UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

UVOD
V MERITVE

Uvod v meritve
FIZIKALNI PRAKTIKUM I

Aleš Mohorič
Ljubljana, 2004

Jadranska 19 • 1000 Ljubljana
Tel. +386 1 4766500 • Fax +386 1 2517281

UVOD

Meritve nam razkrivajo naravo in z njimi lahko podpremo ali ovržemo fizikalne modele. O naravi zares vemo le toliko, kot nam o njej povejo meritve. Neko količino izmerimo tako, da zanjo določimo enoto in potem količino neposredno ali posredno primerjamo z enoto. Količina je v splošnem pomenu besede merljiva lastnost, ki jo pripišemo pojavom, telesom ali snovem, kot na primer masa in električni naboj. V ožjem pomenu je količina merljiva lastnost določenega pojava, telesa ali snovi kot na primer masa Lune in električni naboj protona. Fizikalna količina je količina, ki jo lahko uporabimo v matematičnih enačbah. Enota je določena fizikalna količina, definirana in sprejeta z dogovorom. Vrednost fizikalne količine A izrazimo s produktom števila {A} in enote [A]. Število {A} je številska vrednost količine, ki je odvisna od izbire enote. Na primer čas t trajanja šolske ure je t = 45 min = 2700 s. Obakrat smo opisali isto fizikalno količino t, s tem, da je njena številska vrednost 45 drugačna, če za enoto izberemo minute (predstavljene s simbolom min), kot če za enoto izberemo sekunde (predstavljene s simbolom s), ko je številska vrednost enaka 2700. Iz tega primera, upam, je očitno, da fizikalnih količin nikoli ne podajamo brez enot, samo z njihovo številsko vrednostjo.

Ker je raba slovenščine pri študentih na nizkem nivoju, bi se moral vsakdo potruditi po svojih najboljših močeh, da jo izboljša. Pri tem pomaga, če smo pri izražanju kar se da natančni. Zato so spodaj dodane definicije treh osnovnih besed iz uvoda.

enota -e ž (o) s prilastkom
dogovorjena količina za merjenje količin iste vrste: najnižja, osnovna enota; časovna, dolžinska, prostorninska, utežna enota; merske enote; enota frekvence, moči, upora; enota za merjenje pritiska, temperature

količina -e ž (i)
kar opredeljuje kaj glede na število merskih enot ali enot sploh: povečati količino proizvodov; določena količina zdravil / individualna količina dela / vplivati na kakovost in količino hrane / meriti količino padavin / publ., z oslabljenim pomenom dobili so majhno količino blaga malo / mn., nav. ekspr. voda je drla v velikih količinah
♦ fiz. (fizikalna) količina kar je točno opredeljeno zlasti z načinom in enoto merjenja; lingv. izraz količine

meriti -im nedov.
ugotavljati, določati, koliko dogovorjenih enot kaj obsega, vsebuje: meriti blago, prostor, pšenico, vino, zemljišče / meriti dolžino ceste, prostornino posode; meriti frekvenco, hitrost; meriti porabo energije; meriti maščobnost, radioaktivnost; meriti temperaturo in srčni utrip; meriti trajanje poleta; meriti na mernike; meriti v metrih, sekundah; meriti z aparatom, toplomerom; meriti s koraki, palico / meriti na oko po videzu oceniti velikost česa / ekspr. sonce, ura nam meri čas // ekspr. ocenjevati, vrednotiti: meri svoje delo in uspehe; ljubezni ne merimo po besedah; vse ljudi meri le po sebi; razlastitev je meril samo s pojmom osebne pravice in svobode / lepi konji, jih je meril Janez z očmi strokovnjaka

Namen Fizkalnega praktikuma je, da se naučite pravilnega eksperimentalnega dela, osnov merjenja, obdelave meritev, prikaza rezultatov in povezave med teorijo in naravnimi pojavi ter spoznate osnovne merilce fizikalnih količin. Spoznali boste, da so meritve naravnih pojavov v osnovi obremenjene z napako, ki pa jo lahko z natančnim delom in skrbno izbiro metode merjenja zmanjšamo.

Pouk je organiziran tako, da vsak teden opravljate eno od vaj po spisku, ki vam ga na začetku semestra predstavijo asistenti in je obešen ob vratih na steni. Vsakič imate na voljo štiri šolske ure (ker delate brez odmorov, to znese polne tri ure), vendar je praviloma zadnja šolska ura namenjena obdelavi podatkov. Opraviti morate 21 vaj. Vse. Ker sta dve vaji krajši, jih opravljate v enem sklopu. Vaje opravljate po predpisanem vrstnem redu. Če kdaj manjkate, potem naslednjič opravljate vajo, ki je takrat na vrsti, saj bo vajo, ki ste jo izpustili, verjetno opravljal nekdo drug. Izpuščeno vajo boste morali nadoknaditi na koncu šolskega leta. Uvoda v meritve ni. Vse potrebno izveste iz teh skript, če pa vam kaj ni jasno, povprašajte asistenta, ki vodi vašo skupino.

Vaje opravljate sami in nanje se dobro pripravite vnaprej. Na vajo se pripravite tako, da natančno preberete navodilo za vajo. Navodilo je sestavljeno iz uvoda, kjer je razložena teorija in namen vaje, ter praktičnega navodila za izvedbo vaje. Če vam karkoli v navodilu ni jasno, najprej poiščite razlago v primernem učbeniku in šele nato povprašajte asistenta. V pripravo sodi tudi to, da v laboratorijskem dnevniku (o njem več nekoliko kasneje) pripravite spisek potrebščin in tabele za meritve, ki jih morate opraviti med vajo. Primerno pripravljeni boste vajo lahko izvedli tudi hitreje od predvidenih 135 minut in se boste od nje več naučili. Če na vajo ne boste prišli pripravljeni, vaje ne boste smeli opravljati, saj neznanje lahko povzroči nesrečo prav gotovo pa vajo, na katero niste pripravljeni, opravljate dalj časa kot sicer. V kasnejših letih, ko boste kot gostje opravljali meritve v laboratorijih po svetu, boste zatrdno vedeli, da časa nikoli ne bo na odmet. Vse potrebno za vajo je zbrano na mestu, kjer vajo opravljate. Za potrebščine, ki manjkajo, povprašajte pri asistentu. Potrebščine, ki jih dobite pri asistentu, morate po opravljeni vaji vrniti. Ostalo pospravite tako, kot je bilo, ko ste z vajo začeli.

Na tem mestu sledi beseda o etiki v znanosti in znanstvenem pouku. Kadar berete znanstveni članek v ugledni reviji (npr. Physical Review Letters) lahko v splošnem verjamete, da so v članku pošteno predstavljena opažanja avtorjev. Lahko dvomite interpretaciji ali teoriji, s katero so rezultati pojasnjeni, vendar pa lahko pričakujete, da boste dobili enake rezultate, če boste izvedli enako meritev, kot je opisana v članku. V znanosti je narava najstrožji in nepristranski sodnik in, če se rezultati kasnejših poskusov razlikujejo od objavljenih meritev za več, kot je njihova ocenjena napaka, potem ugled avtorjev napačnih rezultatov upade. Pri odkritih prevarah pa je ogrožena celo kariera znanstvenika. Zato so resni znanstveniki zelo previdni pri zapisovanju in obdelovanju podatkov ter poročanju rezultatov in njihovih napak. Pri vajah ne goljufajte, ampak zapišite svoje meritve, ki jih boste kasneje predstavili in zagovarjali. Kdaj se zgodi, da so rezultati napačni zaradi napake pri meritvi, pokvarjenih merilcev, napačnega razumevanja ali pa zaradi napake pri računanju rezultata. Poskusite odkriti vire napak in jih odpraviti, če pa vam ne uspe, poprosite za pomoč asistenta. Na napakah se učimo in zato obdelujte meritve kar se da sproti, da napake odkrijete in jih naslednjič ne ponovite. Ponarejanje ali izmišljanje podatkov ter prepisovanje od drugih je resen prekršek in bo ustrezno kaznovano. Lepa praksa je, da svoje rezultate, še posebej, če merite kakšno od dobro znanih naravnih konstant ali lastnosti snovi, primerjate s podatki v kemijskih ali fizikalnih priročnikih. Primerna referenca je denimo Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press (en izvod stoji v fizikalni knjižnici). Poskusite z danimi pripomočki čimbolj natančno izmeriti rezultat in potem primerjati, ali se rezultat v okviru napak ujema s podatkom, ki ga dobite v priročniku. Kadar je ujemanje slabo, poskusite razumeti, zakaj je do razlike prišlo. Zaupanje v rezultat dosežete lahko le tako, da meritev večkrat ponovite. Naj bo meritev navidez še tako slaba, jo boste morali zagovarjati. Važno je, da razumete, kaj ste opazovali in merili, ter kaj lahko vpliva na rezultat.

Na vaje prihajajte točno. Obisk je obvezen. Končati morate vse vaje. Vajo končate, ko uspešno opravite zagovor pri asistentu. Kadar se vam zatakne pri izvedbi vaje, prosite za pomoč asistenta. Morebitne izostanke boste morali nadoknaditi na koncu leta, ko skupina preneha z rednim delom. Z vašim asistentom se dogovorite kako boste nadoknadili zaostanke.

Pri merjenju, kjerkoli in kadarkoli, uporabljajte laboratorijski dnevnik. Je najpomembnejši dokaz vašega dela. Vanj vpisujete vse podatke, ki utegnejo vplivati na rezultate merjenja. Ko naberemo dovolj izkušenj, vemo, kateri podatki so potrebni, če pa nismo prepričani, podatke zapišemo za rezervo. Pri pisanju dnevnika imejte v mislih, da mora biti dnevnik urejen tako, da bi enako usposobljen bralec iz njega razbral vse potebne rezultate in dokončal vaše delo, če bi bilo potrebno (tudi čez eno leto). Vsako meritev opremite tudi z datumom. Vsak postopek in merilec naj bo v dnevniku opisan, skupaj z natančnostjo merila. Tudi računi, ki iz meritev "pričarajo" rezultate, naj bodo v dnevniku zadovoljivo opisani. Zapisi, tabele in grafi morajo biti pregledni in logični. Prostor naj bo čimbolj smiselno izkoriščen. Pazite na smiseln red zapisovanja. Grafe in slike, ki jih dodate, prilepite, tako da ostanejo na svojem mestu. Podatke, ki jih izmerite in vpisujete v dnevnik, vsaj na grobo obdelajte sproti, da ugotovite ali dobivate smiselne rezultate. Očitno napako (kot je izklopljen merilec, aretirana tehtnica ipd.) lahko tako odkrijete in meritve ne bo potrebno ponavljati na koncu leta. Če merite neko količino pri tem da drugo količino spreminjate, narišite graf, kako je prva količina odvisna od druge. Tako boste lahko sproti ocenili koliko meritev potrebujete. Vsako meritev ponovite vsaj trikrat (če je slučajna napaka večja od sistematične) čimbolj neodvisno, tako da boste lahko ocenili slučajno napako in zmanjšali možnost spodrsljajev (nepravilno branje merila, nezaželeni vplivi okolice ipd.). Po vsaki vaji bo asistent s svojim podpisom potrdil, da ste meritve zapisovali sami in jih niste naknadno prepisali od drugod. Oblika laboratorijskega dnevnika veliko prispeva h končni oceni.

Pri nekaterih vajah meritve opravlja računalnik in velike množice podatkov nima smisla lepiti v dnevnik. Namesto tega naredite v dnevniku graf ali tabelo, ki nazorno predstavljata zbrane podatke. Ravno tako mora biti v dnevniku jasno napisano kaj je shranjeno v določeni datoteki in kako ste do teh podatkov prišli. Imena datotek s podatki na disku naj bodo smiselno in enolično izbrana, tako da boste tudi po dolgem času vedeli kje je kaj.

Meritve morate obdelati po končani vaji in rezultate predstaviti v poročilu. Poročilo naj bo pripravljeno tako, da bo nekdo z enakim znanjem lahko iz njega razbral kaj ste merili in kako. Poročilo naj predstavlja zaključeno celoto. Bodite jedrnati, izražajte se jasno in natančno, uporabljajte lepo slovenščino. Zgledujte se po navodilih za vajo vendar nikakor ne prepisujte teksta. Preberite navodilo tako natančno, da ga boste razumeli, in nato z lastnimi besedami obnovite vsebino. Poročilo lahko napišete v zvezek, ali pa ga pripravite z računalnikom. Podajte teoretično osnovo, vendar ne pretiravajte. V poročilu mora biti opisan tudi eksperiment z merilnimi napravami, postopki in rezultati (vključno z napakami!). Končajte s komentarjem rezultatov in sklepi. Poročilo naj bo čimkrajše in videli boste, da to ni lahko, vendar ste s tem prisiljeni k natančnejšemu pisanju in razmisleku. Slike in grafe naj spremljajo pojasnila. Ne pretiravajte s količino informacij ampak rezultate prikažite čimbolj pregledno. To dostikrat ni lahko.

Poročilo boste zagovarjali pri asistentu v času ene od naslednjih vaj. Potrudite se, da bo poročilo narejeno čimprej, da bo snov še sveža in boste imeli z zagovorom manj težav. Dobro se pripravite, da boste za sam zagovor porabili čimmanj časa. Pri zagovoru boste morali pokazati znanje tako o teoretičnem kot o praktičnem delu poskusa. Vse tri sklope – poročilo (skupaj s preglednim laboratorijskim dnevnikom), razumevanje pojava in poskusa – bodo asistenti upoštevali pri oceni.

Primerna dodatna literatura:
Melissinos, Adrian. Experiments in Modern Physics. Academic Press, 1966.
Bevington, Philip R. Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences. McGraw-Hill.

Pri delu morate paziti na varnost. Največjo potencialno nevarnost pri praktikumu predstavlja elektrika. Vsaka vrsta klopi je opremljena z varnostnim stikalom, s katerim lahko odklopite omrežno napetost. Kadar vidite, da koga trese, se ga ne dotikajte, ker bo streslo tudi vas. Raje ugasnite varnostno stikalo. Pri delu z električnimi vezji bodite previdni. Tudi kadar delamo z nizkonapetostnimi izviri, lahko pride do okvare izvira in s tem do nevarnosti električnega udara. Zato naj vsako vezje, preden ga priključite na napetost, pregleda asistent. Pri delu s plinom je potrebno paziti, da ne pride do nenadziranega uhajanja, kar lahko povzroči eksplozijo. Radioaktivni izvor, ki ga uporabljate pri praktikumu, ima nizko aktivnost, a vendarle ravnajte z njim previdno. Pri prenašanju in premikanju izvora uporabite pinceto. Ravnajte z njim čimkrajši čas. Ne približujte ga očesu. Kadar ga ne uporabljate naj bo v svinčeni omarici. Izvora nikoli ne odnašajte iz sobe.

Praktična navodila za merjenje

- pred merjenjem se dobro pripravite, ponovite teoretične osnove, načrtujte potek dela, izberite primerne merilce in ustrezno merilno tehniko
- ne zapletajte merjenj po nepotrebnem
- pred pričetkom in ob koncu vsake vaje je potrebno preveriti število in stanje meril,
- pri delu z merili delajte z občutkom, bodite natančni in vztrajni,
- pri delu z merilnimi kladicami ali fino obdelanimi površinami pazite, da jih ne umažete (prijemajte jih s pincetami ali bombažnimi rokavicami)
- vse merilne površine (merjenca in merila) je pri natančnem merjenju potrebno dobro očistiti,
- pri meritvah upoštevajte navodila in uporabljajte predpisano merilno silo (raglje pri mikrometru),
- pri natančnejših meritvah morate upoštevati vpliv temperature oz. izvajati meritve v dobro klimatiziranih merilnicah, pri standardni merilni temperaturi,
- pri merilih s skalo odčitujte pod kotom 90^{o} – napaka zaradi paralakse,
- pri 'gostejših' skalah si pomagajte z lupo, oz. uporabite digitalno merilo,
- meritve sproti ocenjujte, da vidite ali je potrebno izmeriti kakšno dodatno količino, ali meritve potekajo tako, kot pričakujete, ali je potrebno spremeniti merilno območje ali pa celo tehniko merjenja
- vse izmerke si sproti, čim natančneje in pregledno zapisujte; ravno tako zapišite vse posebnosti, ki jih pri meritvah opazite (pri tem uporabljajte zdrav razum, to da je v sosednji sobi kolega padel s stola, verjetno ne vpliva na vašo meritev)
- po končani vaji uredite in pospravite merila v pripadajoče škatle ali omare.

ENOTE

Kot rečeno, fizikalne količine podamo z enotami. Fizikalne enote ustrezajo dogovorjeni vrednosti fizikalne količine. Osnovnih fizikalnih količin je sedem, vse ostale so iz njih izpeljane. Osnovne enote skušamo definirati karseda neodvisno. Dogovore o definicijah osnovnih enot sprejemajo na posebnih konferencah. Enote so zbrane v merskih sistemih. V fiziki uporabljamo mednarodni sistem enot SI. To ime je bilo sprejeto na 11. Conférence Générale des Poids et Mesures (1960) in pomeni Système International d'Unités (International System of Units, mednarodna kratica SI). CGPM - Conférence Générale des Poids et Mesures je mednarodna organizacija odgovorna za SI in vključuje več kot 50 držav. Za sistem skrbi posebna ustanova 'Bureau International des Poids et Mesures' – BIPM – je institut za meroslovje, postavljen blizu Pariza pod nadzorom CGPM. Na internetu imajo stran na naslovu: www.bipm.fr. CIPM Comité International des Poids et Mesures – predlaga spremembe SI in je pod nadzorom CGPM. Ta sistem je znan tudi kot mks (meter kilogram sekunda) sistem. Cgs sistem temelji na centimetru, gramu in sekundi. V anglosaksonskem svetu je trdovratno zakoreninjen svojstven sistem enot. V Sloveniji je uporaba enot urejena z Zakonom o meroslovju (Uradni list RS, št. 22/00) in sicer je za izražanje merilnih rezultatov oziroma vrednosti veličin v javni rabi v Republiki Sloveniji v uporabi mednarodni sistem enot SI s pripadajočimi predponami.

Ne glede na prejšnji odstavek se smejo uporabljati tudi naslednje merske enote izven SI:

- enote, ki so določene na podlagi enot SI, a niso desetiški mnogokratniki le-teh,
- enoti, ki se uporabljata poleg enot SI in katerih vrednosti sta dobljeni eksperimentalno,
- enote, ki so dovoljene samo na določenih področjih,
- sestavljene enote.

Imena, simboli in definicije enot SI in dovoljenih enot izven SI so navedene nižje.
Uporaba in pisava enot morata biti skladni s standardi SIST ISO 2955, serije SIST ISO 31 in SIST ISO 1000.

Predpone

Včasih se merjena količina precej razlikuje od enote, s katero jo merimo in takrat uporabimo predpone, ki povejo večkratnik (oz. manjkratnik) enote. Osnovne predpone si sledijo v korakih po tri potenčne rede, razširjene pa so tudi predpone za deset in sto kratnik (oz desetino in stotino). Predpone so zbrane v Tabeli 1. V mednarodnem sistemu enot je kilogram edina osnovna enota s predpono. Predpon se ne niza in zato pri masi predpone uporabljamo z enoto gram (g), ki pa ni osnovna enota.

Faktor	Ime	Simbol	Faktor	Ime	Simbol
10^{24}	iota	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zeta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	eksa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	mikro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	piko	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	ato	a
10^{2}	hekto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	jokto	y

Tabela 1: Predpone

primer: 10^{-6} kg = 1 mg (en miligram) in ne 10^{-6} kg = 1 μkg (en mikrokilogram)

S predponami si olajšamo zapis količine. Uporabimo lahko katerokoli predpono, vendar pa obstajajo pravila lepe uporabe. Pri zapisu si lahko pomagamo tudi z desetiškimi potencami, a se izogibamo zapisu, kjer sta združena desetiška potenca in predpona.

primer: Višino Triglava lahko podamo s predponami na več načinov: 2 864 m = 2,864 km = 286 400 cm = $2,864 \times 10^6$ mm = $2,864 \times 10^3$ m. Prvi opis je primeren, saj je meter osnovna enota, drugi zapis je primer ustrezne uporabe predpone, tretji zapis je primer neustrezne uporabe predpone, četrti zapis je primer neustreznega kombiniranja predpone in potence, zadnji primer pa je tudi ustrezen. Seveda so vsi zapisi matematično pravilni.

Posebno poglavje uporabe predpon je podajanje količin binarnih podatkov. V pravem pomenu predpone kilo je 1 kbit enak 1000 bitom vendar obstaja dogovor, da v računalništvu kilo pomeni 2^{10}=1024. Ustrezno ima tudi predpona mega drugačen pomen M = k k = 2^{10} 2^{10} = 1 048 576. V veljavi je ime kibi in simbol Ki (mebi – Mi, gibi – Gi, tebi – Ti, pebi – Pi, exbi – Ei).

Na tem mestu bi omenil še velika števila. Ne da jih kaj preveč potrebujemo, ampak za naravoslovca se spodobi, da jih pozna po imenu:
10^6 je milijon,
10^9 je milijarda (tudi v angleščini, v amerikanščini pa *billion*),
10^{12} je bilijon (v amerikanščini *trillion*),
10^{18} je trilijon,
10^{24} je kvadrilijon (amerikansko *septillion*),
10^{30} je kvintilijon in tako dalje (vsaka potenca milijona dobi predpono, ki ustreza grškemu številu potence).

Osnovne enote

V grobem lahko razdelimo fizikalne enote na tri skupine: osnovne enote, izpeljane enote in pomožne enote. Osnovnih enot ne moremo izpeljati ampak jih definiramo. Osnovne enote so podane v Tabeli 2.

Fizikalna količina	**Ime**	**Simbol**
dolžina	meter	m
masa	kilogram	kg
čas	sekunda	s
električni tok	amper	A
termodinamična temperatura	kelvin	K
množina snovi	mol	mol
svetilnost	kandela candela	cd

Tabela 2: Osnovne enote

Druge enote SI

Izpeljane enote

Iz osnovnih enot lahko izpeljemo vse ostale fizikalne količine. Nekatere od njih imajo tudi svoje ime.

Fizikalna količina	Ime	Simbol
ploščina	kvadratni meter	m^2
prostornina	kubični meter	m^3
hitrost	meter na sekundo	m/s
pospešek	meter na kvadratno sekundo	m/s^2
gostota (mase)		kg/m^3
magnetna poljska jakost		A/m
svetlost		Cd/m^2

Tabela 3: Nekaj primerov izpeljanih enot

Fizikalna količina	Ime	Simbol	Duge enote	Osnovne enote
frekvenca	hertz	Hz		s^{-1}
sila	newton	N		$m\ kg\ s^{-2}$
tlak, napetost	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
energija, delo, toplota	joule	J	N m	$m^2\ kg\ s^{-2}$
moč*, moč sevanja	watt	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
električni naboj	coulomb	C		s A
električni potencial, napetost	volt	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
kapacitivnost	farad	F	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
električna upornost	ohm	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
električna prevodnost	siemens	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
magnetni pretok	weber	Wb	V s	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
gostota magnetnega pretoka	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
induktivnost	henry	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Celzijeva temperatura	stopinja Celzija	°C		K
svetlobni tok	lumen	lm	cd sr	
osvetljenost	luks, lux	lx	lm/m^2	m^{-2} cd sr
aktivnost	becquerel	Bq		s^{-1}
absorbirana doza	gray	Gy	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
dozni ekvivalent	sievert	Sv	Gy	$m^2\ s^{-2}$
katalitska aktivnost	katal	kat		mol/s

Tabela 4: Dovoljene enote, ki imajo svoje ime, * (1 Posebni imeni za enoto moči: ime volt-amper (simbol: V x A), kadar se uporablja za izražanje navidezne moči izmeničnega električnega toka, in var (simbol: var), kadar se uporablja za izražanje jalove električne moči).

