom in tako dalje. Na ta način razvijemo funkcijo v potenčno vrsto, ki jo imenujemo Taylorjeva vrsta, razvoj pa Taylorjev razvoj. Predpis, kako to naredimo je:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0).$$

Kadar za številko zapišemo klicaj, to pomeni fakulteto ali faktorielo tega števila in računamo jo takole:

$$n! = 1 \cdot 2 ... (n - 1)n.$$

Tako je denimo $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Taylorjev razvoj uporabimo, kadar nam že malo prvih členov dovolj dobro opiše funkcijo in nam tako olajša računanje.

Tabela prvih štirih členov razvoja nekaterih funkcij v potenčno vrsto za majhne vrednosti x ($|x| \ll 1$):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...(m > 0, m \neq 1, m \neq 2)$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 + ...$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + ...(m > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + ...$$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + ...$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{15x^7}{336} + ...$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{15x^7}{336} + ...$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

9 Integral

Naj bo $F(x)$ taka funkcija, da je njen odvod enak $f(x)$. Potem je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x).$$

Integral je torej odvodu inverzna funkcija, saj velja:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Ker je odvod konstante enak nič, lahko funkciji $F(x)$ dodamo poljubno konstanto, pa bo odvod še vedno enak $f(x)$, zato imenujemo funkcijo $F(x)$ nedoločeni integral. Primer: nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2$ je $x^3/3 + c$, kjer je c konstanta. Preverimo: odvod $\frac{d}{dx}(x^3/3 + c) = 3x^2/3 + 0 = x^2$.

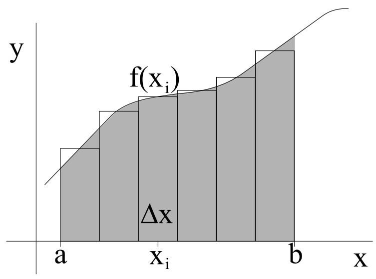
Določen integral funkcije $f(x)$ v mejah od a do b izračunamo z nedoločenim integralom $F(x)$ takole:

$$\int_y^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b).$$

Geometrični pomen določenega integrala:

Razdelimo interval $[a, b]$ na manjše podintervale, široke po Δx (glej sliko 28). Funkcija $f(x)$ je znotraj podintervala $[x_i - \Delta x/2, x_i + \Delta x/2]$ v prvem približku enaka $f(x_i)$. Ploščina pravokotnika $f(x_i)\Delta x$ je približno enaka ploščini pod krivuljo $f(x)$. Če seštejemo ploščine pravokotnikov, ki pokrijejo celotni interval $[a, b]$, dobimo, v limiti, ko gre Δx proti nič, ploščino pod krivuljo na tem intervalu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$



Slika 28:

Osnovna pravila za integracijo:

- konstanto izpostavimo: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$,
- integral vsote (razlike) funkcij je enak vsoti (razliki) integralov funkcij: $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- integriranje po novi spremenljivki $x = g(t)$: $\int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{g(t)}{dt}dt$. Primer: vztrajnostni moment izračunamo po predpisu $J = \int r^2 dm$. Integracijo po masi lahko nadomestimo z integracijo po prostornini, saj velja zveza: $m = \rho V$ in pri konstantni gostoti velja: $J = \int r^2 \rho dV$,
- integriranje po delih (per partes): $\int udv = uv - \int vdu$
- razcep določenega intervala: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, če je $c \in [a, b]$

Tabela osnovnih integralov:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$
$$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c}e^{ca}$$

$$\int xe^{cx}dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx-1)$$
$$\int \ln x dx = x\ln x - x$$
$$\int \sin x dx = -\cos x$$
$$\int \sin^2 cx dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4c}\sin 2cx$$
$$\int \sin^3 cx dx = -\frac{1}{c}\cos cx + \frac{1}{3c}\cos^3 cx$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \cos^2 cx dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4c}\sin 2cx$$
$$\int \cos^3 cx dx = \frac{1}{c}\sin cx - \frac{1}{3c}\sin^3 cx$$
$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$
$$\int \cot x dx = \ln|\sin x|$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x$$
$$\int \cosh x dx = \sinh x$$
$$\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\mathrm{atan}\frac{x}{c}$$
$$\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\ln\frac{c+x}{c-x}(\mathrm{za}|x|<c)$$
$$\int \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x-c}{x+c}(\mathrm{za}|x|>c)$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{c}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+c^2}|$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-c^2}|$$