Poleg termodinamske temperature (T), ki jo merimo v kelvinih, se uporablja tudi količino, ki ji lahko rečemo Celzijeva temperatura (t) in je definirana kot razlika dveh termodinamičnih temperatur $t = T - T_0$, kjer je T_0 = 273,15 K. Interval ali razlika temperatur je lahko izražena v kelvinih ali v stopinjah Celzija. Enota stopinja Celzija je enako velika kot kelvin.

Tudi iz enot s svojim imenom lahko izpeljemo druge enote.

primer: navor, ki ga merimo v newton metrih (N m), kar pa, seveda, lahko izrazimo tudi z osnovnimi enotami $m^2\ kg\ s^{-2}$.

Posebna imena za enote so koristna, ker olajšajo zapis količine.

primer: molska entropija: J/mol K ali $m^2\ kg\ s^{-2}\ K\ mol^{-1}$

Izpeljane enote lahko zapišemo na več različnih načinov z drugimi enotami:

primer: moč je lahko 1 W = 1 J/s = 1 V A.

Izpeljane enote z dimenzijo 1

Tretji razred enot so količine brez enot.

Fizikalna količina	Ime	Simbol	Osnovne enote
ravninski kot	radian	rad	$m\ m^{-1}=1$
prostorski kot	steradian	sr	$m^2\ m^{-2} = 1$
ojačitev (log P_1/P_2)	decibel	dB	log(W/W)=1

Tabela 5: Količine brez enot oziroma z enoto 1

Posebne dovoljene enote

Poleg enot v sistemu SI (osnovne enote in njihove izpeljanke) je dovoljena uporaba nekaterih drugih enot.

Količina	Ime	Simbol	Vrednost v osnovnih enotah
čas	minuta	min	1 min = 60 s
	ura	h	1 h = 60 min = 3600 s
	dan	d	1 d =24 h = 86 400 s
ravninski kot	stopinja	º	1º = (π/180) rad
	minuta	‘	1’=(1/60)º = (π/10 800) rad
	sekunda	’’	1’’=(1/60)’ = (π/648 000) rad
	revolucija		1 revolucija = 2 π rad
	gon, grad	gon	1 gon = π/200 rad
prostornina	liter	l	$1\ l = 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$
masa	tona	t	$1\ t = 10^3\ kg$
tlak, napetost	bar	bar	$1\ bar = 10^5\ Pa$

Tabela 6: Dovoljene enote

Predpone se lahko uporabljajo samo z enotami bar, tona, liter in gon.

Enoti, ki se uporabljata poleg enot SI in katerih vrednosti sta dobljeni eksperimentalno sta elektronvolt (eV), ki je enota za energijo, in poenotena atomska masna enota (u). Elektronvolt je kinetična energija, ki jo pridobi elektron, ko v vakuumu preide potencialno razliko 1 V. Poenotena atomska masna enota je dvanajsti del mase atoma nuklida ^{12}C (ogljik). Simbola teh enot lahko uporabimo skupaj s predponami.

Enote in imena enot, ki so dovoljene samo začasno ali na določenih področjih

Nekatere enote so dovoljene začasno.

Količina	Ime	Simbol	Vrednost v osnovnih enotah
dolžina pri plovbi	navtična milja		1 navtična milja = 1852 m
hitrost pri plovbi	vozel		1 n. m./h = 1852/3600 m/s
lomnost optičnih sistemov	dioptrija		1 dioptrija = 1/m
masa dragih kamnov	metrski karat		1 metrski karat = 200 mg
ploščina zemljišča	ar	a	1 a = 100 m^2
dolžinska masa preje in sukanca	teks, tex	tex	1 tex = 10^{-6} kg/m
krvni tlak in tlak drugih telesnih tekočin	milimeter živega srebra	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
dolžina	angstrom	Å	1 Å = 0,1 nm = 10^{-10} m
presek	barn	b	1 b = 100 fm^2 = 10^{-28} m^2
pospešek	gal	Gal	1 Gal = 1 cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2

Tabela 7 Začasno dovoljene enote

Predpone lahko kombiniramo s temi enotami, razen z milimetrom živega srebra.

primer: Sto arov je en hektar 100 a = 1 ha.

V novem sistemu SI pa nekatere stare enote niso več dovoljene.

Ime	Simbol	Vrednost v osnovnih enotah
erg	erg	1 erg = 10^{-7} J
dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
poise	P	1 P = 1 dyn s/cm^2 = 0.1 Pa
stokes	St	1 St = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s
gauss	G	1 G = 10^{-4} T
oersted	Oe	1 Oe = 1000/4 π A/m
maxwell	Mx	1 Mx = 10^{-8} Wb
stilb	sb	1 sb = 1 cd/cm^2 = 10^4 cd/m^2
phot	ph	1 ph = 10^4 lx
fermi	fermi	1 fermi = 1 fm = 10^{-15} m
metrični karat		1 m. k. = 200 mg
torr	Torr	1 Torr = 101 325/760 Pa
standardna atmosfera	atm	1 atm = 101 325 Pa
kilopond	kp	1 kp = 9.806 65 N
mikron	µ	1 µ = 1 µm = 10^{-6} m
kalorija	cal	1 cal = 4,184 J

Tabela 8 Nekaj znanih enot, ki niso več dovoljene

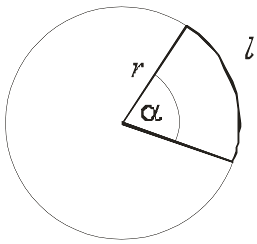
Ime	Vrednost v osnovnih enotah	Ime	Vrednost v osnovnih enotah
akov	56 l	merica	od 15 l do 20 l
biren	80 l	mernik	30 l
bokal	1,5 l	milja	7586 m
cent	100 kg, tudi 56 kg	palec	2,5 cm
cola	2,5 cm	palica	138 cm
četrtinka	¼ l	ped, pedenj	20 cm
četrtnjak	od 30 l do 70 l	pest	10,5 cm
čevelj	31,6 cm	pint(a)	1,5 l
frakelj	1/8 l	polič	7,5 dl
jutro, joh, oral,	57,55 a	polovnik	15 l
kabel	1/10 morske milje	polovnjak	280 l
klaftra	1,896 m	seženj	1,896 m (klaftra)
klaftra	4 m^3	seženj	4 m^3
komolec	44 cm	sod	113,2 l
korec	39 l	sodček	160 l
korec	2000 m^2	šilce	0,3 dl
kvintal	100 kg	škaf, vedro	od 30 l do 60 l
laket	275 cm ali 77 cm	štefan	2 l
lot	17,5 g	štirjak,	140 l
maseljc	3,5 dl	štrtinjak	560 l
mera	1,5 l	unča	35 g
merica	0,4 l	vatel	77 cm

Tabela 9: Stare enote, ki so bile v uporabi v Sloveniji. Opazite lahko predvsem, da so enote samo za maso, prostornino, površino in dolžino, skladno s potrebami

Količine z enoto ena

Kot

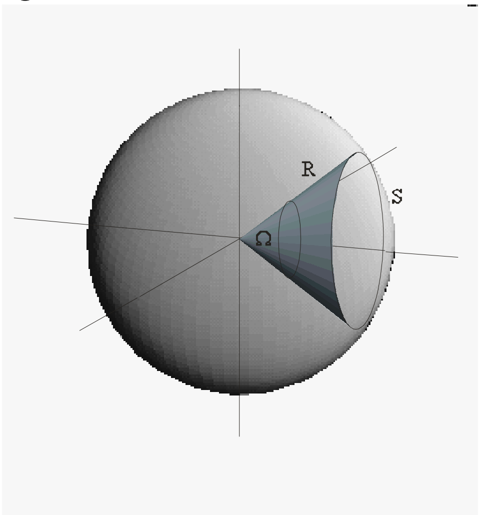
Kot v ravnini običajno merimo s stopinjami, minutami, ki so šestdeseti del stopinje, in sekundami, ki so šestdeseti del minute. Računati je lažje s kotom podanim v radianih; velikost kota α - središčnega za poljuben krog – merimo z razmerjem dolžine loka l, na katerega se ta kot opira, z dolžino polmera r tega kroga: $\alpha = l/r$. Za enoto vzamemo radian; to je kot, ki je središčni kot za lok dolžine, ki je enak polmeru kroga in ima enoto 1 m/m = 1 = 1 rad. Enoto ena lahko izpustimo ali pa jo označimo z rad.



K definiciji radiana.

Zveza med kotom podanim v stopinjah in kotom podanim v radianih je $\alpha\,[°] = 180°\ \alpha\,[\mathrm{rad}]/\pi$.

Prostorski kot merimo s steradiani (sr). En steradian je prostorski kot stožca z vrhom v središču krogle, ki izreže iz površine te krogle ploščino, enako ploščini kvadrata, katerega stranice so enake polmeru krogle: $\Omega = S/R^2$.



K definiciji steradiana

Poln prostorski kot ustreza 4π sr.

Logaritmične količine in enote: level, neper, bel

Dve najpogostejši logaritmični fizikalni količini sta nivo poljske jakosti (*level of a field quantity* L_F) in nivo moči (*level of a power quantity* L_P). Enoti s katerima izražamo ti količini sta neper Np oziroma bel B.

Nivo poljske jakosti je definiran z zvezo $L_F = \ln(F/F_0)$, kjer je F/F_0 razmerje dveh amplitud iste količine; F_0 je referenčna amplituda. Nivo moči je definiran z zvezo $L_P = (1/2)\ \ln(P/P_0)$, kjer je P/P_0 razmerje moči; P_0 je referenčna moč. (Kadar velja $P/P_0 = (F/F_0)^2$, takrat je $L_P = L_F$.)

Razlika med dvema nivojema poljske jakosti (imenovana "field level difference"), ki sta podana z isto refenčno amplitudo F_0, je $\Delta L_F = L_{F1} - L_{F2} = \ln(F_1/F_0) - \ln(F_2/F_0) = \ln(F_1/F_2)$, in ni odvisna od referenčne amplitude F_0. Enako velja za razliko med dvema nivojema moči z isto referenčno močjo P_0 (imenovana "power level difference"): $\Delta L_P = L_{P1} - L_{P2} = \ln(P_1/P_0) - \ln(P_2/P_0) = \ln(P_1/P_2)$.

L_F in L_P sta količini brez dimenzije z enoto 1 a se jih, podobno kot pri kotu in prostorskemu kotu, lahko poda z enoto s posebnim imenom "neper" ali "bel". En neper (1 Np) je nivo poljske jakosti, ko je $F/F_0 = \mathrm{e}$, oziroma $\ln(F/F_0) = 1$. Enako je 1 Np nivo moči, kadar je $P/P_0 = \mathrm{e}^2$, oziroma $(1/2)\ \ln(P/P_0) = 1$.

En bel (1 B) je tak nivo poljske jakosti, da je $F/F_0 = 10^{1/2}$ oziroma $2\ \log_{10}(F/F_0) = 1$. Ekvivalentno je 1 B nivo moči, ko je $P/P_0 = 10$, oziroma $\log_{10}(P/P_0) = 1$. Pri tej definiciji velja, da je številska vrednost L_F izražena z beli $\{L_F\}B = 2\ \lg(F/F_0)$; številska vrednost L_P je v belih $\{L_F\}B = \lg(P/P_0)$; oziroma

$$L_F = 2\ \log(F/F_0)\ \mathrm{B} = 20\ \log(F/F_0)\ \mathrm{dB}$$
$$L_P = \log(P/P_0)\ \mathrm{B} = 10\ \log(P/P_0)\ \mathrm{dB}\ .$$

Ker je količina L_F (ali L_P) neodvisna od enote s katero jo izrazimo, lahko izenačimo L_F v zgornjih izrazih, da dobimo $\ln(F/F_0)$ Np = 2 $\log(F/F_0)$ B, is česar sledi 1 B = ½ ln 10 Np ≈ 1,151 293 Np .

Kadar navajamo vrednosti za L_F and L_P, moramo vedno podati referenčni nivo.

primer: če je referenčna vrednost električnega polja E_0 enaka 1 μV/m, potem
L_E (re 1 μV/m) = -0,58 Np ali $L_{E/(1\ \mu\mathrm{V/m})}$ = -0,58 Np
pomeni, da je podana vrednost električnega polja 0,58 Np pod referenčno vrednostjo E_0 = 1 μV/m.
Podobno pomeni zapis L_p (re 20 μPa) = 25 dB ali $L_{p/(20\ \mu\mathrm{Pa})}$ = 25 dB, da je tlak v zvoku 25 dB nad referenčnim tlakom 20 μPa.

Pisanje količin

V tekstu enote obravnavamo kot navadne samostalnike. Pišemo jih z malo začetnico, razen na začetku stavka. Izjema so Celzijeve stopinje in podobni izrazi. Pascal (ali paskal), newton (kdaj tudi njuten) kelvin ipd. pišemo z malo začetnico. Simbole za enote ne sklanjamo: avto je dolg 5 m in ne 5 m-ov. Prav je kvečjemu pet metrov. Predpone pišemo skupaj z enoto: kilogram in ne kilo gram. Zmnožene enote pišemo s presledkom: paskal sekunda. Deljene enote pa ne pišemo s poševnico ampak vmes vtaknemo predlog na: A/m zapišemo kot amper na meter in ne amper/meter. Potence povemo, posebna primera sta potenci 2 in 3: A^2 je amper na kvadrat, A^3 je amper na kubik, A^4 je pa amper na četrto (potenco). Potenci dva in tri pišemo v primeru ploščine in prostornine pred imenom: kvadratni, kubični meter. Matematične operacije izvajamo samo na simbolih za enote in ne na njihovih imenih: kg^{-2} bo v redu, $(\text{kilogram})^{-2}$ pa ne.

Pri pisanju lahko ločimo tri skupine simbolov: simbole za fizikalne količine, simbole ze enote in opisne simbole.

Simbole za fizikalne količine zapišemo v poševni obliki (italic) z eno samo črko latinske ali grške abecede (pozabi šumnike). Izjemoma, kadar je to v navadi, uporabimo za simbol več črk (primer Reynoldsovo število *Re*). Če nam zmanjkuje črk, lahko uporabimo indekse, apostrofe, tilde... Enote pišemo v pokončni obliki. Opisni simboli so simboli za elemente, določeni matematični znaki in indeksi. Kadar je to mogoče, se držimo ustaljenih simbolov za fizikalne količine. Vendar pa, kljub temu, da uporabljamo ustaljene simbole, vsak simbol vedno natančno definiramo takrat, ko se prvič pojavi. Indeks simbola je pisan poševno, kadar tudi sam pomeni neko količino, in pokončno, kadar se nanaša na določen objekt. Matematične simbole uporabljajte tako, kot je treba. Točen pomen in uporaba množice simbolov je definiran na večih mestih (recimo *Mathematical signs and symbols for use in physical sciences and technology*, ISO 31-11:1992). Matematične funkcije pišite s pokončnimi črkami. Tangens pišite kot tan in ne kot tg. Logaritem z osnovo a pišite $\log_a$, naravni logaritem naj bo ln, desetiški pa lg ali log. Med pokonci napisane spada tudi recimo konstanta e, ki je osnova za eksponentno funkcijo in črka d, ki pomeni odvod. Če vektorje pišete na roko, jim je lažje natakniti puščico, če pa jih pišete na računalnik, jih natipkajte poševno in mastno (bold italic). Ali argumente funkcije objamete z oklepaji ali ne, je odvisno od preglednosti. V vsakem primeru ne izgubite pomena. Opisne simbole pišemo pokončno. Masno število pišemo levo nad simbolom za element, atomsko pa levo pod. Desno pod simbol za element pride število atomov v molekuli. Stopnjo ioniziranosti pišemo desno zgoraj (največ do tri pluse in minuse, drugače pa jih povemo s številko). Pri zapisu števil v slovenščini uporabljamo decimalno vejico, v Ameriki pa decimalno piko (to morate vedeti, kadar pišete prispevek v tujo revijo. Na splošno se vedno, preden začnete pisati za kakšno revijo, pozanimajte, kakšna pravila pisanja imajo v navadi. Pravila najdete na internetu). Znak za množenje dveh števil je lahko pika na sredi vrstice, presledek, ×, x ali pa ga ni (kot recimo med predpono in enoto). Pri pisanju enačb je potrebna večja previdnost, saj poznamo več vrst produktov (skalarni, vektorski, diadni). Če je pred decimalno vejico ničla, jo napišemo.

primer: *F*, F, ***F*** so velikost sile, farad in vektor sile;

m je meter, *m* je ponavadi masa;

Ω, *Ω* je prvič ohm, drugič pa prostorski kot;

drugi Newtonov zakon ($F = m\ a$) lahko načeloma zapišemo tudi kot $s = v\ t$ ampak upam, da se strinjamo, da s tem povzročamo samo nepotrebno zmedo;

c_p je specifična toplota pri konstantnem tlaku, m_p pa masa protona;

E_k k pomeni kinetično energijo, ker je k opisen, je pokončen;

tudi tekoči indeks predstavlja količino (število) in ga napišemo poševno $\Sigma_i x_i$;

$\sin x$ in ne $sin\ x$;

$\sin 2\ x$ lahko razumemo kot $(\sin 2)\ x$ ali pa kot $\sin(2\ x)$;

Re je znak za renij, *Re* je Reynoldsovo število;

C je kapaciteta, C je ogljik ali pa coulomb – no tu bo pa treba biti bolj natančen in povedati, kaj je kaj ali pa malo napeti možgane in sklepati, verjetno da izotop $^{13}\mathrm{C}$ ne pomeni izotop coulomba;

e^x in x^3 - e je pokončen, x pa ne;

$^2_1\mathrm{H}_2^{2+}$ je dvakrat ionizirana (2+ desno zgoraj) molekula dveh (2 desno spodaj) devterijev (levo zgoraj je 2), ki ima en proton (levo spodaj 1);

d*x* ali ∂*x* ne pa *dx* ali ∂*x*;

0,12 ne pa ,12;

ab, $a\ b$, $a \cdot\ b$, $a \times b$;

Enote v tekstu zapisujemo s pokončnimi črkami (font Roman). Simboli za enote so male črke, razen če ni simbol izpeljanka lastnega imena.

primer: m (meter), s (sekunda), V (volt), Pa (paskal), lm (lumen)

V produktu morajo biti enote ločene bodisi s presledkom, bodisi z dvignjeno piko, da ne pride do zmešnjave s predponami.

primer: $1\ \mathrm{m\ s^{-1}} = 1\ \mathrm{m \cdot\ s^{-1}} = 1\ \mathrm{m/s}$. Če bi to pisali brez presledka $1\ \mathrm{ms^{-1}}$ bi to pomenilo kilohertz.

Med številsko vrednostjo in enoto je presledek z izjemo enot za ravninski kot.

primer: temperatura $1\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$ in kot $5{,}3^\mathrm{o}$.

Stopinje pišemo tako, da pri vrhu vrstice (superscript) zapišemo črko o in ne števko 0: $^\mathrm{o}\mathrm{C}$ ne $^0\mathrm{C}$.

Za ulomljene enote velja, da mora biti jasno, kaj je v števcu in kaj v imenovalcu, pri čemer se izogibamo dvojnim ulomkom. Če je v imenovalcu več enot, jih pišemo z negativnimi eksponenti, ali pa sledijo poševnici zbrani v oklepaj.

primer: m/s^2 ali $m\ s^{-2}$ a ne m/s/s
$m\ kg/(s^3\ A)$ ali $m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$ toda ne $m\ kg/s^3/A$ ali $m\ kg/s^3\ A$

Pri pisanju ne kombiniramo simbolov z imeni enot.

primer: coulomb na kilogram ali C/kg je v redu coulomb/kg ali C na kilogram pa ne

Predpone se držijo simbola za enoto in se tudi skupaj z njim potencirajo.

primer: $2{,}3\ cm^3 = 2{,}3\ (cm)^3 = 2{,}3\ (10^{-2}\ m)^3 = 2{,}3 \times 10^{-6}\ m^3$
$1\ cm^{-1} = 1\ (cm)^{-1} = 1\ (10^{-2}\ m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$
$5000\ \mu s^{-1} = 5000\ (\mu s)^{-1} = 5000\ (10^{-6}\ s)^{-1} = 5000 \times 10^6\ s^{-1} = 5 \times 10^9\ s^{-1}$
$1\ V/cm = (1\ V)/(10^{-2}\ m) = 10^2\ V/m$

Kadar množimo količine, se izogibajmo predponam pri množici enot.

primer: 10 kV/mm je slabše kot 10 MV/m. Tudi 10 MV ms raje napišemo kot 10 kV s.

Predpone naj ne stojijo v izrazih same zase.

primer: $5 \times 10^6/m^3$ bo vredu, $5\ M/m^3$ pa ne.

Kilogram je zgodba zase.

primer: 10^{-6} kg = 1 mg (1 miligram) raje ne zapišimo kot 10^{-6} kg = 1 µkg (1 mikrokilogram)

Predpone lahko uporabljamo skupaj s stopinjami Celzija ne pa s kotnimi stopinjami in časovnimi enotami min, h in d.

primer: m°C je v redu, m° ali mmin pa ne.

Pri litru uprabimo samo manjkratnike, pri eV pa večkratnike.

primer: prav: ml, dl, keV, narobe: kl, meV

Vrednost količine se poda z eno samo enoto. Izjema so koti, kjer pa minute in sekunde raje pretvorimo v decimalne dele stopinje, razen v kartografiji in astronomiji.

primer: l = 7,342 m ne pa l = 7 m 34 cm 2 mm*;* kot 14,20° je lahko tudi 14°12’

Kadar je količina v pridevniški obliki ni potrebno pisati vezaja.

primer: 5 g utež.

V zapisu količin v enote ne pišemo dodatnih podatkov.

primer: gostota atomov je $10^{23}/m^3$ in ne gostota je 10^{23} atomov/m^3

Kolone v tabelah in osi v grafih naslavljamo smiselno.

primer: pravilno E [V/m], E/(V/m) ali električna poljska jakost (V/m), napačno pa je E (V/m).

Posebej je potrebno paziti pri naštevanju količine. Za uporabo enote je treba smiselno uporabljati matematična pravila pred slovničnimi. Pri podajanju območja se izogibamo pomišljaju, ker se ga lahko razume kot minus.

primer: 11 mm x 11 mm x 5 mm in ne	11 x 11 x 5 mm
225 nm do 2400 nm ali (225 do 2400) nm in ne	225 do 2400 nm
0 °C do 100 °C ali (0 do 100) °C in ne	0 °C - 100 °C
0 V do 5 V ali (0 do 5) V in ne	0 - 5 V
(8,2, 9,0, 9,5, 9,8, 10,0) GHz in ne	8,2, 9,0, 9,5, 9,8, 10,0 GHz

(če ne prej, potem začenja pravilo slovenščine o uporabi decimalne vejice in ne pike tu močno presedati – kaj so zgoraj decimalne vejice in kaj vejice, ki ločijo števila med sabo? Spoznate jih po presledku – za ločilnimi vejicami je presledek)

63,2 m ±0,1 m ali (63,2 ±0,1) m in ne	63,2 ±0,1 m ali 63,2 m ±0,1
129 s - 3 s = 126 s ali (129 - 3) s = 126 s in ne	129 - 3 s = 126 s

Izbira predpone v zapisu količine je odvisna od tega, katera mesta številske vrednosti so pomembna. Poleg tega želimo, da je količina zapisana pregledno. Pri tem upoštevamo običajno prakso na določenem raziskovalnem področju. Na koliko mest lahko zapišemo količino, je omejeno z natančnostjo. Včasih je količina znana bolj točno, kot je potrebno in takrat lahko podamo količino z manj mesti kot bi lahko, nikoli pa ne podamo količine z več mesti, kot jih v resnici lahko določimo. V izrazu l = 1200 m, ne vemo natančno, ali sta zadnji dve ničli pomembni ali ne (ali je količina izmerjena vsaj na meter natančno), v izrazu l = 1,200 km pa te nejasnosti ni. Upam, da je jasno, da ima tudi zapis zadnjih ničel smisel, čeprav same številske vrednosti nič ne spremeni. Količina l = 1,2 km je izmerjena (in podana) z manjšo natančnostjo.

Pri zapisu naj bo številska vrednost med 0,1 in 1000, predpona pa naj bo simbol, ki predstavlja deset na potenco, ki je večkratnik števila tri. Kadar ne vemo, kakšen zapis izbrati, izberemo znanstveni zapis z mantiso in desetiško potenco.

primer: 0,00045 kg zapišemo 0,45 g ali 4,5 x 10^{-4} kg
5,32 x 10^{7} Hz lahko zapišemo tudi 53,2 MHz

Kadar je enota količine enaka 1 (količniki, relativne vrednosti), enote ne napišemo. Ravno tako enote 1 ne kombiniramo s predpono ampak raje zapišemo z desetiško potenco.

primer: lomni količnik snovi je n = 1,43 × 1 = 1,43
razlika lomnih količnikov Δn = 0,0003 = 3 × 10^{-4} in ne 0,3 m (kjer naj bi m pomenil mili)

V primeru kota in prostorskega kota skušamo narediti izjemo in zapišemo ustrezen simbol rad ali sr. Ravno tako pazimo tudi pri nejasnosti pri pojmu frekvenca. Pogosto frekvenco razumemo kot število obratov ali nihajev v nekem času. Če hočemo frekvenco podati na ta način, moramo biti skladni s prejšnjimi določili (obrat ali nihaj ni osnovna enota).

primer: telo se vrti s frekvenco 3/s, pomeni vrtenje s kotno hitrostjo 3 rad/s oziroma frekvenco 0,95 obratov na sekundo (narobe je 0,95 obratov/s ali vrt/s)

Zapisov z odstotki se izogibajmo, čeprav jih standard ISO dopušča. Odstotek ni nič drugega kot stotina 0,01 = 1 %. Promil je ena tisočina 1 ‰ = 1/1000. Izrazi ppm (part per million), ppb in ppt se v SI ne uporabljajo.

Števila zapisuj z arabskimi števkami in ne rimskimi številkami.

V enačbah ne mešamo simbolov za količine in izraze s številko in enoto.

primer: namesto v= 3 m/t napišite raje $v=l_0/t$; l_0 = 3 m

Grške črke

Pogosto simbole in druge količine v fiziki označujemo z grškimi črkami.

črka	velika tiskana	mala tiskana
alfa	Α	α
beta	Β	β
gama	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	Ε	ε
zeta	Ζ	ζ
eta	Η	η
theta	Θ	ϑ, θ
jota	Ι	ι
kapa	Κ	κ
lambda	Λ	λ
mi	Μ	μ
ni	Ν	ν
ksi	Ξ	ξ
omikron	Ο	ο
pi	Π	π
ro	Ρ	ρ
sigma	Σ	σ
tau	Τ	τ
ipsilon	Υ	υ
fi	Φ	φ, ϕ
hi	Χ	χ
psi	Ψ	ψ
omega	Ω	ω

Tabela 10 Črke grške abecede

Zaokroževanje števil

Kadar število zamenjamo s številom, ki ima manj mest, temu rečemo zaokroževanje. Na koliko mest zaokrožimo dano število, je odvisno od natančnosti, s katero lahko podamo količino. Ne zamenjuj števila decimalnih mest s številom mest (pogovorno – na koliko decimalk je kaj napisano), saj lahko s predpono ali desetiško potenco decimalno vejico poljubno prestavljamo!

primer: 1,234 kg = 1234 g – obe količini sta zapisani na štiri mesta, prva s tremi mesti za decimalno vejico, drugo z nobenim.

Vodeče ničle ne pomenijo mest natančnosti, ničle na koncu pa!

primer: 0,0023 je zapisano na dve mesti natančno ($2{,}3 \times 10^{-3}$), 0,002300 pa na štiri mesta
Pri zaokroževanju se držimo sledečih pravil:

1. Kadar je prva števka, ki jo zavržemo manjša od 5, se števka na mestu, ki ga še obdržimo, ne spremeni
   primer: 5,3149632 zaokroženo na tri mesta zapišemo kot 5,31
2. Kadar je prva števka, ki jo izpustimo večja od 5, števko na zadnjem mestu povečamo za eno; če je zadnja števka enaka 9, zapišemo 0 in povečamo za ena števko na prejšnjem mestu (in tako naprej)
   primer: število 5,3149632 postane 5,315, kadar ga zapišemo na štiri mesta
   isto število zaokroženo na pet mest je 5,3150
   3,89974 zaokroženo na štiri mesta pride 3,900 (skupaj z ničlama)
3. Če se niz cifer, ki jih zavržemo, prične s 5 in je katera od ostalih cifer v nizu različna od 0 zaokrožimo navzgor. Če so vse ostale števke v nizu enake 0, potem zadnje mesto pustimo tako kot je, če je sodo, če je liho, pa ga zokrožimo navzgor.
   primer: 12,345001 zaokroženo na štiri mesta zapišemo kot 12,35
   12,345000 zaokroženo na štiri mesta zapišemo kot 12,34
   12,335000 zaokroženo na štiri mesta zapišemo kot 12,34

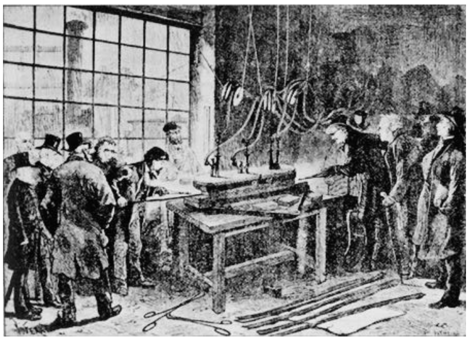
Osnovne enote

Čas

Enota za merjenje časa je sekunda. Ena sekunda ustreza celi množici nihajev cezijeve (^{133}Cs) ure. Frekvenca je določena (in s tem tudi trajanje sekunde) na 9.192.631.770 Hz. Do leta 1956 je bila definicija sekunde vezana na vrtenje Zemlje okoli svoje osi in sicer kot 1/86 400 povprečnega Sončevega dne (med Sončevim in Zemljinim dnevom je razlika – Sončev dan je čas, ki ga potrebuje Zemlja, da se zavrti za toliko, da je Sonce ponovno v isti legi, Zemljin dan pa je čas, ki ga Zemlja potrebuje, da se zavrti za poln kot – razlika je zato, ker se Zemlja vrti tudi okoli Sonca). Izkaže se, da je v tem času preveč nihanj, ki jih ni mogoče dovolj dobro teoretično opisati in zato je bila natančnost tako določene sekunde premajhna. Tako so na 11. CGPM leta 1960 definicijo podali s tropskim letom (z vrtenjem Zemlje okoli Sonca). Leta 1967 (13. CGPM) je astronomsko definicijo sekunde zamenjala atomska, saj se resonančna frekvenca atomov manj spreminja kot kotna hitrost vrtenja Zemlje ali pa nihajna frekvenca nihala ali kvarčnega oscilatorja. Leta 1997 so dopolnili definicijo s tem, da mora biti atom cezija v osnovnem stanju pri temperaturi 0 ^{o}C.

Dolžina

Osnovna enota za dolžino je meter. Definicija metra je bila sprejeta na 17. CGPM, leta 1983. Meter je definiran z razdaljo, ki jo v vakuumu prepotuje svetloba v časovnem intervalu 1/299 792 458 sekunde.



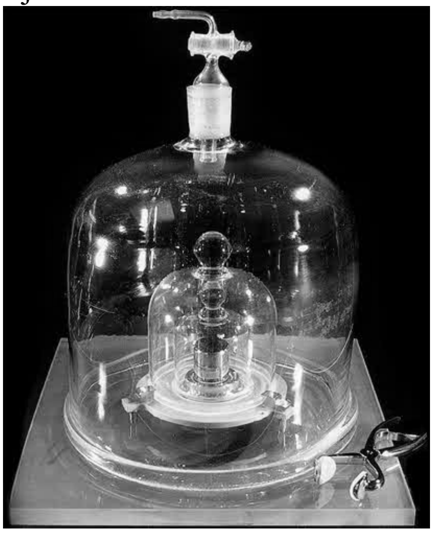
Pojem metra je znan že od 18. stoletja dalje. Tedaj sta bili razširjeni dve definiciji. Po eni definiciji je bil meter enak dolžini matematičnega nihaja s periodo nihanja 2 s po drugi pa je bil meter enak desetinki milijonine poldnevnika vzdolž enega kvadranta (četrtina Zemljinega obsega). Kmalu po francoski revoluciji, leta 1791, so se v francoski akademiji odločili za drugo definicijo, saj je nihajni čas nihala odvisen od gravitacijskega pospeška.

Tako je bil meter določen kot 10^{-7} del četrtine poldnevnika, ki teče od severnega pola, skozi Pariz, do ekvatorja. Meter so določili tako, da so pomerili (6 let) poldnevnik, ki teče od Dunquerqueja na francoski obali, do Barcelone v Španiji. Prvi prototip je bil prekratek za 0,2 mm, ker je bila sploščenost Zemlje, zaradi njenega vrtenja okoli lastne osi, narobe izračunana. A je prototip kljub temu postal standard. Na sliki je prikazano vlivanje zlitine platine in iridija (zlitina 1874) v prameter. Leta 1889 so naredili nov mednarodni prototip iz zlitine platine in 10 procentov iridija, ki je bil natančen do 0,0001, kadar je bil pri temperaturi tališča ledu. Leta 1927 so na 1. CGPM meter na novo definirali kot razdaljo med zarezama na prametru, ki ga hranijo na BIPM pri 0 ^{o}C in normalnem zračnem tlaku, vodoravno podprtega na dveh valjastih podpornikih, katerih premer mora biti večji od 1 cm. Podpornika morata biti 571 mm narazen.

Definicijo s prametrom je leta 1960 zamenjala definicija z valovno dolžino svetlobe, ki jo izseva izotop kriptona z masnim številom 86. Ta definicija je bila na koncu zamenjana z danes veljavno, ki privzame svetlobno hitrost v vakuumu kot osnovno fizikalno konstanto s točno določeno vrednostjo. Originalni prameter še vedno hranijo v Parizu. Razdaljo sedaj natančno določijo na dva načina. Pri prvem merijo čas, ki ga potrebuje kratek svetlobni sunek, da prepotuje to razdaljo in nato izračunajo razdaljo iz časa. Ta metoda je primerna za meritve večjih razdalj, pri čemer je potrebno paziti na vpliv gravitacije. Na drug način merijo razdalje z interferometri. Z izviri svetlobe z znano in stabilno valovno dolžino lahko merijo razdalje do 100 m z natančnostjo do 10^{-9}. Pomembnost natančne meritve razdalj nakazuje dejstvo, da so na začetku dvajsetega stoletja poskusili priviti 1 207 različnih kombinacij matic in vijakov, ki naj bi vsi imeli enake dimenzije, pa jim je to uspelo le pri 8 % kombinacij.

Masa

Osnovna enota za maso je kilogram. Kilogram je bil definiran na 3. CGPM, leta 1901. Kilogram je določen s prakilogramom. Prakilogram je spravljen v Franciji. Pospešeno se išče nova, atomska definicija. Približno mu ustreza masa enega litra vode pri 4,5 ^{o}C in kar je v začetku tudi veljalo kot definicija. Leta 1889 so izdelali prakilogram iz zlitine platine in iridija, ki je na sliki. Spravljen je na IBMP. Kilogram je bil definiran že na 1. CGPM, na 3. konferenci so samo razjasnili nejasnosti med maso in težo.



Z definicijo kilograma so težave, saj mednarodni prototip ni popolnoma stabilen, poleg tega pa niti ne moremo ugotoviti spremembe mase, saj ni standarda, s katerim bi ga primerjali. Kilogram je poleg tega edina osnovna enota, ki je definirana z lastnostjo ročnega izdelka. Od tu sledi množica praktičnih problemov pri razširjanju standarda. Vseh šest ostalih osnovnih enot je definiranih z naravnimi konstantami in jih lahko reproducirajo na drugi strani sveta, samo s tem, da sledijo navodilom izdelave. Čeprav je prototip kilograma določen popolnoma natančno, pa so kopije etalonov slejkoprej netočne do ±2 mikrogramov. Poleg vsega je opaziti tudi, da se mase različnih kilogramskih etalonov spreminjajo do 2 microgramov na leto. Sam postopek primerjana prototipov je zelo zapleten in prototip mora običajno počivati pol leta po uporabi in nato čiščenju. Postopek čiščenja je zapleten in predpisan (ima celo ime Nettoyage-lavage): poteka v dveh stopnjah – čiščenje z raztopino in izpiranje s paro. Najprej očistijo kos jelenove kožice z raztopino etanola in etra. S to kožico nato natrejo utež z isto raztopino. Utež sperejo s curkom pare iz destilirane vode. Proces traja 20 min. Očisti se vse površine uteži. Definicijo kilograma bi radi spremenili. Predlogi gredo v več smeri. En način je z Wattovo tehtnico, kjer kilogram definirajo iz enote moči. Pri tem se uporablja tehtnica na električni tok (taka kot pri definiciji ampera). Kilogram je določen s Planckovo konstanto, potrebne pa so še meritve enote volt (Josephsonovo križišče), ohm (preko kvantiziranega Hallovega efekta), dolžine, časa in gravitacijskega pospeška. Slednji način povezuje maso kilograma z določenim številom silicijevih atomov. Masa silicijeve kroglice m, je določena z enačbo $m = M_m V/N_A v_0$, kjer je M_m molska masa silicija (določena s spektrometrijo), V prostornina silicijeve kroglice, ki se jo določi z interferenco svetlobe, N_A avogadrovo število, v_0 pa prostornina silicijevega atoma, ki jo določijo z uklonom X-žarkov. Problem te definicije so oksidne plasti na kristalu silicija.

Pri metodi z akumulacijo ionov zlata ^{197}Au, izbruha ionski izvir ione na tehtnico. Število atomov določijo iz električnega toka, ki je potreben za nevtralizacijo nabranega zlata.

Pri definiciji z lebdenjem superprevodnika kilogram povežejo z električnimi količinami definiranimi z Josephsonovim in kvantnim Hallovim efektom, podobno kot pri Wattovi tehtnici. Tu superprevodno telo lebdi v magnetnem polju superprevodne tuljave. Tok, ki je za to potreben, definira maso telesa. S temi poskusi bi radi dosegli natančnost definicije do 10^{-8}.

Temperatura

Temperaturo merimo v kelvinih. Kelvin je bil prvič definiran na 10. CGPM, leta 1954, takrat še s stopinjami, kar je bilo spremenjeno leta 1967 (13. CGPM). En kelvin je enak 1/273,16 termodinamične temperature trojne točke vode. Zaradi navade temperaturo pogosto navajamo tudi z razliko od temperature ledišča vode pri normalnem zračnem tlaku T_0 = 273,15 K. Ta temperaturna razlika je znana tudi kot Celzijeva temperatura z enoto stopinje Celzija enake velikosti kot je kelvin. Stopinje Celzija so tudi dovoljene v SI vendar moramo paziti, kako z njimi računamo.

Od leta 1990 je definirana procedura ITS-90 ('The International Temperature Scale of 1990' brošura, ISBN 0114800596) s katero se kalibrira termometre tako, da določenim fiksnim točkam (tališča sedmih kovin, tališče galija, trojna točka vode, živega srebra in štirih plinov, vrelišče vodika pri dveh različnih tlakih) pripiše temperaturo. S temi točkami je pokrita celotna temperaturna skala, ki jo lahko merimo. Določeni so tudi termometri, s katerimi merimo temperaturo v določenih temperaturnih območjih (npr. standardni platinski uporovni termometer za območje med 13,8 K in 961,78 ^{o}C, nad to temperaturo pa se uporablja radiacijske termometre).

Tok

Tok merimo z amperi. Mednarodni enoti za tok in upor so vpeljali na International Electrical Congress v Chicagu leta 1893. Definiciji ampera in ohma so potrdili na International Conference of London leta 1908. Zadnja definicija ampera je bila sprejeta na 9. CGPM, leta 1948. Amper je konstantni električni tok, ki bi pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 m, povzročil med njima silo 2 x 10^{-7} newtona na meter dolžine. S tako definicijo ampera je vrednost indukcijske konstante μ_0 določena na $4\ \pi \times 10^{-7}$ H/m.

Množina snovi

Ali je to sploh fizikalna količina? Osnovna enota je ducat, eh, ne, mol, definiran na 14. CGPM, leta 1971, kot množina snovi v sistemu, ki vsebuje toliko osnovnih edink (entitet), kolikor je atomov v 0,012 kilograma ogljika. Pri uporabi mola je treba navesti osnovne edinke (entitete), ki so lahko atomi, molekule, ioni, elektroni, drugi delci ali določene skupine takšnih delcev. V definiciji je mišljen nevezan ogljik v osnovnem stanju. Včasih so v kemiji za navedbo količine uporabljali enote kot sta 'gram-atom' in 'gram-molekula'. Te enote so bile neposredno povezane za 'atomsko težo' in 'molekulsko težo', ki so v bistvu relativne mase. 'Atomska teža' je bila v začetku podana z atomsko maso kisika, za katero je bilo privzeto, da je enaka 16. Kasneje so odkrili izotope in fiziki so 16 pripisali enemu od izotopov, kemiki pa mešanici izotopov 16, 17 in 18. Končno je 1959/60 prišlo do sporazuma med International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) in International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), da 12 točno ustreza relativni atomski masi izotopa ogljika z masnim številom 12 (^{12}C). Enoto količine so nato določili tako, da so podali maso tega izotopa, ki ustreza količini enega mola in ta masa je bila postavljena točno na 0,012 kg. Torej mol ne more biti bolj točno določen, kot je masa, saj je njegova definicija vezana na maso.

Svetilnost

Zelo nerad (ampak naj ji bo, ker je že na seznamu) uvrstim to količino med osnovne količine. Enota zanjo je kandela (candela). Človek bi rekel, takole po spominu, da je bila ta količina prvič definirana, še preden so ljudje prav dobro vedeli, kaj to svetloba je; kaj šele, da bi zanjo imeli ustrezne (objektivne) merilce. V začetku je imela vsaka država svojo definicijo in še to slabo. Leta 1909 so ZDA, Francija in VB sprejele definicijo mednarodne sveče, ki se je naslanjala na žarnico z ogljikovo nitko. V Nemčiji je bila v tem času v uporabi Hafnerjeva sveča, definirana s standardnim plamenom in kakšno desetino manjša od mednarodne sveče. Toda standard, ki bi temeljil na razžarjeni nitki in bi bil odvisen od stabilnosti svetilke, ne bi bil nikoli dovolj natančen in zadovoljiv. Teorija sevanja črnega telesa je nudila zadostno teoretično osnovo, da je bila leta 1933 sprejeta fotometrična enota, ki je temeljila na svetlobni emisiji črnega telesa (Planckov radiator) segretega na tališče platine (2045 K). To definicijo so pripravili v International Commission on Illumination in CIPM do 1937 in jo oznanili 1946. Potrdili so jo leta 1948 na 9. CGPM, kjer je bilo tudi izbrano novo ime kandela. Leta 1967 so na 13. CGPM definicijo dopolnili. Zaradi težav pri izdelavi Planckovega radiatorja in zaradi novih metod radiometrije so na 16. CGPM leta 1979 na novo definirali kandelo kot svetilnost vira, ki v dani smeri oddaja monokromatsko sevanje frekvence 540×10^{12} Hz in seva z jakostjo 1/683 watta na steradian.

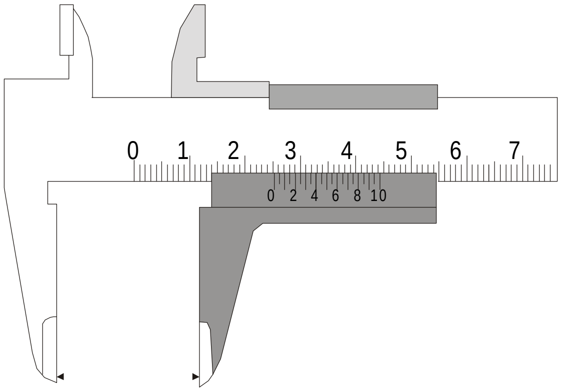
Merilci fizikalnih količin

Čas

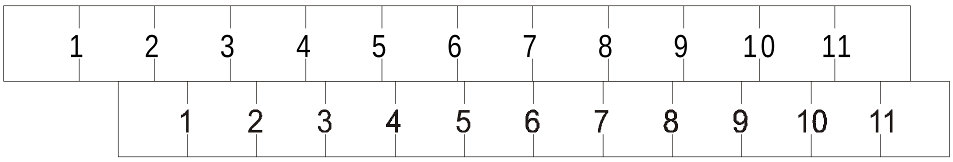
Čas merimo z urami. Štoparice ponavljajo periodično gibanje in pretečeni čas lahko podamo s številom period. Najosnovnejše ure so naravni pojavi: vrtenje Zemlje okoli Sonca - leto - je primer dolge časovne enote, vrtenje Meseca okoli Zemlje in spreminjanje Luninih faz je bilo v mnogi starih kulturah osnova za koledar, vrtenje Zemlje okoli svoje osi pa osnova zamerjenje ur in dnevov. Vsi ti naravni pojavi so periodični in nudijo dobro osnovo zanesljivemu merjenju časa. Iz koledarjev so včasih naredili pravo umetnost, to pa zato, ker se najdaljše omenjene periode (leta) ne da razdeliti na celo število krajših period (dni ali mesecev). Poleg tega je že z definicijo dneva težava, saj se Zemlja na svoji poti okoli Sonca kotali okoli svoje osi in sončni dan (čas potreben, da se Sonce iz opoldanske lege navidezno premakne v opoldansko lego naslednjega dne) se razlikuje od zvezdnega (trajanje enega polnega obrata Zemlje). V preteklosti so za merjenje časa uporabljali razne pripomočke. V antiki je bila v uporabi sončna ura, klipsidra (vodna ura), peščena ura. Galilej je pri ugotavljanju lastnosti nitnega nihala, za štoparico uporabil srčni utrip. V mehanski uri periodično nihanje izvaja nemirka, ki jo poganjajo vzmeti ali uteži. V sodobnih elektronskih urah vibrira majhen kristal iz kvarca (kvarčne ure). Najnatančnejše so atomske ure. Za kalibriranje sekunde uporabljajo cezijevo atomsko uro.