10 Fizikalne količine

10.1 Fizikalne konstante

svetlobna hitrost	c	$3,00 \times 10^8$ m/s
gravitacijska konstanta	κ	$6,67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Avogadrovo število	N_A	$6,02 \times 10^{26}$ kmol^{-1}
plinska konstanta	R	8314 J/kmol K
influenčna konstanta	ε_0	$8,85 \times 10^{-12}$ As/Vm
indukcijska konstanta	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am
Planckova konstanta	h	$6,63 \times 10^{-34}$ Js
Boltzmannova konstanta	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
osnovni naboj	e_0	$1,60 \times 10^{-19}$ As
masa elektrona	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
masa protona	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg

10.2 Astronomske količine

razdalja od Lune do Zemlje	$3,28 \times 10^8$ m
razdalja od Sonca do Zemlje	1.50×10^{11} m
razdalja do najbližje zvezde (Proxima Centauri)	$4,04 \times 10^{16}$ m
razdalja do središča galaksije	$2,2 \times 10^{20}$ m
razdalja do galaksije Andromeda	$2,1 \times 10^{22}$ m
razdalja do roba vidnega vesolja	$\sim 10^{26}$ m
masa Zemlje	$5,98 \times 10^{24}$ kg
masa Lune	$7,36 \times 10^{22}$ kg
masa Sonca	$1,99 \times 10^{30}$ kg
polmer Zemlje	$6,37 \times 10^6$ m
polmer Lune	$1,74 \times 10^6$ m
polmer Sonca	$6,96 \times 10^8$ m
pospešek na površini Zemlje	9.81 m/s^2

10.3 Lastnosti snovi

gostota [kg/m^3]

voda	1000
morska voda	1024
led	917
zrak (293 K, 1 b)	1,21
zrak (293 K, 50 b)	60,5
jeklo	7860
svinec	11350
aluminij	2710
živo srebro	13600
steklo	2190
beton	2320
les (jelka)	525
Zemlja (povprečje)	5500
Zemlja (sredica)	9500
Zemlja (skorja)	2800
Sonce (povprečje)	1400
jedro bele pritlikavke	10^{10}
uranovo jedro	3×10^{17}
nevtronska zvezda	10^{18}
črna luknja (ena sončna masa)	10^{19}
polistiren	1050
stiropor	100
kost	1900
kri	1060
medzvezdni prostor	10^{-20}
najboljši laboratorijski vakuum	10^{-17}

Youngov elastični modul [10^9 **N/m^2**]

jeklo	200
aluminij	70
steklo	65
beton	30
les (jelka)	13
polistiren	3
kost (stiskanje)	9

hitrost zvoka v sredstvu [m/s]

zrak (273 K)	331
zrak (293 K)	343
helij	965
vodik	1284
voda (273 K)	1402

voda (293 K)	1482
morska voda	1522
aluminij	6420
jeklo	5941
granit	6000

koeficient linearnega temperaturnega raztezka [10^{-6}/K]

led (273 K)	51
svinec	29
aluminij	23
medenina	19
baker	17
jeklo	11
steklo (navadno)	9
steklo (pyrex)	3,2
invar	0,7
kvarc	0,5

specifična toplota [J/kg K]

svinec	128
volfram	134
srebro	236
baker	386
aluminij	900
medenina	380
granit	790
steklo	840
led	2220
živo srebro	140
etanol	2430
morska voda	3900
voda	4190

Sprememba specifične entalpije

snov	**tališče [K]**	**talilna toplota [kJ/kg]**	**vrelišče [K]**	**izparilna tolpota [kJ/kg]**
vodik	14,0	58,0	20,3	455
kisik	54,8	13,9	90,2	213
živo srebro	234	11,4	630	296
voda	273	333	373	2256
svinec	601	23,2	2017	858
srebro	1235	105	2323	2336
baker	1356	207	2868	4730

koeficient toplotne prevodnosti [W/m K]

poliuretanska pena	0,024
svinec	35
aluminij	235
baker	401
srebro	428
suh zrak	0,026
helij	0,15
vodik	0,18
nerjaveče železo	14
steklena volna	0,043
les	0,11
steklo	1,0

Literatura

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentals of Physics, John Wiley, New York (1993).