Dolžina

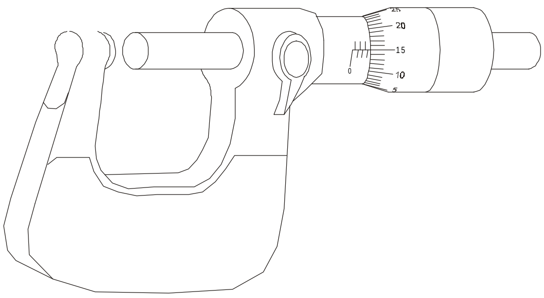
Dolžino so nekdaj merili tako, da so jo primerjali z raznimi deli telesa. Od tod tudi imena, ki jih v Ameriki še vedno srečamo: palec, ped, komolec, laket, čevelj, korak. Problem s tako definicijo je, da ni enolična. Sicer so določene standarde že od nekdaj hranili, a mednarodni standard se je uveljavil šele z definicijo metra. Dolžino (debelino, globino, premer, …) merimo z raznimi merskimi trakovi (šiviljski trak kot primer nenatančnega merila, kovinski trak je že bolj natančen, še posebej, če pazimo na temperaturo in povešanje), mikrometrskimi vijaki, kljunastimi merili, laserjem, sonarjem. Včasih razdalje merimo posredno, tako da opazujemo kak drug pojav, kot naprimer upornost, interferenčni vzorec.



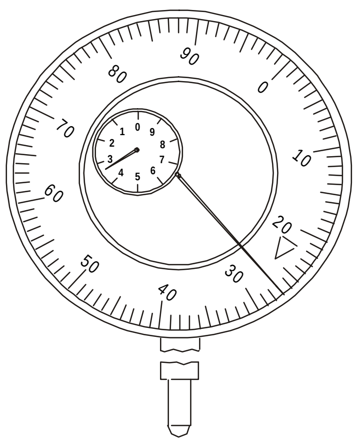
Kljunasto merilo. Z njim merimo dolžine. Z gornjim parom krakov merimo premer vrtin. Z njim lahko izmerimo tudi globino luknje. Za natančnejše odčitavanje ima skala nonijsko merilo. Princip nonija razloži spodnja skica.



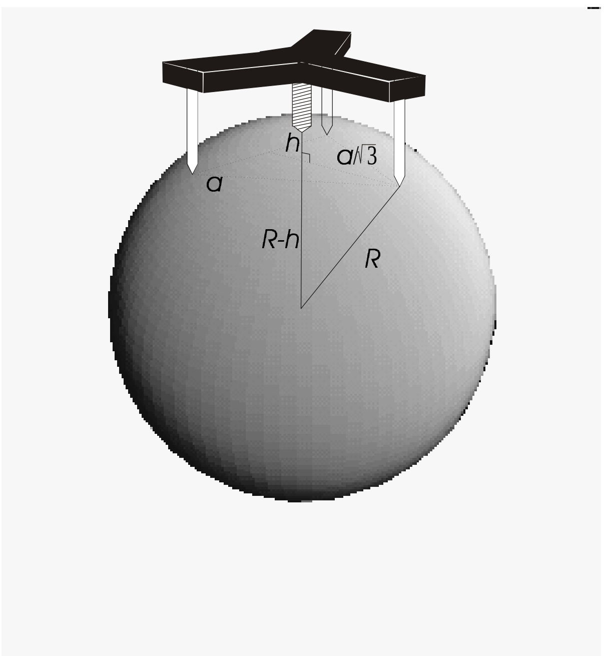
Zgornja skala pomeni merilno skalo. Spodnja skala je razdeljena tako, da pride 11 enot v 10 enot zgornje (lahko bi bilo tudi tako, da bi prišlo 9 enot spodnje v 10 enot zgornje, vendar bi bil v tem primeru razmislek drugačen). Dolžino merjenca odberemo na zgornji skali tam, kjer se začne spodnja skala. Očitno je začetek spodnje skale nekje med 1 in 2 na zgornji skali. Kje točno pa ugotovimo tako, da poiščemo katera enota na spodnji skali se pokrije z enoto na zgornji skali. V našem primeru je to enota 6, ki se pokriva s sedmico zgornje skale. Rezultat merjenja je tako 1,6. Seveda nonijska skala ni rezervirana samo za merilce dolžin.



Mikrometerski vijak: je še posebej natančen merilec majhnih dolžin. Z njm merimo ponavadi premere žic ipd. Merjenec damo med čeljusti in jih z ragljo zapremo. S tem preprečimo, da bi vijak preveč zategnili in s tem deformirali merjenec.



Merilec odmikov ima na dnu tipalo, ki se lahko pomika sem in tja. S primerno umeritvijo ničle, lahko z njim merimo višino vzpetin in kadar ga uporabljamo v kombinaciji s trinožnim stojalom lahko tudi merimo ukrivljenost (krivinski radij) krogel ali leč, kot demonstrira spodnja skica.



S količinami označenimi na skici izpelji vrednost za krivinski radij *R*, če poznaš razmik med nogami trinožnika *a* in višino *h*, do katere je dvignjeno tipalo.

Masa

Maso stehtamo na tehtnici. Uporabimo lahko tehtnico na vzvode. Takšno so uporabljali že stari Rimljani, če ni bila v uporabi že prej. Pri tem si moramo pomagati z utežmi, katerih maso poznamo. Tehtamo lahko tudi z vzmetmi, vendar z njimi merimo prej težo, kot pa maso.

Organisation Internationale de Métrologie Légale definira točnostne razrede za uteži. Uteži razreda E_1 so namenjene sledljivosti nacionalnih masnih etalonov in umerjanju uteži nižjih točnostnih razredov. Uteži razreda E_2 so namenjenje umerjanju uteži nižjih razredov in tehtnic I kakovostnega razreda. Z utežmi razreda F_1 se umerja tehtnice I in II razreda. Z utežmi razreda F_2 se umerja uteži iz razreda M_1 in M_2, tehtnice II razreda, poleg tega pa se jih uporablja pri poslovanju z dragimi kovinami in kamni. Z utežmi iz razreda M_1 umerjamo tehtnice III razreda. Uteži iz razreda M_2 pa so že uporabne za komercialno rabo. Za primer ravnanja z utežmi si lahko pogledate navodila na http://www.npl.co.uk/mass/guidance/handling.pdf.

Natančne uteži so narejene iz zlitine platine in iridija, ker ima veliko gostoto (približno 21.5 g/cm^3) in je zato izpostavljena površina uteži manjša. Tudi vzgon v zraku je zato manjši. Poleg tega je zlitina tudi relativno inertna (ne prihaja do korozije ali patine). Zlitino je možno obdelovati, tako da je dobro zglajena površina dodatno odporna proti vplivom iz okolice. Dodanih 10% iridija poveča trdnost zlitine in zmanjša obrabo.

Maksimalna dovoljena napaka za utež iz razreda ±mg

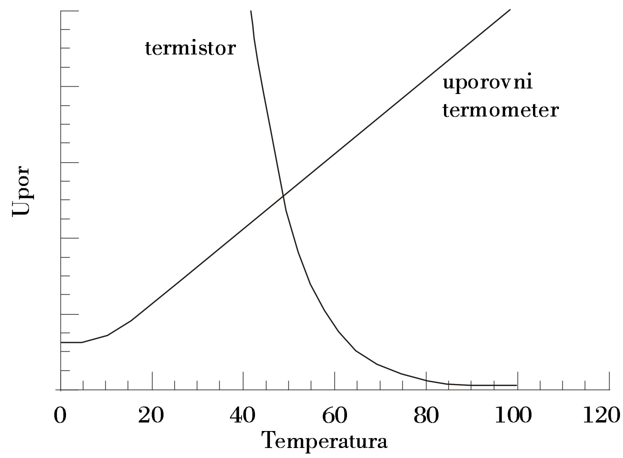
nominalna vrednost	E_1	E_2	F_1	F_2	M_1	M_{1-2}	M_2	M_{2-3}	M_3
5 000 kg			25 000	80 000	250 000	500 000	800 000	1 600 000	2 500 000
2 000 kg			10 000	30 000	100 000	200 000	300 000	600 000	1 000 000
1 000 kg		1 600	5 000	16 000	50 000	100 000	160 000	300 000	500 000
500 kg		800	2 500	8 000	25 000	50 000	80 000	160 000	250 000
200 kg		300	1 000	3 000	10 000	20 000	30 000	60 000	100 000
100 kg		160	500	1 600	5 000	10 000	16 000	30 000	50 000
50 kg	25	80	250	800	2 500	5 000	8 000	16 000	25 000
20 kg	10	30	100	300	1 000		3 000		10 000
10 kg	5	16	50	160	500		1 000		5 000
5 kg	2,5	8	25	80	250		800		2 500
2 kg	1	3	10	30	100		300		1 000
1 kg	0,5	1,6	5	16	50		160		500
500 g	0,25	0,8	2,5	8	25		80		250
200 g	0,1	0,3	1	3	10		30		100
100 g	0,05	0,16	0,5	1,6	5		16		50
50 g	0,03	0,1	0,3	1	3		10		30
20 g	0,025	0,08	0,25	0,8	2,5		8		25
10 g	0,02	0,06	0,2	0,6	2		6		20
5 g	0,016	0,05	0,16	0,5	1,6		5		16
2 g	0,012	0,04	0,12	0,4	1,2		4		12
l g	0,01	0,03	0,1	0,3	1		3		10
500 mg	0,008	0,025	0,08	0,25	0,8		2,5		
200 mg	0,006	0,02	0,06	0,2	0,6		2		
100 mg	0,005	0,016	0,05	0,16	0,5		1,6		
50 mg	0,004	0,012	0,04	0,12	0,4				
20 mg	0,003	0,01	0,03	0,1	0,3				
10 mg	0,003	0,008	0,025	0,08	0,25				
5 mg	0,003	0,006	0,02	0,06	0,2				
2 mg	0,003	0,006	0,02	0,06	0,2				
1 mg	0,003	0,006	0,02	0,06	0,2				

Tehtnice so po direktivi sveta evrope 90/384/EEC razdeljene v štiri razrede. Razdelitev temelji na najmanjšem merljivem intervalu *e*.

razred	interval e	najmanjša obremenitev	največja obremenitev	
			spodnja meja	zgornja meja
I	$e \geq 1$ mg	100 e	50 000 e	
II	0,001 g $\leq e \leq$ 0,05 g 0,1 g $\leq e$	20 e 50 e	100 e 5000 e	100000 e 100000 e
III	0,1 g $\leq e \leq$ 2 g 5 g $\leq e$	20 e 20 e	100 e 500 e	10000 e 10000 e
IV	5 g $\leq e$	10 e	100 e	1000 e

Temperatura

Merimo tako, da merimo kakšno od lastnosti snovi, ki je odvisna od temperature. Pri alkoholnem in živosrebrnem termometru uporabimo lastnost, da se prostornina snovi spremeni, če snov segrejemo. Pri uporovnem termometru, kot je sonda Pt100, merimo upornost snovi, ki se s temperaturo spreminja. Termočlen ali termobaterija, ki jo dobimo tako, da vzporedno vežemo množico termočlenov, pa meri razliko temperatur. Napetost, inducirana med stikoma dveh različnih kovin, je sorazmerna razliki temperatur stikov. Pri pirometru (radiacijski termometer), je tok v fotodiodi odvisen od svetlobnega toka, ki ga seva segreto telo. V Pt100 sondi je platinasta žička oblikovana tako, da je njen upor enak 100 Ω. V tem primeru se upornost s temperaturo spreminja približno po 0,4 Ω/K. Senzorji običajno sledijo standardni krivulji, z določeno toleranco, ki je definirana v mednarodnem standardu IEC 751. Senzorji Pt100 razreda A merijo do ± 0,25 ºC v območju ±200 ºC. Posebej pripravljeni in umerjeni senzorji dosegajo natančnost boljšo od 0,001 °C. Posebne uporovne termometre je možno uporabljati do temperature 962 ºC. Termistor je električni upor, ki se močno spreminja s temperaturo in imajo višjo občutljivost, vendar tudi manjše merilno območje, od običajnih uporovnih termometrov. Upornost termistorjev običajno eksponentno upada s temperaturo. Pogosto so v uporabi v digitalnih termometrih. Spodnji graf primerja temperaturno karakteristiko termistorje in uporovnih termometrov.



Termočleni so majhni, pogosto se jih uporablja v industriji. Sestavljeni so iz dveh neenakih žic sklenjenih v krog. Napetost med prekinjenima žicama je odvisna od temperaturne razlike med točkama, kjer se žici stikata. V uporabi so različne kovine, odvisne od temperaturnega območja, ki ga želimo meriti. Platina in zlitine platine z rodijem se uprablja za visoke temperature do 1600 °C; cenejše nikljeve zlitine so uporabne do 1200 °C; posebne zlitine omogočajo merjenje celo čez 2000 °C. Standard IEC 584 določa natančnost in občutljivost termočlenov. Na primer, termočlen tipa K ima eno žico iz zlitine niklja in kroma in drugo iz zlitine niklja in aluminija. Pri razliki 1000 °C mora biti napetost med žicama 41,276 mV, z nenatančnostjo 0,16 mV. Hladnejši konec termočlena se običajno potopi v mešanico vode in ledu pri 0 ^{o}C, v digitalnih termometrih pa to referenčno temperaturo zazna poseben senzor in termometer jo upošteva v rezultatu. Napetost, ki jo generira termočlen, je tipično med 10 µV in 40 µV za vsako stopinjo.

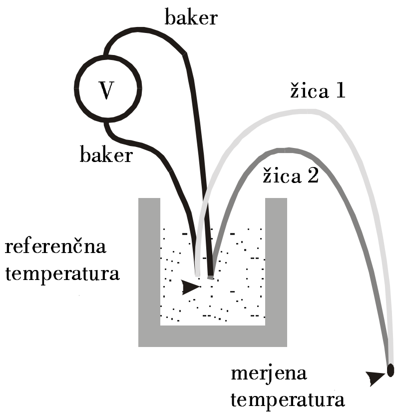


Diagram prikazuje običajno uporabo termočlena.

Kateri termometer uporabimo pri določeni meritvi je odvisno od naše izbire, pri tem pa upoštevamo: temperaturno območje, natančnost, stroške, hitrost odziva, vplive na merjenec ipd.

Za lažjo orientacijo, so v spodnji tabeli nakazana območja, ki jih pokrivajo določeni tipi termometrov.

temperatura ^{o}C	uporovni	termočl.	termistor	dioda	pirometer
-272 do 0					
0 do 50					
50 do 300					
300 do 1000					
nad 1000					

Pirometri merijo sevanje, ki ga oddaja segreto telo. Senzorji so običajno občutljivi na ožjem območju valovnih dolžin svetlobe in tako je potrebno meriti s senzorjem, ki je namenjen danemu območju. Za merjenje višjih temperatur mora biti senzor bolj občutljiv pri kratkih valovnih dolžinah.

Tok

Merimo z ampermetrom. Ampermeter mora imeti majhno notranjo upornost; vežemo ga zaporedno porabniku. Klasičen ampermeter s kazalcem, ima tuljavico, ki jo v ravnovesno lego zavrti polžasta vzmet. Tuljavica je postavljena med pola magneta, tako da jo navor, ki nastane zaradi toka v tuljavici, obrne okoli osi. Zasuk je sorazmeren toku. Elektronski ampermetri merijo tok posredno, preko padca napetosti na pomožnem uporu.

Druge količine

Poleg naštetih osnovnih količin, pri praktikumu srečate še merilce nekaterih drugih količin. Napetost merimo v voltmetrom, ki je porabniku vezan vzporedno. Časovno spremenljivo napetost merimo z osciloskopom ali računalniškimi vmesniki z A/D pretvorbo. Upornost merimo z ohmmetrom. Kote merimo s kotomeri. Običajno jih naredimo tako, da obod krožnice razdelimo na dele – stopinje ali pa še manj. Poskrbimo, da vrh kota postavimo v središče, nato pa pogledamo koliko enot je med krakoma in že poznamo kot. Tlak merimo s tlakomeri. Barometer je na steni, z njim odčitate zračni tlak. Zastojni tlak merimo s Prandtlovo cevjo. Razliko tlakov merimo z U cevko. Če U cevko priključimo na Pitotovo cev, lahko z njo merimo pretok. Silo merimo z dinamometri, ki so kar vzmeti z znanim koeficientom, umerjene tako, da priloženo merilo raztezka naravnost pove silo. Paleta merilcev je še pisana a moramo počasi končati. Na koncu koncev, kaj je merilec zvoka? Mikrofon? Najprej moramo ugotoviti, kaj nam zvok pomeni. Zvok sam po sebi ne meri nobena fizikalna količina. Lahko merimo zgoščine in razredčine oz. bolj natančno tlak v zgoščinah in razredčinah in še to posredno z meritvijo napetosti deformiranega pizoelektričnega kristala, ali pa z inducirano napetostjo v tuljavici, v kateri se premika magnet, ki ga zaniha zvok. Prav tako množico fizikalnih količin ugotavljamo posredno, tako da izmerimo druge količine, ki jih potem z enačbami pretvorimo v željeno količino. Gravitacijski pospešek lahko določite tako, da merite čas, viskoznost pa tudi. No, spektra svetlobe pa ne boste določali z merjenjem časa ampak z merjenjem kota. Lahko pa dolžino merite tako, da merite čas. Pa še prav natančno.

Osnovne fizikalne konstante

Za nameček je tu zbranih nekaj osnovnih fizikalnih konstant. Vrednosti konstant zbira in ureja *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA) (domačo stran imajo na naslovu http://www.codata.org/), ki deluje v okviru *International Council for Science*. Fizikalne konstante so količine, katerih vrednost se ne spreminja. Nekatere od njih so definirane in je njihova vrednost podana popolnoma natančno, druge pa lahko pomerimo. V zadnjem primeru je natančnost meritve v tabeli podana z vrednostjo standardnega odmika v oklepaju za vrednostjo konstante. Vir spodaj naštetih konstant in njihovih napak je P J Mohr and B N Taylor (J. Phys. Chem. Ref. Data, 28(6), 1713-1852 (1999)).

količina	**simbol**	**vrednost**	**enota**	**rel. standardna negotovost**
hitrost svetlobe v vakuumu	c, c_0	299 792 458	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	točno
indukcijska konstanta	μ_0	$4\,\pi \times 10^{-7}$	$\mathrm{N\,A^{-2}}$	točno
influenčna konstanta	ε_0	$8{,}854\,187\,817 \times 10^{-12}$	$\mathrm{F\,m^{-1}}$	točno
gravitacijska konstanta	G	$6{,}673(10) \times 10^{-11}$	$\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$	$1{,}5 \times 10^{-3}$
Planckova konstanta	h	$6{,}626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$	J s	$7{,}8 \times 10^{-8}$
$h/2\pi$	$\hbar$	$1{,}054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$	J s	$7{,}8 \times 10^{-8}$
osnovni naboj	e	$1{,}602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$	A s	$3{,}9 \times 10^{-8}$
Bohrov magneton	μ_B	$927{,}400\,899(37) \times 10^{-26}$	$\mathrm{J\,T^{-1}}$	$4{,}0 \times 10^{-8}$
konstanta fine strukture	α	$7{,}297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$		$3{,}7 \times 10^{-9}$
Bohrov radij	r_B	$0{,}529\,177\,2083(19) \times 10^{-10}$	m	$3{,}7 \times 10^{-9}$
masa elektrona	m_e	$9{,}109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	kg	$7{,}9 \times 10^{-8}$
masa protona	m_p	$1{,}672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$	kg	$7{,}9 \times 10^{-8}$
masa nevtrona	m_n	$1{,}674\,927\,16(13) \times 10^{-27}$	kg	$7{,}9 \times 10^{-8}$
Avogadrovo število	N_A	$6{,}022\,141\,99(47) \times 10^{26}$	$\mathrm{kmol^{-1}}$	$7{,}9 \times 10^{-8}$
atomska masna enota	u	$1{,}660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$	kg	$7{,}9 \times 10^{-8}$
splošna plinska konstanta	R	8 314,472(15)	$\mathrm{J\,kmol^{-1}\,K^{-1}}$	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Boltzmannova konstanta	k	$1{,}380\,6503(24) \times 10^{-23}$	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Stefanova konstanta	σ	$5{,}670\,400(40) \times 10^{-8}$	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$	$7{,}0 \times 10^{-6}$
Wienova konstanta	b	$2{,}897\,7686(51) \times 10^{-3}$	m K	$1{,}7 \times 10^{-6}$
standardna atmosfera	p_0	101 325	Pa	točno
standardni gravitacijski pospešek	g	9,806 65	$\mathrm{m\,s^{-2}}$	točno

Napake

Rezultat meritve je količina, ki jo zapišemo z merskim številom in enoto. Rezultat predstavlja merjeno količino samo do določene mere. To negotovost imenujemo napaka meritve. Napaka je pomemben del rezultata, saj lahko kakšna zakonitost ostane skrita pri nenatančni meritvi.

primer: Če merimo upornost upoa pri različnih temperaturah in dobimo rezultat 102,13 Ω pri 295 K in 102,18 Ω pri 305 K, ni nujno, da iz teh meritev lahko sklepamo ali je upor odvisen od temperature ali ne. Šele, če poznamo napako navedenih izmerkov, jim lahko zaupamo dovolj, da iz njih izpeljemo morebitno linearno odvisnost upora od temperature.

Napake praktično nikoli ne moremo natančno določiti ampak lahko samo ocenimo njeno zgornjo mejo. V osnovi (glede na vzrok in lastnosti) napake ločimo na slučajne in sistematične. Če merimo količino x in je njena prava vrednost X, je največ kar lahko o tej vrednosti povemo nek približek $\bar{x}$, ki pa je temboljši, temmanjša je napaka. Z napako Δx, potem rezultat meritve napišemo kot:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x\ .$$

Z znakom '±' poudarimo, da pravega rezultata ne poznamo in da v resnici samo podamo območje, v katerem pravi rezultat leži z določeno (visoko) verjetnostjo. Tako predstavljen rezultat je zapisan z **absolutno napako**. Absolutna napaka ima enako enoto kot količina, ki jo merimo. Absolutna napaka je pozitivno definirana. Meritev neke količine je tembolj natančna, čimmanjša je napaka.

primer: upor R = 102,17 Ω ± 0,02 Ω je izmerjen bolj točno kot upor R = 102,17 Ω ± 0,08 Ω.

Absolutna napaka ni nujno pravo merilo točnosti meritev. Meritev količine z veliko vrednostjo in veliko absolutno napako je lahko bolj natančna kot meritev manjše količine z manjšo absolutno napako. Prava primerjava je mogoča tako, da podamo **relativno napako** meritve: $\Delta r = |\Delta x/\bar{x}|$ in rezultat zapišemo kot:

$$x = \bar{x}\ (1 \pm \Delta r)\ .$$

Relativna napaka je absolutna vrednost kvocienta absolutne napake in približka $\bar{x}$. Na ta način je relativna napaka pozitivna tudi če je približek negativen. Relativna napaka je brez enote in jo lahko podamo tudi v odstotkih 1% = 0,01.

primer: Če izmerimo dolžino lista formata A4 na en milimeter natančno, smo enako natančni, kot če izmerimo višino Triglava na 10 m natančno: l_{A4} = 29,7 cm ± 0,1 cm = 29,7 (1 ± 0,003) cm; $h_{Triglava}$ = 2860 (1 ± 0,003) m = 2860 m ± 10 m.

Napako napišemo na eno mesto natančno. Več mest je smiselnih samo kadar smo pri ocenjevanju napake zelo natančni. Tudi rezultat meritve $\bar{x}$ zapišemo na največ toliko mest, kot jih dopušča.

primeri: rezultat c = (2,9979250876 ± 0,0001)×10^8 m/s je podan s preveč mesti. Prvih pet bi bilo dovolj;

pri temperaturi T = 33,4 ± 0,1 manjkajo enote;

če dobimo za dolžino rezultat 3,86 m ± 0,00004 m lahko za šestico napišemo še tri ničle;

pri razdalji d = $9{,}3\times10^{7}$ m ± $1{,}744\times10^{6}$ m je napaka napisana s tremi mesti preveč.

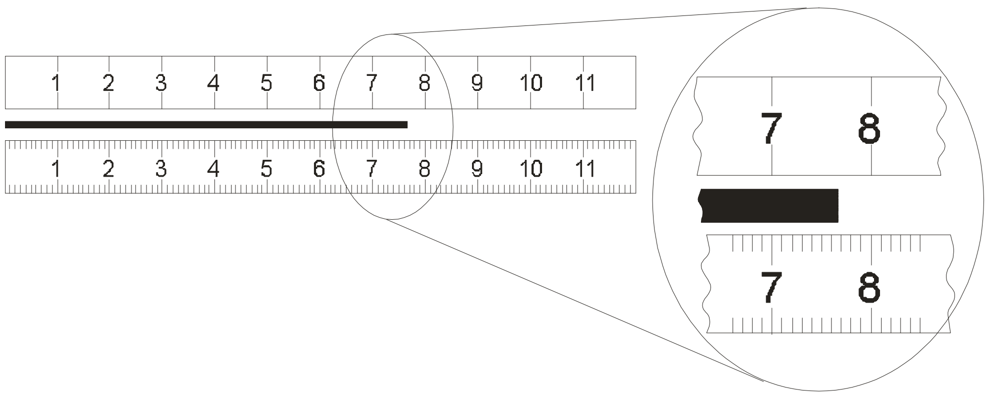
Če je napaka podana z relativno vrednostjo, si pri zaokroževanju lahko pomagamo tako, da izračunamo absolutno napako.

primer: Na koliko mest zapišemo rezultat 3,14659 m, če je relativna napaka meritve 0,03? Iz relativne napake izračunamo absolutno: 0,03 × 3,14159 m = 0,0943977 m, ki jo zaokrožimo na eno mesto 0,09 m. Iz absolutne napake vidimo, da v rezultatu lahko napišemo tri mesta s tem, da zadnje mesto ustrezno zaokrožimo: 3,15 (1 ± 0,03) m.

Sistematične napake

Pri merjenju že sam merilec onemogoča meritev količine poljubno natančno. Kakorkoli že merimo, količino vedno odčitamo s skale samo z določeno natančnostjo. Natančnost merila je določena z razredom natančnosti. Če razreda natančnosti ne poznamo, si pomagamo s skalo merila. Če pri skali lahko razberemo meritev med dvema oznakama, potem naj bo napaka merila enaka polovici razdelka na skali, drugače pa najmanšemu razdelku skale. Bolj natančno odčitavanje skale nima smisla, saj je skala namenoma razdeljena, tako kot je. Pri digitalnih prikazovalnikih pa vprašanja, koliko kaže prikazovalnik, ni.

primer: Na sliki sta dve merili; z zgornjim odmerimo črto 7,5 cm ± 0,5 cm, s spodnjim merilom pa 7,7 cm ± 0,1 cm, čeprav nas mogoče mika zapisati 7,65 cm ± 0,05 cm. Tudi če bi skalo odčitali pod mikroskopom, ne bi izboljšali napake, saj merilu nikoli ne moremo popolnoma zaupati.



Pogosta napaka meril je tudi slaba določenost ničle. Tako napako bi na primer naredili z merilnim trakom, ki bi imel prvi centimeter traku odrezan. Vse meritve bi bile tako za centimeter napačne. Če to pomanjkljivost merila poznamo, potem to ni več napaka, le rezultat moramo popraviti. Podobni primeri so: neuravnoteženost tehtnice, umazane ali polomljene uteži, pretegnjene vzmeti dinamometrov, zviti ali obrušeni roglji kljunastega merila, temperaturno raztezanje kovinskega traku za merjenje dolžine, razmajana ali premaknjena skala termometra ipd. Pri merilcu lahko naredimo napako tudi tako, da napačno odčitamo skalo ali območje, ki ga prikazuje skala. Temu se izognemo z vestnostjo in take napake ne štejemo med napake meritve ampak napake merilca. Pri kakšnih nerodnih merilih težko ugotovimo merilno območje in, seveda, so meritve, ki jih tako napačno odčitamo tudi napačne. Kadar nismo prepričani, ali skala merila drži ali ne, jo lahko kaj hitro določimo z umeritvijo – pomerimo kakšno (lahko samo približno) znano količino in sklepamo na območje, ali pa meritev ponovimo z drugim merilom. Pri praktikumu naletimo na ta problem pri ampermetrih in voltmetrih na vijačno vzmet, kjer je merilno območje določeno s pomožnimi upori. Takrat skalo umerimo tako, da pomerimo znan tok ali napetost z digitalnim multimetrom in meritvi primerjamo.

Naslednji pomemben vir sistematičnih napak se skriva v sami zasnovi eksperimenta. Eksperiment, s katerim merimo, je potrebno skrbno načrtovati. S tem lahko zmanjšamo napako. Vendar naj izvedba in popravki ostanejo v razumnih mejah. Merilo za velikost sistematične napake, ki si jo še privoščimo, je natančnost, ki jo skušamo pri meritvi doseči. Če, na primer, merimo gravitacijski pospešek tako, da merimo čas padanja kroglice, naredimo napako, kadar računamo po formuli $g = 2s/t^2$. Če bi hoteli biti bolj natančni, bi morali upoštevati zračni upor, vrtenje Zemlje, spreminjanje teže z višino…. Tudi način, kako spustimo kroglico, lahko vpliva na čas padanja. Kadar pa velika natančnost ni potrebna, pa je tudi prvi približek v redu. Drug primer je merjenje električnega upora: upor lahko določimo tako, da ga priključimo na znani izvir enosmerne napetosti U in nato pomerimo tok I skozi upor. Iz Ohmove zveze izračunamo upor $R = U/I$. Pri tem naredimo napako, ker ne upoštevamo notranje upornosti ampermetra in izvira ter upora priključnih žic. Poleg tega se zaradi toka upor segreje in upornost se spremeni. Poskrbeti bi morali za hlajenje upora na konstantno temperaturo. Se pa veliko problemom izognemo tako, da spremenimo merilni postopek in upor vežemo v Wheatstonov most. Tako merjen upor je obremenjen z manjšo sistematično napako.

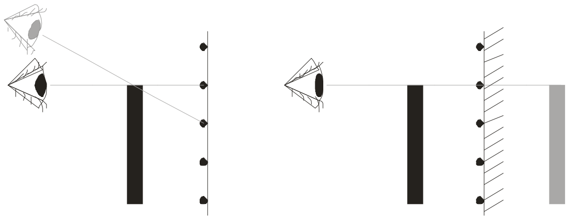
Kadar se zmotimo pri meritvi, branju ali računu kakšne količine, bodo tudi vsi rezultati, ki jih izpeljemo s to količino napačni.

Če pri eksperimentu prepoznamo sistematično napako, jo bodisi poskušamo zmanjšati z zasnovo eksperimenta, ali pa jo priznamo v rezultatu. Na noben način pa ne moremo prepoznati in oceniti vseh možnih sistematičnih napak v eksperimentu. Najbolj varen način je, da se skušamo napakam izogniti in jih zmanjšati s skrbno zasnovo in izvedbo eksperimenta. V določenih primerih je za to potrebna natančna umeritev (kalibracija) eksperimenta, ko pomerimo dogovorjen standard. Sistematične napake so še posebej zahrbtne, ker se ne pokažejo pri večkratnem ponavljanju eksperimenta in se jih tudi s povprečevanjem ne znebimo.

Slučajne napake

Kadar je pri ponavljanju meritev vsakič v okviru napake merila enaka, ponavljanje meritev nima smisla in rezultat kar napišemo, tako kot že znamo. Kadar pa je meritev vsakič drugačna, je to posledica slučajne napake. Izkaže se, da so meritve porazdeljene okoli vrednosti, ki jo definiramo kot povprečno vrednost. Viri slučajnih napak so raznoliki. Pri zelo natančnih meritvah so odmiki od povprečja termodinamične ali celo kvantne narave. Vsi spremenljivi zunanji vplivi kot temperatura, prepih, tresenje tal, hrup, elektromagnetni smog, spreminjanje napetosti in notranjih uporov izvirov zaradi sprememb temperature, trenje v ležajih, histereza v mehanskih sistemih, slabi električni stiki, natrgani električni kabli… pripomorejo k večji napaki.

Pri nenatančnem odčitavanju analognih merilcev je pogost vir napake paralaksa. Kadar je kazalec ali stolpec, ki nakazuje vrednost merjene količine, odmaknjen od skale, lahko s pogledom odčitamo napačno vrednost, tako kot prikazuje sivo oko na spodnji sliki levo. Skale so vedno umerjene tako, da se odčitajo pod pravim kotom. Pri tem si pomagamo z zrcalom za skalo. Pravilno odčitamo tako, da se kazalec ali stolpec pokrije z zrcalno sliko. Tedaj gledamo na skalo pod pravim kotom (na spodnji sliki desno).



Tabele

Za primer obdelajmo merjenje mase hlebca kruha. Tehtnica je natančna na deset gramov. Pri meritvi dobimo m_1 = 1,04 kg, m_2 = 1,01 kg, m_3 = 0,97 kg … Vrednosti so zapisane na toliko mest, kolikor nam omogoča natančnost tehtnice. Vrednosti se spreminjajo zaradi slučajne napake. Zapis z vrsto vrednosti je nepregleden in nesmiseln. Podatke raje zapišemo v tabelo, ki je lahko v vrstici ali pa stolpcu, odvisno kaj nam bolj ustreza. Na prvem mestu tabele stoji oznaka količine, s tem, da oznako nekje v tekstu definiramo. Torej: *m* je masa hlebca. Poleg oznake stoji enota, v kateri podajamo rezultat. Enote objamemo z oglatimi oklepaji [kg], lahko pa bi napisali tudi /(kg) (v navadi je tudi uporaba okroglih oklepajev ali pa dveh poševnic (kg) ali /kg/ kar pa je narobe).

m [kg]	1,04	1,01	0,97	1,00

Enote lahko pripišemo tudi k prvemu podatku in jih potem ne pišemo več. Enako kot z enotami lahko storimo tudi z desetiškim faktorjem in napako.

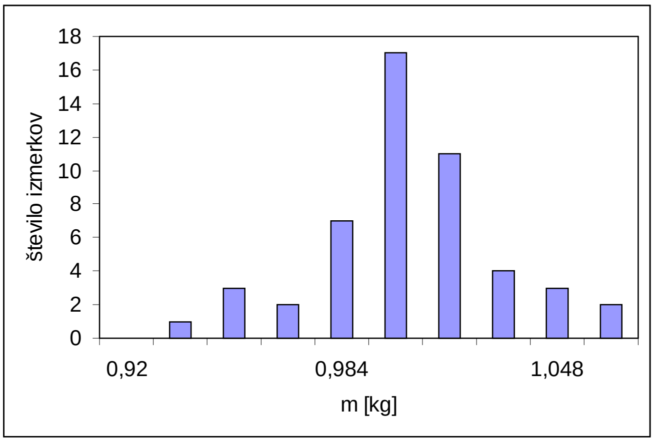
m
$1{,}04 \times 10^3$ g $\pm$ $0{,}02 \times 10^3$ g
1,01
0,97
1,00

Histogram

V primeru, da opravimo res veliko meritev:

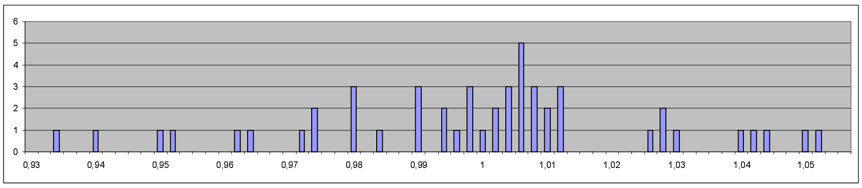
m [kg]	1,04	1,00	1,00	1,05	1,00	1,00	0,95
1,02	1,01	0,94	0,96	1,04	1,00	1,00	1,01
0,99	0,99	1,05	0,95	0,98	0,99	1,01	…
1,01	1,01	1,03	0,98	1,00	0,93	1,03	
0,99	0,97	0,97	1,00	0,98	1,01	0,99	
1,00	0,97	1,04	1,01	1,03	0,96	1,01	
1,00	1,00	1,00	1,01	0,98	1,01	1,01	

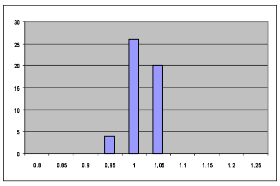
je ta množica informacije nepregledna. Za lažjo obravnavo rezultatov, lahko množico izmerkov prikažemo v histogramu. Histogram naredimo tako, da poiščemo največji in najmanjši izmerek in interval med tema vrednostima razdelimo na primerno število manjših intervalov. Nobenega smisla nima, da je interval manjši, kot je najmanjše mesto, ki ga v rezultatu še pišemo (0,01 kg). Zavedati se moramo tudi, kam spadajo meje intervala. Recimo, da spodnja meja spada k intervalu, zgornja pa k naslednjemu. Nato preštejemo, koliko meritev pade v vsak interval. V koordinatnem sistemu na absciso (vodoravno os) nanesemo merjeno količino razdeljeno na intervale (razrede), na ordinato (navpično os) pa nanesemo število izmerkov. Število izmerkov, ki padejo v vsak interval, predstavimo s stolpcem ali piko. Histogram ni krivulja. Histogram za zgornjo tabelo podatkov je tak:



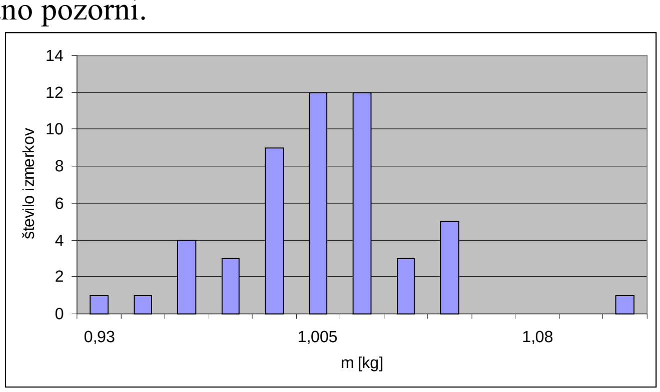
Pri tem smo interval od 0,92 kg do 1,06 kg razdelili na deset podintervalov. Iz historgrama lahko razberemo, da je največ izmerkov, in sicer 17, v intervalu [1,00, 1,016) kg. Število izmerkov pada z večjim odstopanjem izmerjene vrednosti.

Spodaj prikazana primera sta napačna. Na levi je interval razdeljen na preveč podintervalov. Veliko podintervalov je praznih ali pa vanje pade en sam izmerek. Na desni pa interval ne sega od najmanjše do največje meritve ampak se razteza daleč okoli.





Kadar v histogramu opazimo večje odstopanje, kot ga kaže spodnja slika, meritev ali dve močno odstopata in take meritve izvržemo in jih v nadaljni analizi ne upoštevamo. Vir takega odstopanja je verjetno v kakšni sistematični napaki. Pri meritvi mase kruha smo mogoče narobe prešteli uteži ali pa je kakšen sunek spravil tehtnico iz ravnotežja. Drug vir sistematične napake bi lahko ležal pri hlebcu – kruh je lahko iz druge serije, kjer se je kaj spremenilo ali pa se je hlebec napil vode. Razlogov je lahko veliko in pri meritvah moramo biti na okoliščine vedno pozorni.



Verjetnostna gostota

Pri majhnem številu meritev je histogram neenakomeren in razmetan. Oblika histograma se spreminja, ko povečujemo število meritev, vendar vedno manj, dokler te spremembe ne postanejo zanemarljivo majhne. Seveda so takrat vrednosti na ordinati vedno večje, a oblika ostaja nespremenjena. Če za nameček število izmerkov v nekem intervalu delimo s številom vseh meritev, se niti ta vrednost ne bo več spreminjala. Očitno je tudi, da je v tem primeru tudi vsota vseh stolpcev enaka 1. Na ta način dobimo verjetnost, da poljubna meritev pade v dani interval. Če interval označimo z i, potem to zapišemo $P_i = N_i/N$. V sledečem bo zamolčana teorija o porazdelitvah, ki si jo zainteresirani lahko prebere v 'Matematičnih nalogah iz fizike'. Namesto P_i zapišimo $\mathrm{d}P(x)$, kjer x sedaj ustreza zvezni spremenljivki s sredine intervala i (v našem primeru fizikalni količini m). Ta formalizem je precej očiten za primere zveznih spremenljivk, za diskretne spremenljivke (kot je meritev števila pik pri metanju igralne kocke) pa si moramo pomagati z distribucijami. Verjetnost je sorazmerna s širino intervala in tako lahko definiramo verjetnostno gostoto (porazdelitev) $w(x)$:

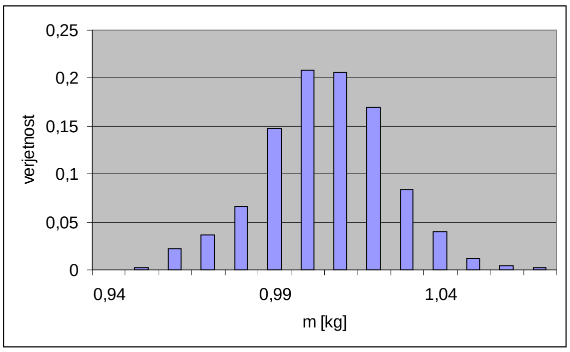
$$\mathrm{d}P(x) = w(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

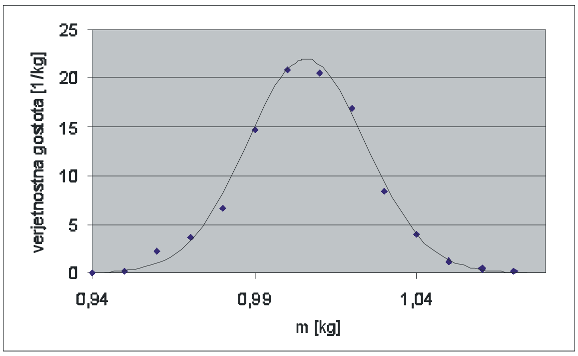
Malo nerodno bi bilo napisati $w(x) = \mathrm{d}P/\mathrm{d}x$, ker verjetnostna gostota ni nikakršen odvod – to je res samo za zvezne porazdelitve. V primeru zveznih porazdelitev (primer mase) lahko porazdelitev $w(x)$ prikažemo s krivuljo na grafu, pri diskretnih porazdelitvah (število pik pri padcu igralne kocke) pa z mastno navpično črto, katere višina ustreza verjetnosti. Možne so tudi kombinirane porazdelitve. Enota verjetnostne gostote je obratna enoti količine, katere porazdelitev opazujemo.

Verjetnost, da meritev pade v nek širši interval, dobimo tako, da integriramo verjetnostno gostoto preko tega intervala:

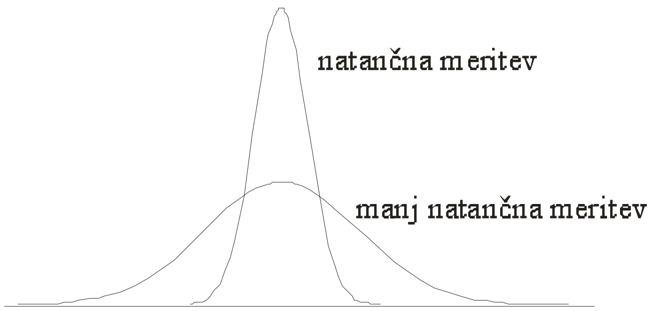
$$P = \int w(x)\,dx\,.$$

V primeru merjenja mase tako lahko z veliko merjenja dobimo histogram verjetnosti in verjetnostno porazdelitev prikazana na spodnji sliki.





Če je krivulja, ki jo tako dobimo ozka in visoka, potem je meritev bolj natančna kot pa, če je krivulja nižja in širša:



Povprečne vrednosti ipd.

Ob pogledu na histogram ali porazdelitev se lahko vprašamo, katera vrednost je najzanesljivejša ocena merjene količine, koliko lahko rezultatu zaupamo in kako izboljšati natančnost najboljše ocene?

Kvantitativno lahko najzanesljivejšo oceno postavimo nekam na sredo porazdelitve, širina porazdelitve pa nam pove kaj o napaki. Več meritev ko naredimo, lažje določimo najboljšo vrednost.

V našem primeru je porazdelitev normalna ali Gaussova. Obstajajo pa tudi druge. V določenih primerih lahko dobimo enakomerne, eksponentne, trikotne ali kakšne druge zvezne porazdelitve ali pa diskretne porazdelitve (število razpadov v minuti, število pik na igralni kocki). Pri merjenju neke zvezne fizikalne količine, ki se iz meritve v meritev spreminja zaradi naključnih odmikov, ki so v enaki meri pozitivni kot negativni, je normalna porazdelitev najpogostejša.

Najboljšo oceno merjene količine dobimo iz tabele meritev tako, da izračunamo povprečno vrednost:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} ,$$

kjer je N število vseh meritev.

Če so meritve naložene v histogram in s pomeni določen interval s središčem v x_s in številom izmerkov N_s, potem povprečje zračunamo takole:

$$\overline{x} = \frac{\sum_s N_s \, x_s}{N} .$$

Pri zvezni porazdelitvi izračunamo povprečje:

$$\overline{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, w(x) \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \, dx} .$$

Kadar je porazdelitev $w(x)$ normirana je imenovalec enak ena.

Enako bi mogoče mislili, da lahko napako ocenimo iz povprečne vrednost odmikov $\delta_i = x_i - \overline{x}$ in sicer

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta_i}{N} ,$$

vendar iz definicije povprečne vrednosti sledi, da je ta vrednost enaka nič.

Možna ocena velikosti napake je povprečna vrednost velikosti odmikov

$$\overline{|\delta|} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |\delta_i|}{N} ,$$

ki je večja od nič.

Običajno pa za oceno vrednosti napake vzamemo povprečni kvadratni odmik (varianca ali disperzija):

$$\sigma^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \overline{x}^2 .$$

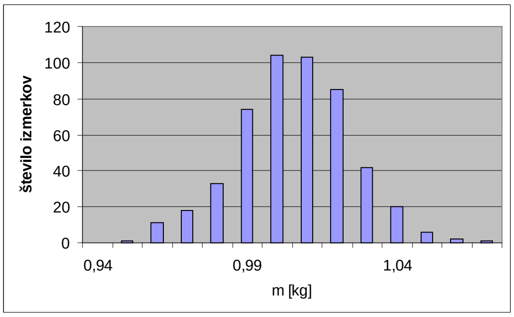
Kvadratni koren variance σ imenujemo standardna deviacija ali efektivni odmik.

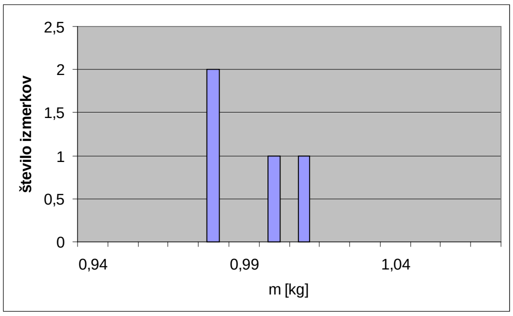
Normalno porazdelitev opišeta dva parametra; en pove, kje je njen vrh, drugi pa njeno širino:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Vrh je pri povprečni vrednosti, standardna deviacija pa pove širino zvonca - koliko stran od povprečne vrednosti sta prevoja (drugi odvod je enak nič) funkcije. Funkcija je simetrična glede na povprečno vrednost, kar pomeni, da bo meritev z enako verjetnostjo padla v interval nad povprečno vrednostjo kot v interval pod povprečno vrednostjo. Verjetnost, da meritev pade v nek interval [*x*, *x*+d*x*] je enaka ploščini pod krivuljo nad tem intervalom. Verjetnost, da meritev pade v interval $(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma)$, je 0,68 (približno dve tretjini).

Povprečna vrednost $\overline{x}$ je le ocena za pravo vrednost merjene količine *X*. Če majhnem številu izmerkov dodamo nov izmerek, se povprečna vrednost bolj spreminja, kot pri velikem številu meritev. Kadar je število meritev dovolj veliko, se povprečna vrednost ne spreminja več. Merilo za razpršenost izmerkov je standardna deviacija in napaka meritve je z njo povezana. Poleg standardnega odmika je važno tudi število meritev; več kot je meritev, lažje poiščemo parametre, ki opišejo porazdelitev in bolj natančno je znana povprečna vrednost. To je prikazano na spodnjih histogramih. V mislih potegnite čez meritve Gaussovo krivuljo. Na levem, z veliko meritvami, bolj natančno določimo povprečno vrednost in standardno deviacijo (vrh in širino Gaussove krivulje) kot na desnem. Čeprav sta številsko v obeh primerih enaka, sta za levi primer bolj natančno določena.





Nezanesljivost, s katero določimo pravo vrednost *X*, je standardna napaka

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}\,.$$

Končni rezultat meritve pa podamo

$$x = \overline{x} \pm \Delta x\,.$$

Vidimo, da prepolovitev napake zahteva štirikrat več meritev (v primeru, da je napaka statistična). Drugače si to lahko predstavljamo tudi tako: če bi po *N* meritev opravljali vedno znova, bi bila povprečna vrednost vsakič drugačna. Porazdeljena bi bila okoli povprečne vrednosti s standardno deviacijo enako Δx.

Tudi standardna deviacija je pri končnem številu meritev izračunana le približno. Negotovost je enaka $\sigma\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2N}}\right)$. Natančnost efektivnega odmika je enaka 0,1 šele pri N = 50 in pri majhnem številu meritev lahko σ napišemo samo z enim mestom. Tako pri majhnem številu meritev (npr. 10) efektivnega odmika niti ne računamo ampak poiščemo interval okoli povprečne vrednost, v katerega pade dve tretjini meritev. Efektivni odmik je enak polovici intervala.

Kadar računamo povprečje iz množic različno natančnih meritev, to upoštevamo tako, da manj natančne meritve upoštevamo v manjši meri (ponderirano povprečje):

$$\overline{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Tu indeks *i* pomeni množico meritev s povprečno vrednostjo x_i in standardno deviacijo σ_i.
Napako takega povprečja pa dobimo po receptu

$$\Delta x^2 = \frac{\sum_i \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2 + \sigma_i^2}{\sigma_i^4}}{\left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2}.$$

V formulah sta x_i in σ_i bodisi izmerek in standardni odmik, po katerem so izmerki pri tej vrsti meritve porazdeljeni, bodisi povprečna vrednost nekega merjenja in njena efektivna napaka.

Kombiniranje napak

Pri sestavljanju napak sta možna dva pristopa. Pri enem pesimistično privzamemo, da je kombinacija napak največja, pri drugem pa upamo, da se napake vsaj v določeni meri med seboj izravnajo. Prvi pristop je računsko enostavnejši in bo ponavadi za grobo oceno napake zadoščal. Vsekakor lahko preverite ali se napaki zračunani na oba načina razlikujeta na prvem mestu ali ne. Če sta na prvem mestu enaki, potem tako ali tako nismo v zadregi, katero od obeh upoštevati.

Napaka vsote in razlike dveh količin

Če fizikalno količino z dobimo tako, da seštejemo (ali odštejemo) količini x in y, bo napaka te količine Δz enaka vsoti napak Δx in Δy.

rezultat	prvi način	drugi način
$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$,	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$,	$\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
$\bar{w} = \bar{x} - \bar{y}$,	$\Delta w = \Delta x + \Delta y$,	$\Delta w = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Obrazec za napako upravičimo z razmislekom: vsota dveh količin je $(\bar{x} \pm \Delta x) + (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} + \bar{y}) \pm \Delta x \pm \Delta y$. Ne vemo, ali se napaki Δx in Δy odštejeta ali seštejeta, lahko pa privzamemo, da je napaka rezultata zagotovo manjša od njune vsote. Če bi rezultat sestavljali iz množice vrednosti, bi se napake kdaj seštele, kdaj odštele, v povprečju pa velja za odmik približka od prave vrednosti enačba $\overline{(\delta x + \delta y)^2} = \overline{\delta x^2} + \overline{\delta y^2} + 2\overline{\delta x \delta y} = \Delta x^2 + \Delta y^2$, kjer privzamemo, da so odmiki za posamezne količine med seboj nekorelirani.

Pri napaki vsote več kot dveh količin rzširimo isti obrazec – napaka je enaka korenu vsote kvadratov vseh absolutnih napak

primer: Postavimo dve kocki eno vrh druge. Višina prve kocke je h_1 = 5,0 cm ± 0,2 cm, druge pa h_2 = 7,0 cm ± 0,3 cm. Kolikšna je njuna skupna višina? Rezultat h = 12,0 cm ± 0,4 cm. Če bi napisali h = 12,0 cm ± 0,5 cm, ne bi naredili prav hude napake.

primer: Isto kot prej, le da naj bo sedaj druga kocka bolj natančno pomerjena h_2 = 7,0 cm ± 0,02 cm. V tem primeru dobimo na prvo mesto po obeh pristopih enak rezultat h = 12,0 cm ± 0,2 cm – z drugimi besedami: napaka v višini druge kocke je zanemarljiva v primerjavi z napako prve.

Napaka produkta in kvocienta dveh količin

Če fizikalno količino z dobimo tako, da zmnožimo (ali delimo) količini x in y, je relativna napaka te količine $\Delta z/\bar{z}$ enaka vsoti relativnih napak $\Delta x/\bar{x}$ in $\Delta y/\bar{y}$.

rezultat prvi način drugi način

$$\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y}, \quad \left|\frac{\Delta z}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right| + \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|, \quad \left|\frac{\Delta z}{\bar{z}}\right| = \sqrt{\left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right|^2 + \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|^2}$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \quad \left|\frac{\Delta w}{\bar{w}}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right| + \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|, \quad \left|\frac{\Delta w}{\bar{w}}\right| = \sqrt{\left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right|^2 + \left|\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|^2}$$

Enako kot pri seštevanju velja tu, da je relativna napaka produkta večih količin enaka korenu vsote kvadratov relativnih napak vseh množencev.

Obrazec upravičimo z razmislekom:

$(\bar{x} \pm \Delta x)(\bar{y} \pm \Delta y) = \bar{x}\,\bar{y} \pm \bar{x}\Delta y \pm \bar{y}\Delta x \pm \Delta x \Delta y \doteq \bar{x}\,\bar{y}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{\bar{x}} \pm \frac{\Delta y}{\bar{y}}\right)$, kjer v zadnjem členu zanemarimo produkt dveh količin, ki naj bi bili majhni.

primer: Kvader ima stranice dolge a = 5,0 cm ± 0,2 cm, b = 7,0 cm ± 0,3 cm in c = 2,0 cm ± 0,2 cm. Relativne napake so v istem zaporedju 0,04, 0,04 in 0,1. Kolikšna je prostornina kvadra? Skupna relativna napaka po prvem načinu je 0,2, po drugem pa 0,1. Rezultat je potlej V = 70 cm^3 ± 7 cm^3=70 (1 ± 0,1).

Napaka poljubne funkcije fizikalnih količin

V primeru, da je rezultat funkcija večih količin s povprečnimi vrednostmi $\bar{x}_i$ in napakami σ_i $x = f(x_1, x_2, x_3...)$, potem izračunamo povprečno vrednost kot

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3...)$$

in napako

$$\sigma^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2 .$$

S temi obrazci pokrijemo tudi predpise iz prejšnjih, preprostih primerov.

primer: Obseg pravokotnika, pri katerem izmerimo za eno stranico $a \pm \Delta a$ in za drugo $b \pm \Delta b$, je enak $o = 2a + 2b$. Napaka pa je $\Delta o^2 = 4\Delta a^2 + 4\Delta b^2$. To približno pomeni, da je napaka vsote količin enaka vsoti absolutnih napak.

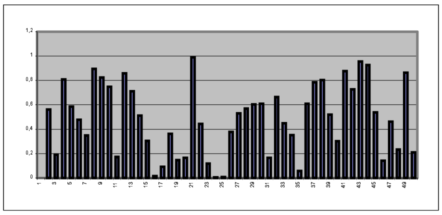
primer: Ploščina pravokotnika je $S = a\ b$. Napaka rezultata je $\Delta S^2 = b^2 \Delta a^2 + a^2 \Delta b^2$. Če zadnji rezultat malo poračunamo (izrazimo z relativno napako), dobimo $\frac{\Delta S^2}{S^2} = \frac{\Delta a^2}{a^2} + \frac{\Delta b^2}{b^2}$, kar lahko razumemo kot: pri množenju količin, je relativna napaka rezultata približno enaka vsoti relativnih napak produktov.

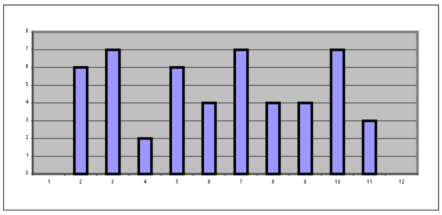
Primeri porazdelitev

Poleg normalne porazdelitve poznamo seveda še kopico drugih. V grobem jih ločimo na zvezne in diskretne, možne pa so tudi kombinacije obeh. Porazdeljena ni nujno samo verjetnost. Porazdelitev mase, na primer, prepoznamo kot gostoto snovi. Porazdelitev, še posebej v optiki, poimenujemo lahko tudi spekter. Znan je spekter sevanja črnega telesa, ki ga lahko razumemo tudi kot porazdelitev verjetnosti za energijo fotona, če pri eksperimentu merimo energijo posameznih fotonov. Je pa porazdelitev P_ν drugačna, če merimo frekvenčno porazdelitev ali pa porazdelitev po valovnih dolžinah P_λ; zveza med obema sledi iz enakosti verjetnosti $P_\nu \, \mathrm{d}\nu = P_\nu \, \mathrm{d}\lambda$.

Izkaže se, da so izmerki pri meritvah v veliki večini primerov porazdeljeni le z nekaj osnovnimi porazdelitvami in še od tega najpogosteje z normalno porazdelitvijo. Na kratko si poglejmo osnovne lastnosti takih porazdelitev. Prikazani primeri so generirani z generatorjem naključnih števil, tako da rezultati odstopajo (kot pri realnih meritvah) od teoretične napovedi, ujemanje pa je boljše, če generiramo večjo množico števil.

Enakomerna porazdelitev





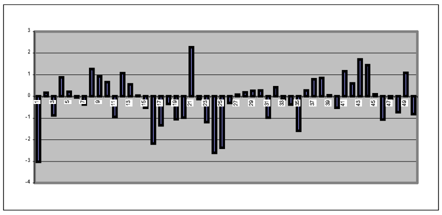
Primer zvezne enakomerne porazdelitve je merjenje kota, pod katerim odleti elektron, pri razpadu β točkastega izvira. Pri meritvi je katerikoli kot enako verjeten. Primer diskretne enakomerne porazdelitve pa je metanje uravnotežene kocke – vsaka od števil, bo po dovolj metih, padla z enako verjetnostjo. Na levem diagramu so s stolpci prikazane vrednosti, ki jih dobimo pri množici zaporednih meritev enakomerno porazdeljene spremenljivke. V našem primeru so spremenljivke porazdeljene med vrednostjo 0 in 1. Na desni je histogram meritev. Pri vse večjem številu meritev, bi bili vsi stolpci enako visoki in porazdelitev, ki bi ustrezala taki meritvi, bi bila konstantna.

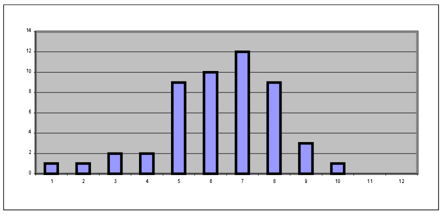
Eksponentna porazdelitev

Primer take porazdelitve dobimo, če opazujemo radioaktivni razpad jeder. Verjetnost, da jedro razpade v kratkem časovnem intervalu dt, je sorazmerna z dolžino intervala; ni pa ta verjetnost odvisna od starosti jedra, saj se jedro ne stara tako, kot človek (verjetnost, da v naslednjem letu umre osemdesetletnik, je večja od verjetnosti, da v naslednjem letu umre dvajsetletnik). Če sorazmernost zaznamujemo z λ, potem je verjetnost, da jedro v naslednjem intervalu dt ne razpade enaka $(1-\lambda \mathrm{d}t)$. Če nadaljujemo opazovanje, je verjetnost, da jedro še ni razpadlo do časa $t = n \, \mathrm{d}t$ kar enaka $(1-\lambda t/n)^n$. V limiti, ko gre dt proti nič in n proti neskončnosti, s tem, da ostane t enak, bo jedro, ki smo ga začeli opazovati ob času 0, še vedno obstajalo ob času t z verjetnostjo $P_t = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Drugače lahko povemo tudi tako, da bo od N_0 jeder, po času t preostalo še $N = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ jeder. Verjetnostno porazdelitev, da bo jedro razpadlo v intervalu dt ob času t, dobimo z odvodom $w(t) = -\mathrm{d}P_t/\mathrm{d}t = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Normalna porazdelitev

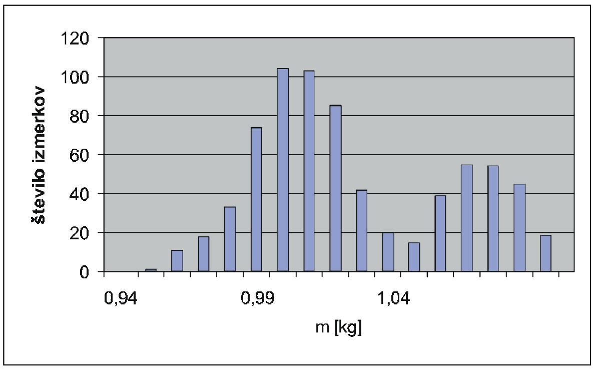
To porazdelitev že poznamo. Meritve so zvezno razmetane okoli povprečne vrednosti. Večji kot je odmik od povprečne vrednosti, manj je takih meritev.





Na levi je množica meritev za primer, ko je povprečna vrednost enaka nič, standardna deviacija pa enaka ena. Na desni je histogram, ki ustreza meritvam. Največ meritev pade v razred, ki ustreza povprečni vrednosti. Zvezna porazdelitev, ki ustreza histogramu, je Gaussova funkcija.

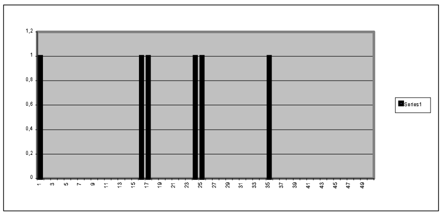
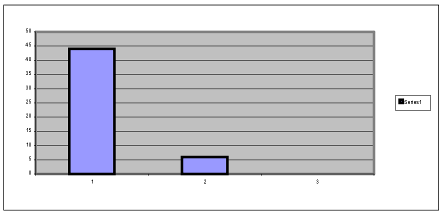
Kadar merimo količino, za katero pričakujemo normalno porazdelitev, dobimo pa tak histogram, kot ga kaže spodnja slika, lahko pomislimo na sistematsko napako.



Porazdelitev ima dva vrha in čisto možno je, da je med merjenjem prišlo do napake merila ali pa smo pri množici meritev narobe prešteli skalo. Možno je tudi, da merimo lastnost predmetov, ki so bili pripravljeni na različne načine in se njihove lastnosti razlikujejo. Pogosto se taka napaka zgodi pri merjenju časa z optičnimi vrati pri prostem padu kroglice, če kroglica udari ob optična vrata in jih pri tem premakne. Vse sledeče meritve so premaknjene glede na meritve pred trkom.

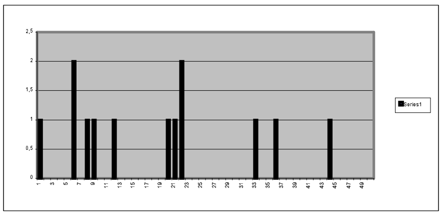
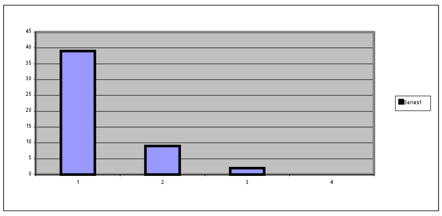
Bernoulijeva porazdelitev

To porazdelitev je določena z verjetnostjo p za dogodek ob dani meritvi. Bernoullijeva slučajna spremenljivka ima vrednosti 0 ali 1 (dogodek se zgodi ali pa ne). Zaporedje vrednosti dobimo na primer tako, da pomerimo vrednost, ki ima enakomerno verjetnostno gostoto v intervalu od 0 do 1. Če je vrednost manjša ali enaka verjetnosti za dogodek p, potem meritev (Bernoullijeva spremenljivka) dobi vrednost 1, drugače pa nič.

Na levi si lahko na vodoravni osi predstavljamo časovne intervale. Dogodek se v danem časovnem intervalu zgodi z verjetnostjo 0,1. Histogram na desni nas prepriča, saj je stolpec, ki ustreza dogodku, devetkrat nižji od stolpca, ko se dogodek ne zgodi.

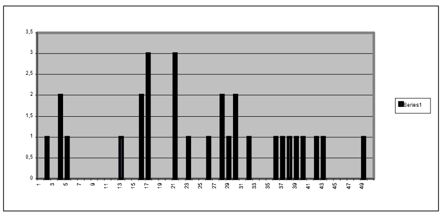
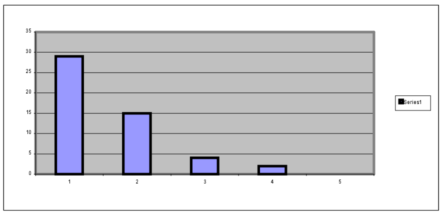
Binomska porazdelitev

Opazujmo dogodek (met kovanca ipd.), ki se zgodi z verjetnostjo *p*. Verjetnost, da se dogodek ne zgodi je q = 1-*p*. Verjetnost, da se dogodek zgodi *N*-krat, pri tem, da meritev *Z*-krat ponovimo, je $W_N = \binom{Z}{N} p^N q^{Z-N}$. Ta binomska porazdelitev ima dva parametra *Z* in *p*. Velja $\overline{N} = Zp$ in $\sigma^2 = Zpq$. Za primer p = 0,1 in 3 ponovitve poskusa nam graf na levi kaže, kolikokrat se je dogodek zgodil v danem intervalu. Histogram pove, da je bilo največ takih poskusov, kjer se dogodek v treh ponovitvah ni zgodil. Poskusa, kjer bi se dogodek zgodil kar trikrat, pa pri tako majhnem številu meritev in pri tako nizki vrednosti *p* ni bilo. Binomska in Bernoullijeva porazdelitev sta v zvezi. Zgornjo binomsko porazdelitev bi dobili, če bi spremenljivko, ki jo merimo, predstavljala vsota treh Bernoullijevih spremenljivk.

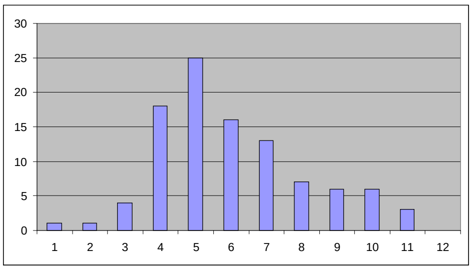
Poissonova porazdelitev

Poissonova porazdelitev je limitni primer binomske porazdelitve in sicer tak, kjer je *p* zelo majhen, *Z* pa zelo velik, vendar tako, da ostane $\overline{N} = Zp$ končen. Porazdelitev se tedaj zapiše $W_N = \frac{\overline{N}}{N} \mathrm{e}^{-\overline{N}}$. Ker je q v tem primeru blizu 1, velja $\sigma^2 = \overline{N}$. Spodaj je primer, ko je $\overline{N} = 0,5$.

Vidimo, da smo pri meritvah največkrat pomerili $N = 0$, malo manjkrat 1 in še manjkrat višje vrednosti. Povprečno vrednost za N, bi iz meritev dobili 0,58. Merjenje ne vrne čisto prave vrednosti, saj smo opravili premalo meritev.

Spodaj je primer za $\bar{N} = 5$ in 100 meritev. Porazdelitev se z večjim $\bar{N}$ bliža Gaussovi porazdelitvi.



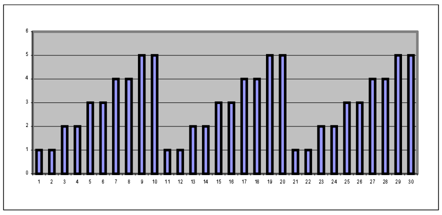
Poissonovo porazdelitev poznamo v naslednji zvezi. Če je radioaktivni vzorec zelo dolgoživ, potem v kratkem času (denimo v šolski uri), ne razpade prav veliko delcev in aktivnost vzorca se ne zmanjša in tako si z meritvijo predstavljeno pri eksponentni porazdelitvi ne moremo pomagati pri meritvi razpadnega časa. Takrat si pomagamo tako, da določen čas merimo število razpadov. To meritev velikokrat ponovimo. Seveda bomo vsakič lahko dobili drugačno število razpadov, saj je proces slučajen. Če v histogram narišemo število intervalov, v katerih smo namerili N razpadov, bo porazdelitev Poissonova.

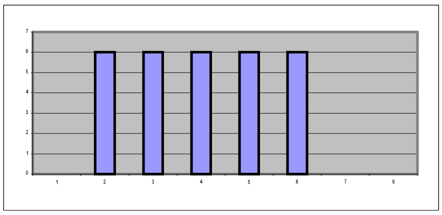
Povprečno število razpadov na časovno enoto smo prej označili z λ. S tem podatkom izračunamo povprečno število razpadov v intervalu dt kot $\bar{N} = \lambda \mathrm{d}t$. Interval naj bo zelo kratek, tako da je to število mnogo manjše od ena in potem je to število tudi verjetnost za razpad v tem časovnem intervalu. Verjetnost, da v tem intervalu ni razpada pa je 1-λdt (verjetnost, da pride v tem intervalu do dveh ali več razpadov zanemarimo). Če merimo daljši interval t, ga sestavimo iz t/dt malih intervalov dt. Verjetnost, da bo N teh intervalov zasedenih z razpadi, ostali intervali pa prazni, velja tako kot pri binomski porazdelitvi in v limiti zelo kratkih intervalov dt: $W_N = \frac{(\lambda t)^N}{N!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$, kar ustreza Poissonovi porazdelitvi z $\bar{N} = \lambda t$. Če računamo verjetnost, da od trenutka, ko pritisnemo štoparico, do časa t ni prišlo do nobenega razpada , dobimo že znano eksponentno verjetnost $P_t = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Pri poskusu merimo število razpadov nekega elementa na časovno enoto (aktivnost) λ tako, da nekaj časa merimo število sunkov (denimo, da v času t zabeležimo N sunkov). Aktivnost izračunamo z $\lambda = N/t$. Ker za N velja Poissonova porazdelitev in pomerjena vrednost N v prvem približku ustreza povprečni vrednosti $\bar{N}$, efektivni odmik pa je enak $\sigma = \sqrt{\bar{N}}$, zato zapišemo za aktivnost sledeč rezultat: $\lambda = \frac{N}{t}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Da izmerimo aktivnost z natančnostjo 0,01 moramo torej prešteti 10 000 razpadov.

Vzorec

Kadar opazimo v histogramu meritev vzorec, lahko sklepamo, da nimamo opravka s slučajno





spremenljivko.

Grafi

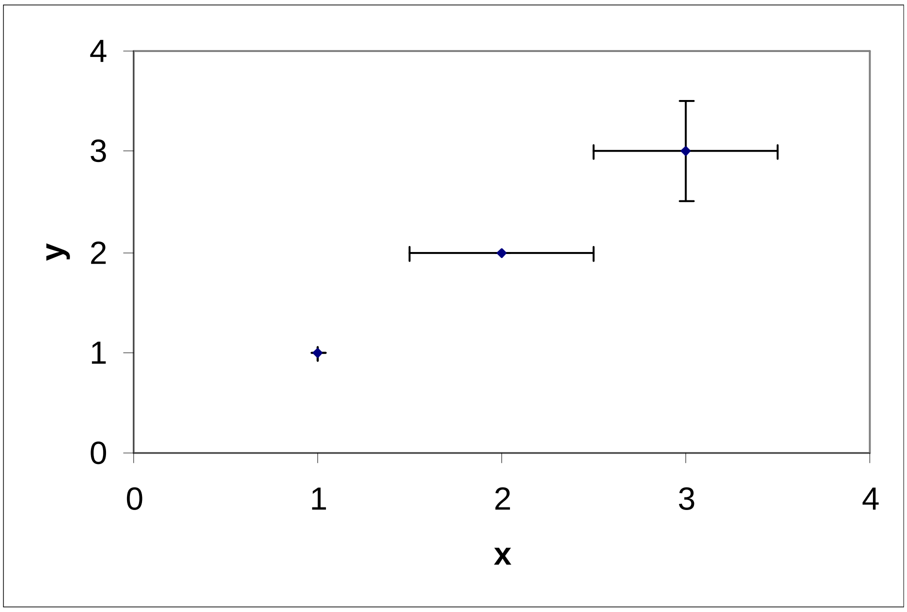
Meritev odvisnosti ene fizikalne količine od druge, nam odkrije mnogo zanimivih rezultatov. Kadar merimo fizikalno količino, ki se spreminja v odvisnosti od druge (odvisna spremenljivka), ki jo lahko sami nastavimo (neodvisna spremenljivka), bomo napako merjene količine določili tako, kot je bilo že predstavljeno v poglavju o napakah. Tudi določene spremenljivke ne moremo določiti poljubno natančno, tako da sta obe količini obremenjeni z napako. Običajno je napaka neodvisne spremenljivke statistična in zanemarljiva v primerjavi z napako odvisne spremenljivke. Meritev izvajamo tako, da v tabeli en stolpec (ali vrstico) namenimo neodvisni spremenljivki, drugega pa odvisni. Za primer si oglejmo meritev padca napetosti in električnega toka na neznanem uporu. Če imamo tokovni izvor, lahko nastavimo tok, ki teče skozi upor, in z voltmetrom merimo padec napetosti. Obratno, če imamo napetostni izvor, na izvoru nastavimo različne napetosti in z ampermetrom merimo tok skozi upor. Seveda, pa se z izvorom niti ni potrebno obremenjevati, če merimo oboje – napetost in tok. Meritve pri različnih vrednostih zapišemo v tabelo:

I [A]	U [V]	I [A]	U [V]
0,21 $\pm$ 0,03	0,50 $\pm$ 0,01	2,55	7,00
0,57	1,60	2,83	7,90
0,99	2,73	3,07	9,31
1,36	3,50	3,23	10,85
1,65	4,35	3,48	11,98
1,98	5,62	3,65	13,40
2,24	5,73	3,89	16,13

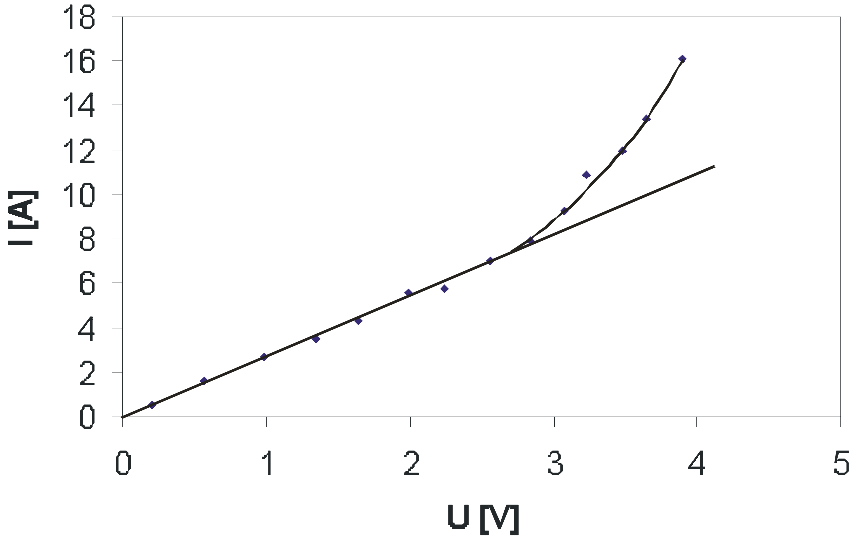
Zaradi varčevanja s prostorom, je tabela narejena v dveh parih stolpcev. Običajno raje pišemo rezultate v en stolpec, tako da lahko dodajamo nove stolpce, če jih potrebujemo za nadaljnje račune. Prvi zapis vsebuje tudi napako meritve določeno tako, kot že znamo. Če napake pri ostalih izmerkih ni, privzamemo, da je za vse enaka.

Vprašamo se lahko, kakšna je zveza med napetostjo in tokom. Ohmov zakon nas uči, da velja $U = R\,I$, kjer je R upor. Za ta matematični model naravnega pojava, lahko iz meritve določimo najboljšo vrednost upora in njegovo napako. Ravno tako iz meritev lahko sklepamo, ali je model uporaben in če ne, lahko tudi ugotovimo zakaj ni. Za predstavitev rezultatov so tabele neprimerne. Iz zgornje tabele na prvi pogled lahko rečemo samo, da napetost narašča s tokom. Mnogo lažje ugotovimo odvisnost iz grafa. Graf narišemo tako, da na vodoravno os nanesemo neodvisno spremenljivko, na navpično pa odvisno. Osi naj imata približno enaki dolžini, intervale na oseh izberemo tako, da graf čimbolje zapolni prostor. Najmanjša vrednost, ki jo pri meritvah doseže spremenljivka, naj bo pri začetku osi, največja pa pri koncu. Seveda enote, ki jih označimo na osi zaokrožimo na primerne vrednosti. Interval razdelimo s primernim številom razdelkov (sto je preveč, eden premalo), odvisno tudi od števila izmerkov. Če je ničla blizu merjenemu intervalu, jo vključimo k osi, drugače pa s prekinjeno osjo nakažemo, da je presečišče (ki pomeni ničlo obeh osi) daleč stran in da razdalja od ničle do prve označene količine ni v pravem razmerju z ostalimi oznakami na osi. Osi primerno označimo s simbolom in enoto merjene količine. Merske točke nanesemo v graf, tako kot nam narekujejo izmerki. Merske točke narišemo dovolj velike, da so jasno vidne na grafu, drugače pa naj velikost pike ustreza napaki. Kadar je napaka znatna, pririšemo točki navpično ali vodoravno črto, če je ena od napak večja, ali pa s križem nakažemo interval, ki ustreza napaki. Merskim točkam pririšemo ustrezno krivuljo (kadar merimo zvezno spremenljivko). Povezati merske točke z ravnimi črtami je narobe. Kadar preverjamo model, dodamo krivuljo, s parametri modela izbranimi tako, da se krivulja najbolje prilega meritvam.

primer: Na spodnjem grafu so prikazani različni primeri označevanja izmerkov na grafu, odvisno od tega, ali je napaka meritve znatna ali ne. Pri prvi točki je napaka meritve tako majhna, da črte, s katero ponazorimo interval zaupanja, na grafu ne bi videli. V takem primeru meritev označimo z dovolj veliko točko, da jo jasno vidimo. Pri drugi točki je napaka znatna samo za eno od količin in v tej smeri narišemo interval zaupanja (običajno daljico, ki je dolga 2σ). Pri tretji točki sta obe količini nenatančni.



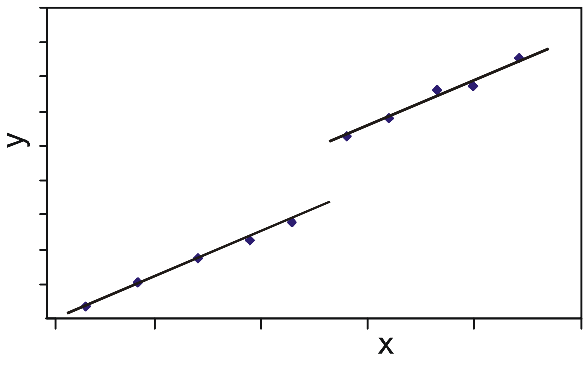
Na grafu že na prvi pogled opazimo, da tok narašča, ko večamo napetost. Pri napetostih večjih od 3 V opazimo odmik od linearne odvisnosti. Zaradi slučajne napake so točke razmetane okoli krivulje, ki se najbolje prilega meritvam.

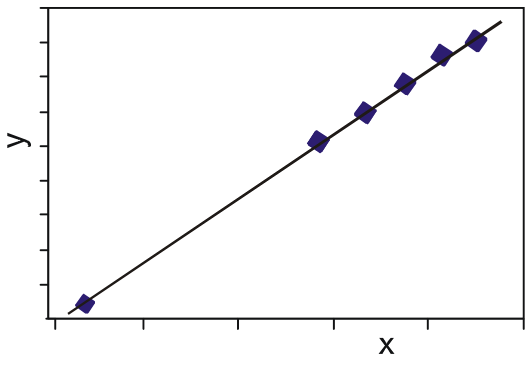


Ker je graf tako pomemben pri analizi rezultatov, moramo meritve vedno predstaviti z grafom in ne s tabelo. Najbolje je, da graf skiciramo že med samo meritvijo. Tako bomo najlažje kontrolirali poskus in popravili napake, če bi do njih prišlo. Če se boste pri meritvi zmotili, boste napako težko odpravili kasneje. Ponavljanje meritev pa vzame veliko časa.

V prejšnjem primeru se je pri večjem toku upor najverjetneje preveč segrel in zaradi povišane temperature se je povečal tudi upor. Zato bi veljalo razmisliti o hlajenju in stabilizaciji temperature. To dodatno zaplete poskus, saj moramo meriti še temperaturo. Lahko pa spremenimo samo metodo merjenja in za določannje temperature uporabimo Wheatstonov most. Za prvo silo pa lahko določimo upor kar iz prvih nekaj merskih točk, ko je tok še premo sorazmeren napetosti.

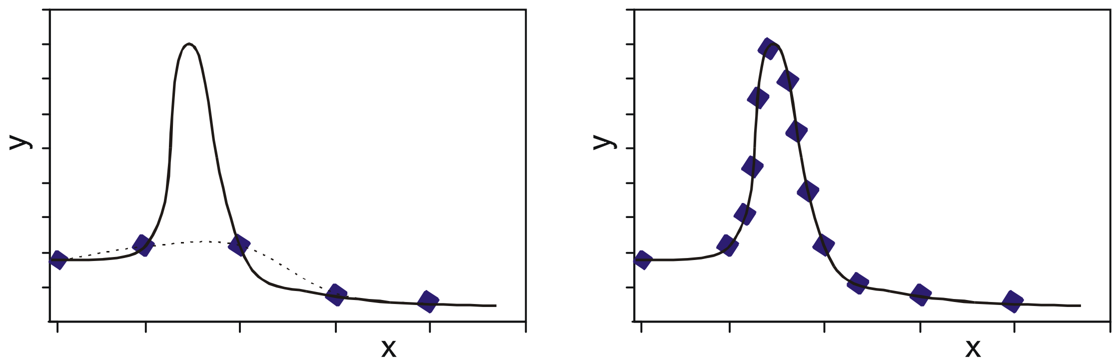
Na spodnjih slikah sta prikazana dva primera napak, ki jih lahko srečamo pri merjenju in nam jih sprotno risanje na graf razkrije. Meritva na tak način ni več težko dopolniti.





V levem primeru se je lahko zgodilo mnogo napak. Ena od njih je napačno prebrana skala merilca ali pa je kdo po pomoti ali zanalašč spremenil merilno aparaturo. Merilec se je lahko pokvaril (pretegnjena vzmet, pregoreli upori, odpadle uteži ipd.). Vsekakor pa je tak rezultat za kakšen fizikalni pojav lahko tudi pravilen. V desnem primeru je merjeni interval napačno pokrit in je potrebno opraviti dodatne meritve v področju, kjer je izmerkov premalo.

Kadar količino, ki je zvezna, pomerimo v končno mnogo točkah, to imenujemo tudi vzorčenje, saj tabela meritev in graf, ki ga iz njih narišemo predstavljata samo vzorec prave odvisnosti. Pri redkem vzorčenju lahko naletimo na težave, kadar se merjena funkcija hitro spreminja. V tem primeru naredimo več meritev v območju, kjer je to potrebno. Primer demonstrirata spodnja grafa. Na levem grafu merimo resonančno krivuljo v premalo točkah. Krivulja, ki jo prilagodimo izmerkom, je narisana črtkano in se močno razlikuje od pravega poteka. Težavo rešimo tako, da v intervalu vrha opravimo več meritev.



Težave imamo tudi, kadar vzorčimo harmonični signal. V tem primeru lahko pomotoma visoki frekvenci pripišemo nižjo. Temu pravimo potujevanje.

Kadar rišete graf, sproti ocenite možno območje, ki ga meritve lahko pokrijejo. Prvič, poglejte kako lahko spreminjate neodvisno spremenljivko in nato za skrajne vrednosti izmerite odvisno spremenljivko. Potem na grobo premerite vmesno področje, ne da bi izmerke zapisovali. S tem lahko ocenite primeren merilni interval na grafu. V tem delu se izurite s prakso.

Določanje fizikalne količine iz linearnih grafov

Ohmov zakon je primer linearne odvisnosti. Padec napetosti na uporu je premo sorazmeren toku, ki teče skozi upor

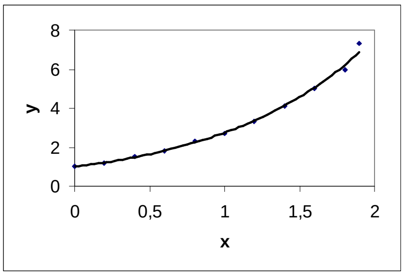
$$U = R\,I\,.$$

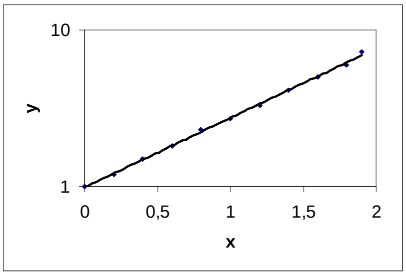
Če na grafu narišemo napetost v odvisnosti od toka in merimo pojav na navadnem uporu, bo krivulja, ki se bo prilegala meritvam, premica skozi izhodišče s smernim koeficientom R. Rezultat poskusa je torej smerni koeficient premice.

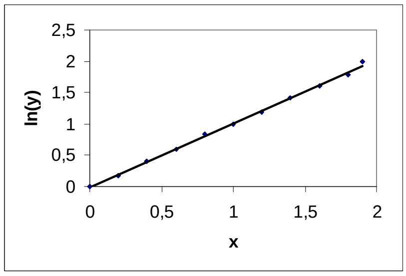
Premica ne seka vedno izhodišča. Kadar tega upravičeno ne pričakujemo, bomo pomislili na sistematično napako. Vsekakor bomo najprej preverili, če pri vrednosti neodvisne spremenljivke nič tudi za odvisno spremenljivko dobimo vrednost nič. Kadar pa fizikalni model predvidi odstopanje v izhodišču, bo imela enačba, s katero testiramo model, obliko $y = k\,x + n$, kjer je k smerni koeficient premice, n pa vrednost odvisne spremenljivke, pri neodvisni spremenljivki enaki nič - presečišče.

Fizikalni modeli pa niso vedno tako preprosti. Odvisnost je lahko kvadratna, eksponentna ali pa kaj bolj zapletenega. V določenih primerih si lahko pomagamo tako, da merimo odvisno spremenljivko, potem pa v stolpcu v tabeli izračunamo primerno količino, s katero dosežemo sorazmernost spremenljivk.

primer: Pri modelu $y = a\, x^2 + c$ bomo v grafu dodali stolpec, kjer bomo izračunali količino x^2 in potem na grafu, ki prikazuje odvisnost y od x^2 odčitali smerni koeficient a in presečišče c.
primer: Pri modelu $y = y_0\, e^{-ax}$ si pomagamo tako, da narišemo $-\ln y/y_0$ v odvisnosti od x. Smerni koeficient take premice je enak a. Pri takih grafih si lahko pomagamo tudi z logaritemskim grafom, kjer je vrednost za odvisno spremenljivko nanešena v logaritemski skali.



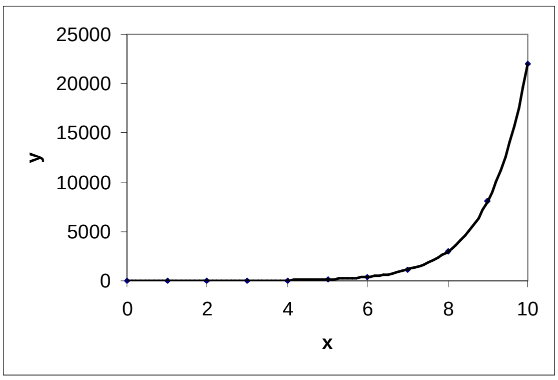


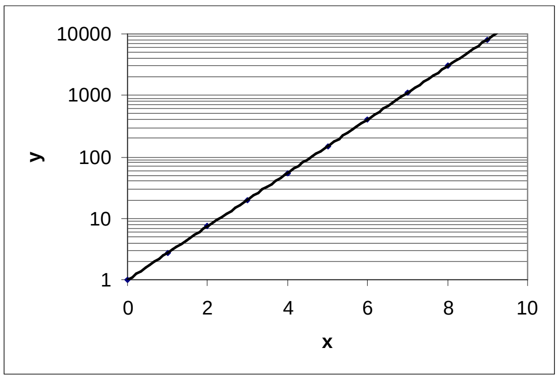


Gornji trije grafi kažejo zaporedoma: eksponentni graf v linearni skali, eksponentni graf v logaritemski skali (navpična os je še vedno y, le skala ni linearna – poglej številke na osi) in logaritem eksponenta. Vsi trije grafi prikazujejo isto meritev, le da iz zadnjih dveh lažje določimo parameter a.

Tudi grafi, kjer sta obe osi logaritemski skali so uporabni. Take grafe uporabljamo pri risanju potenčnih funkcij in iz smernega koeficienta premice v grafu napovemo eksponent n v modelu $y = x^n$, saj je logaritem te enačbe $\log y = n \log x$. Logaritemske grafe uporabljamo tudi, kadar se meritev v merilnem območju močno spremeni (za več velikostnih redov).

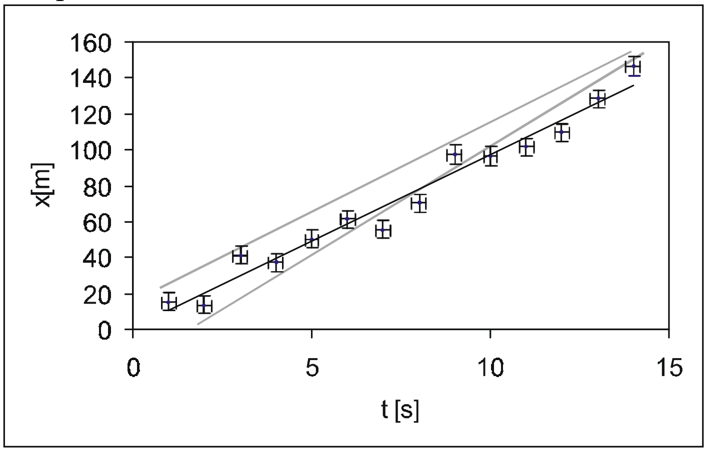
Primer, ko se funkcija spremeni za štiri velikostne rede, kažeta spodnja grafa. Prvih pet točk na levem grafu ima tako majhno vrednost, da jo niti ne moremo pregledno prikazati v linearni skali in in zato ne prispevajo k preglednosti, v logaritemski skali na desni pa točke ležijo na premici.





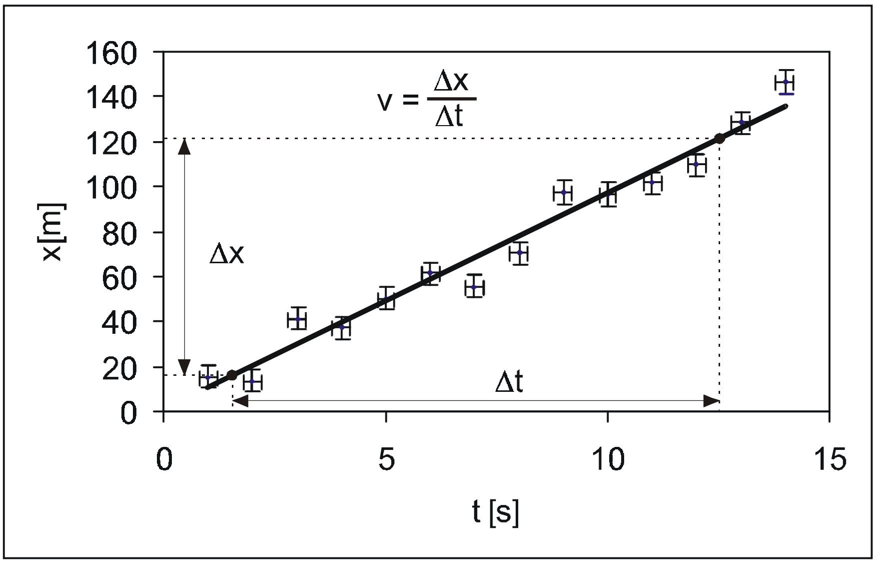
Pri linearnih grafih z ravnilom narišemo premico, ki se najbolje prilega meritvam. Pri tem premice ne smemo avtomatsko potegniti skozi izhodišče ampak izhodišče štejemo kot vse druge merske točke (v primeru, da smo ga pomerili). Premico, ki se najbolje prilega merskim točkam potegnemo po občutku in sicer tako, da je približno enako število merskih točk zaradi slučajne napake nad premico, kot jih je pod premico.

Primer grafa in premic: s črno je potegnjena premica, ki se najbolje prilega meritvam, s sivo narisani premici pa nista pravilni. Ena ima sicer prvilni naklon a je postavljena previsoko. Pri drugi je število merskih točk nad njo enako številu točk pod njo, a to velja za levi oz. desni del merskih točk, in je zato premica narisana narobe.



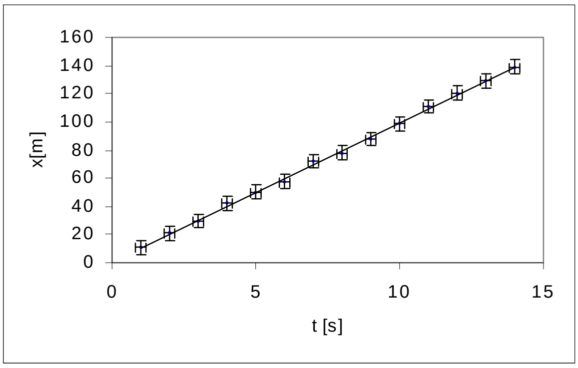
V naslednjem koraku moramo poiskati smerni koeficient premice, presečišče in napako obeh količin. Obstajajo algoritmi, s katerimi to naredimo, pomagamo pa si lahko tudi z grafičnim pristopom.

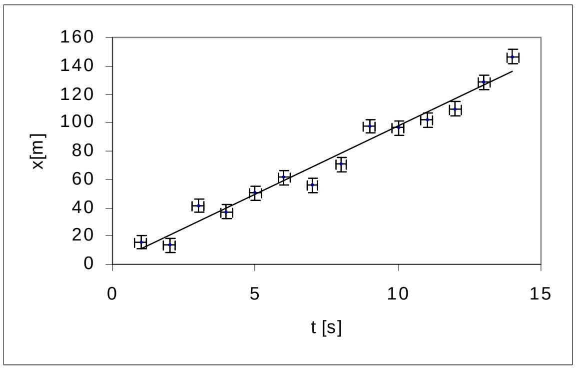
Smerni koeficient dobimo tako, da na premici določimo dve točki in potem delimo interval odvisne količine z intervalom neodvisne količine, tako kot to kaže spodnji graf.



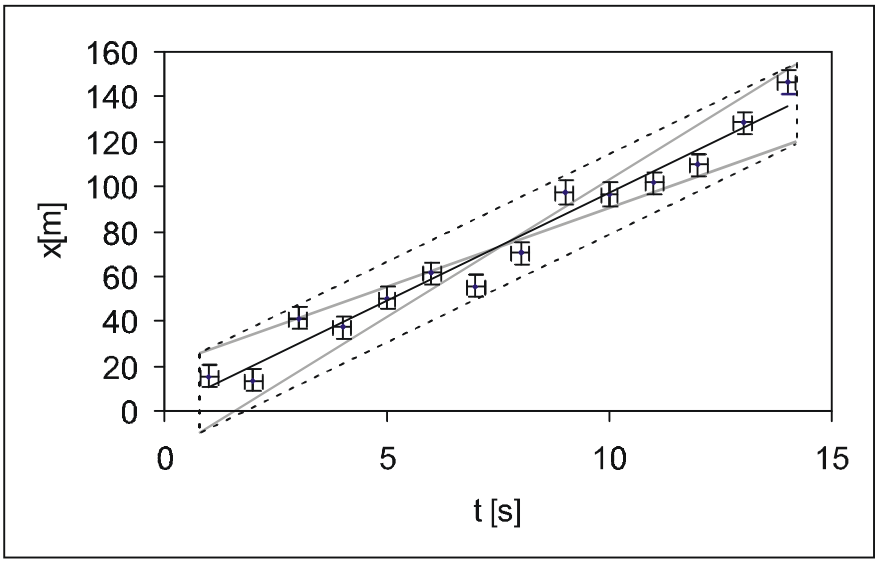
Na premici izberemo točki, ki sta čimbolj vsaksebi. Če je možno, poiščemo taki točki, ki ležita na enotnem razdelku, saj bomo tako lažje odčitali količino. Količino lahko odčitamo samo z omejeno natančnostjo!

Ko narišemo graf, vidimo, da so merske točke razmetane okoli premice, ki se jim najbolje prilega. Ta slučajna napaka je lahko večja ali pa manjša od napake pri merjenju posamezne točke, kar ponazarjata spodnja grafa.





Pri levem grafu je napaka posameznega izmerka večja kot je slučajna napaka s katero so merske točke razmetane okoli premice, pri desni pa je slučajna napaka večja.



Merskim točkam sedaj pririšemo *paralelogram zaupanja* in sicer tako, da so v njem zajete vse točke, tako kot kaže spodnji graf.

Paralelogram zaupanja je nakazan s črtkano črto. Če so odstopanja merskih točk od premice manjša kot je napaka posameznih izmerkov, naj bodo stranice paralerograma razmaknjene za toliko, kot je napaka izmerkov. Diagonali paralelograma sta narisani s sivo črto.

Napako smernega koeficienta premice δk, ocenimo tako, da poiščemo tisto diagonalo, katere smerni koeficient k_d se najbolj razlikuje od smernega koeficienta premice k. Absolutno napako izračunamo po predpisu

$$\delta k = \frac{|k - k_d|}{\sqrt{N-2}}.$$

V imenovalcu stoji koren števila merskih točk, ki jim odštejemo dve. To sledi iz tega, da potrebujemo vsaj dve točki, da lahko določimo premico in tedaj napake meritve niti ne moremo oceniti.

Napako presečišča z navpično osjo premice δn, ocenimo tako, da poiščemo tisto diagonalo, katere presečišče c_d se najbolj razlikuje od presečišča premice c. Absolutno napako izračunamo po predpisu

$$\delta c = \frac{|c - c_d|}{\sqrt{N-2}} .$$

Vsekakor pri ocenjevanju napake uporabljajte zdrav razum in ne zapletajte po nepotrebnem. Rezultat je tako ali tako le ocena napake in ga pišite le na eno mesto. Ko boste starješi in se boste ukvarjali s pomembnejšimi stvarmi boste tudi poznali postopke, s katerimi napako bolje ocenite.

Analitično določanje napak

Prileganje krivulj (popularno imenovano fitanje po angleški besedi 'fit') rezultatom je mnogo lažje, od kar nam pri tem pomagajo računalniki. Z računalniki lahko obdelamo veliko množico meritev z zapletenimi algoritmi. Algoritmom je skupen princip 'najmanjših kvadratov', ki pravi, da je najboljša vrednost parametra tista, pri kateri je vsota kvadratov odmikov merskih točk od napovedane krivulje minimalna. Procedure se seveda zapletejo čimveč je parametrov, s katerimi opišemo krivuljo fizikalnega modela, in količin, ki vplivajo na rezultat.

Da se bolje seznanimo s principom, si ga oglejmo na preprostem zgledu. Opazujmo izmerke x_i količine, ki je porazdeljena z normalno porazdelitvijo. Vseh izmerkov naj bo N. Predpostavimo, da je najboljši parameter, ki nam opiše izmerke x_d. Vsota kvadratov odmikov merskih točk od tega parametra je

$$s = \sum (x_i - x_d)^2 .$$

Zahtevajmo torej, da naj bo ta vsota minimalna (z drugimi besedami – poiščimo tisti x_d, pri katerem bo s najmanjši). To naredimo tako, da s, ki je funkcija x_d-ja, odvajamo po tej spremenljivki in poiščemo ničlo rezultata (z drugimi besedami – poiščemo ekstrem funkcje s):

$$\frac{\partial s}{\partial x_d} = -2\sum (x_i - x_d) = 0 .$$

Znak ∂ pomeni parcialno odvajanje in za razlago si poglejte kakšen matematični priročnik. Rezultat zgornje enačbe je jasen

$$x_d = \frac{\sum x_i}{N} = \bar{x} .$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\sum x_d = N x_d$.

Rezultat je znan od prej – najbolši parameter, ki nam opiše izmerke (sredino porazdelitve) je kar povprečna vrednost.

Pri meritvi N parov količin (x_i, y_i), bomo iskali parametra k in n v enačbi $y = k\,x + n$. Ocena za vrednost y_i je $y_i^* = k\ x_i + n$ in poiskati moramo tista k in n, pri katerih bo vsota $\varsigma = \sum (y_i - y_i^*)^2 = \sum (y_i - kx_i - n)^2$ minimalna za oba, k in n, naenkrat.

Iz pogoja $\frac{\partial \varsigma}{\partial n} = 0$ sledi $\sum (y_i - kx_i - n) = 0$ iz česar izrazimo nnajverjetnejše presečišče kot

$$n = \bar{y} - k\bar{x} ,$$

kjer sta $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ in $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$.

Najverjetnejši smerni koeficient sledi iz pogoja $\frac{\partial \varsigma}{\partial k} = 0$ in malo več računanja:

$$k = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Napaki smernega koeficienta in presečišča določimo po formulah:

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum (y_i - kx_i - n)^2}{(N-2)\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum (y_i - kx_i - n)^2}{N-2}.$$

Vendar pozor! V gornjih enačbah je upoštevana samo slučajna napaka, s katero so izmerki razmetani okoli premice. Če je ta napaka manjša od napake vsakega izmerka, potem je napaka koeficienta premice podana z

$$\sigma_k^2 = \frac{k^2}{(N-2)} \left(\frac{\Delta x^2}{(x_m - x_0)^2} + \frac{\Delta y^2}{(y_m - y_0)^2} \right).$$

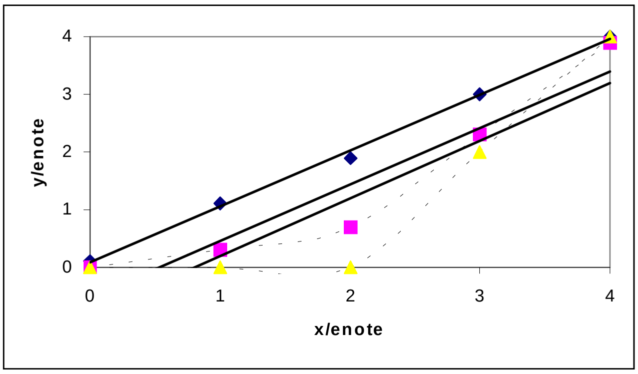
Absolutna napaka je za vse pare merskih točk približno enaka (Δx in Δy), maksimalni in minimalni izmerek pa sta označena z indeksoma m in 0.. Za ta primer smiselno uporabite navodila za grafično ocenjevanje napak.

Pri meritvah linearne odvisnosti je pomenljiv parameter tudi linearni korelacijski koeficient R, ki ga izračunamo po formuli

$$R = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}.$$

Ta parameter nam pove, kako dobro linearni približek opiše resnično odvisnost izmerkov. Vrednost blizu 1 pomeni dobro linearno ujemanje, bližje, kot je R ničli, slabše je ujemanje med meritvami in linearnim modelom. V tem primeru bi kazalo razmisliti o možnih sistematičnih napakah merilne metode ali pa o drugačnem modelu.

primer: Na spodnjem grafu so prikazene tri množice meritev. Pri vseh meritvah je smerni koeficient premice enak, samo ujemanje točk je pri vseh različno. Najboljše ujemanje ima množica meritev, ki se ji prilega najvišja premica. Za njih je R = 0,9995. Pri naslednji premici je R = 0,962 in pri množici meritev z najslabšim ujemanjem je R = 0,898. Že pri Drugi množici meritev bi parabola bolje opisala izmerke, kot pa jih premica.



Prilagajanje krivulj z računalnikom

Kot že rečeno, računalnik pomaga določiti parametre modela, tako da se model najbolje prilega meritvi. Algoritme lahko napišemo samo v kateremkoli od programskih jezikov. Algoritmi so zbrani v zbirkah Numerical Recipes, Cambridge. Obstaja pa tudi kopica programov, kjer je postopek avtomatiziran. Za iskanje smernega koeficienta premice lahko uporabimo matematično nezahteven program, kot je Excel, za zahtevnejše modele pa uporabimo Mathematico.

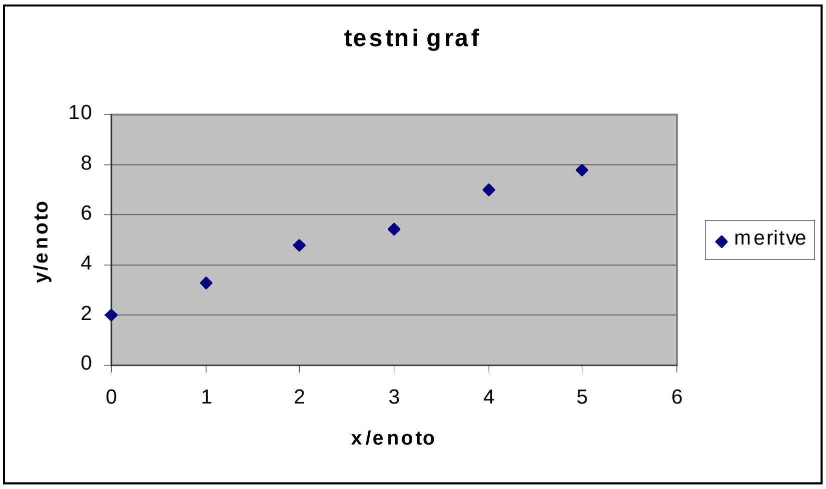
Prilagajanje v Excelu

Podatke, ki jih imamo shranjene na disketi, uvozimo v Excel. Kako točno poteka dialog pri tem postopku, je odvisno od formata zapisa podatkov in verzije programa. V vsakem primeru lahko podatke, če jih ni veliko, vnesemo tudi ročno.

Ko odprete program, vidite pred seboj tabelo polj. Stolpci so označeni s črkami, vrstice s številkami. Podatek vnesete v polje tako, da kliknete v polje, v katerega želite vnesti podatek, podatek vpišete in pritisnete `Enter`. Obdelajmo preprost primer, kjer smo merili dve količini, med katerima velja linearna zveza. Vrednosti neodvisne spremenljivke, tu jo imenujmo *x*, zapišemo v stolpec A. Vrednosti odvisne spremenljivke *y* vpišemo v stolpec B.

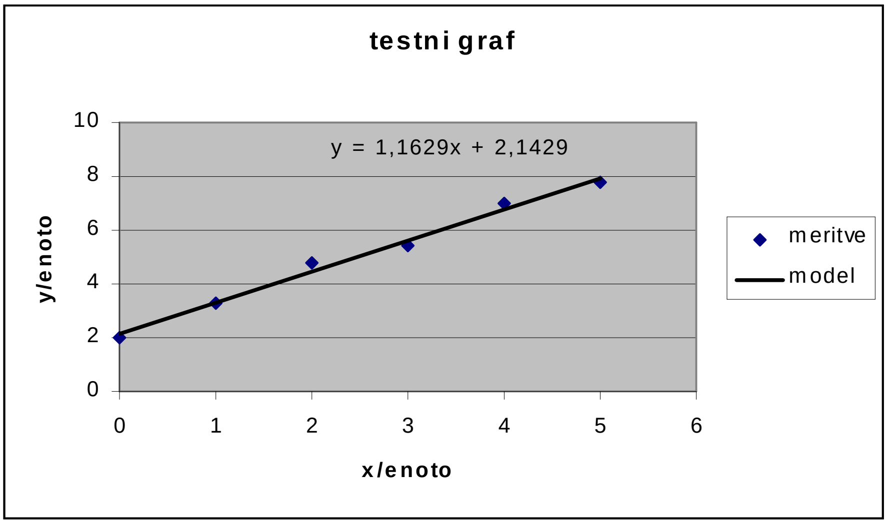
	A	B
1	x/enote	y/enote
2	0	2
3	1	3,3
4	2	4,8
5	3	5,4
6	4	7
7	5	7,8

Z miško nato označimo polja, v katerih so številke. To naredimo tako, da kliknemo z levim gumbom v polje, kjer je 0 in nato, s stisnjenim gumbom, potegnemo kazalec miške do polja s številko 7,8. Označena polja pri tem počrnijo. Na to na meniju izberemo `Insert` in v meniju kliknemo na `Chart...`. Odprl se bo čarovnik za risanje grafov. V mapi `Standard types` izberemo v oknu `Chart type` tip tabele `XY(Scatter)`. Pri `Chart sub-type` kar pustimo izbrano gornjo možnost, kjer merskih točk ne povežemo s črtami. Nato kliknemo `Next`. Odpre se novo okno čarovnika. Tu lahko v mapi `Series` poimenujemo merske točke, tako da v okno `Name` vpišemo njihovo ime (vpišimo `meritve`). Ponovno kliknemo `Next`. V tretjem oknu v mapi `Titles` poimenujemo graf v oknu `Chart title`, (vpišimo denimo `testni graf`) vodoravno os v oknu `Value (X) Axis` (vpišimo `x/enoto`) in navpično os v oknu `Value (Y) Axis` (vpišimo `y/enoto`). Na voljo je še nekaj drugih opcij. V mapi `Legend` lahko kliknemo v okence `Show legend`, tako da ne bo več odkljukano in potem na grafu ne bo legende. Legendo rabimo samo kadar je na grafu več krivulj in želimo povedati kaj katera od krivulj predstavlja. Ko ponovno kliknemo `Next` smo v zadnjem oknu čarovnika, kjer izberemo, kam nam naj program nariše graf. Pustimo kar privzeto izbiro in kliknemo `Finish`. Izriše se naslednji graf:



Grafu lahko spreminjamo lastnosti, tako da z desnim gumbom miške kliknemo vanj in odpre se nam obilica možnosti. Predvsem je tu pomembno, da primerno izberete enote na osi. Razdelkov naj ne bo preveč. V primeru, da so podatki zelo veliki ali majhni, bo izpis nepregleden, če boste uporabljali standardni format. Zato ga spremenite. To naredite tako, da z desnim gumbom kliknete na os, ki jo želite spremeniti. Odpre se dialog, v katerem je tudi izbira `Format Axis...` Kliknite ta ukaz in odprl se bo dialog, v katerem spreminjate lastnosti osi. V mapi `Number` v `Category` izberite format izpisa števil `Scientific`. V zgornjem primeru je to vseeno, saj uporablja največ dvomestna števila.

V naslednjem koraku bomo meritvem dodali premico, ki se izmerkom najbolje prilega. To naredimo tako, da z desnim gumbom kliknemo na eno od merskih točk. Odpre se dialog, v katerm izberemo ukaz `Add Trendline`. Odpre se dialog, v katerem v mapi `Type` izberemo `Linear` v `Trend/Regression type` oknu. V mapi `Options` lahko v oknu `Custom` poimenujemo premico (vpišimo `model`) in odkljukamo `Display equation on chart`. Končamo tako, da kliknemo `OK`. Enačbo premice še premaknemo na vidno mesto in ostane nam tak graf:



Seveda so vrednosti za smerni koeficient in presečišče napisani preveč natančno. Na to bomo pazili, ko bomo podali končni rezultat, pri tem vmesnem rezultatu pa zamižimo na eno oko.

Prilagajanje v Mathematici

Uporabe matematičnega programa Mathematica tu ne bomo razlagali. Ogledate si lahko primer prilagajanja parametrov kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c$ podatkom, ki so shranjeni v datoteki `data.dat`. V podatkih so zanalašč trije stolpci, da pokažemo, kako z Mathematico izberemo samo del tabele (v našem primeru drugi in tretji stolpec). V krepkem zapisu so ukazi, ki jih programu posredujemo tako, da jih vpišemo in potem pritisnemo `SHIFT+ENTER`. V normalni pisavi so rezultati, ki jih program vrne. Glavni rezultati so v našem primeru zapisani v spremenljivki **z** in sicer so vrednosti naših parametrov v polju 'BestFitParameters', napake teh parametrov pa v stolpcu 'Asymptotic SE' (za standard error) polja 'ParameterCITable'. Meritve skupaj z modelom lahko v Mathematici tudi narišemo. Za računanje parametrov uporabimo algoritem nelinearne regresije.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Statistics`NonlinearFit`
podatki = Import["c:\data.dat", "table"]
{{0, 1, 2}, {0, 2, 4}, {0, 3, 10}, {0, 4, 14}, {0, 5, 27}}
pod = TakeColumns[podatki, {2, 3}]
{{1, 2}, {2, 4}, {3, 10}, {4, 14}, {5, 27}}
fitfunkcija[x_, a_, b_, c_] := a x^2 + b x + c
z = NonlinearRegress[pod, fitfunkcija[x, a, b, c], {x}, {{a, 1}, {b, 1}, {c, 1}},
  MaxIterations → 50]
```

{BestFitParameters → {a → 1.42857, b → -2.57143, c → 3.4},

ParameterCITable →

	Estimate	Asymptotic SE	CI
a	1.42857	0.486554	{-0.664901, 3.52204}
b	-2.57143	2.97555	{-15.3742, 10.2313}
c	3.4	3.90458	{-13.4, 20.2}

,

EstimatedVariance → 3.31429,

ANOVATable →

	DF	SumOfSq	MeanSq
Model	3	1038.37	346.124
Error	2	6.62857	3.31429
Uncorrected Total	5	1045.	
Corrected Total	4	395.2	

,

AsymptoticCorrelationMatrix → $\begin{pmatrix} 1. & -0.981105 & 0.872278 \\ -0.981105 & 1. & -0.941376 \\ 0.872278 & -0.941376 & 1. \end{pmatrix}$,

FitCurvatureTable →

	Curvature
Max Intrinsic	0
Max Parameter-Effects	0
95. % Confidence Region	0.22843

}

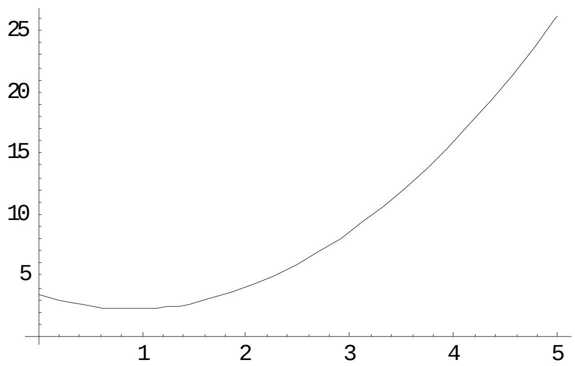
```
(* rezultat podamo:
    parameter=estimate+/-asymptoticSE
  a=1.4+/-0.5
   b=-3+/-3
    c=3+/-4 *)
z1 = BestFitParameters /. z
```

{a → 1.42857, b → -2.57143, c → 3.4}

```
{a1, b1, c1} = {a, b, c} /. z1
```

{1.42857, -2.57143, 3.4}

```
Plot[fitfunkcija[x, a1, b1, c1], {x, 0, 5}]
```

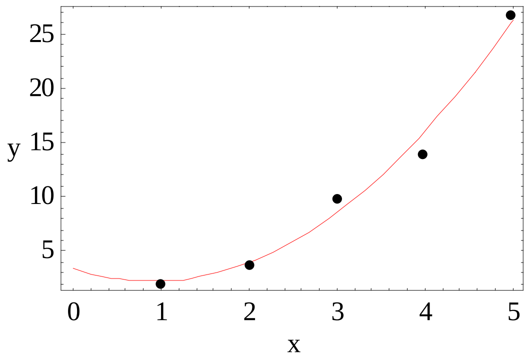


- Graphics -

```
p1 = ListPlot[pod, DisplayFunction → Identity, PlotRange → All,
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1]}];
p2 = Plot[fitfunkcija[x, a1, b1, c1], {x, 0, 5}, DisplayFunction → Identity,
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}]
```

- Graphics -

```
Show[p2, p1, Axes→ None, Frame→True, FrameLabel→{x, y},
 RotateLabel→ False, TextStyle→{FontFamily->"Times", FontSize→12},
 DisplayFunction→$DisplayFunction]
```



- Graphics -

Label1