

Kotaljenje krožnice po regularni krivulji

Primož Moravec
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

4. maj 2011

Math. Subj. Class. (2000): 53A04

Povzetek

V članku izpeljemo parametrično enačbo krivulje, po kateri se giblje izbrana točka na krožnici, ki se brez zdrsavanja kotali po regularni krivulji. Obravnavamo tudi kotaljenje po prostorskih krivuljah.

Rolling of a circle over a regular curve

Abstract

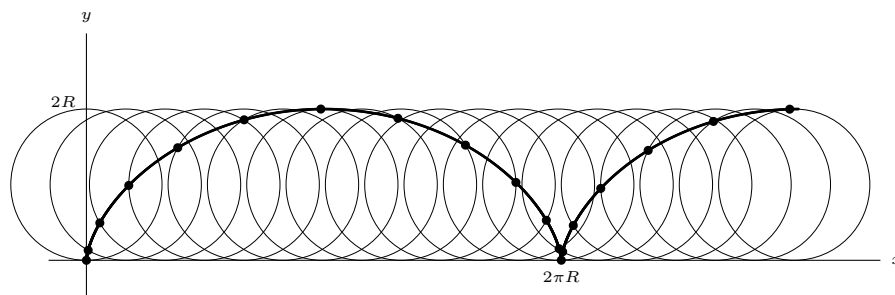
In this paper we find a parametric equation of a curve which is the locus of points generated by a fixed point of a circle as it rolls over a regular curve without slipping. We also consider the rolling of a circle over a space curve.

1 Uvod

Če krožnico zakotalimo po vodoravni podlagi, pri čemer gibanje poteka brez zdrsavanja, krivuljo, ki jo opiše izbrana točka na krožnici, imenujemo *cikloida*. Ime je postavil Galileo Galilei leta 1599, ki je to krivuljo preučeval v zvezi z gibanjem planetov. Cikloida je že v sedemnajstem stoletju igrala pomembno vlogo v geometriji. Pravili so ji celo „Helena geometrov“, saj je povzročala pogoste spore med matematiki tistega časa. Več o zgodovinskem ozadju te krivulje in nekaterih posplošitev lahko bralec najde v Proctorjevi knjigi [4].

Cikloida igra pomembno vlogo tudi v fiziki. To je namreč krivulja, ki je rešitev problema *brahistohrone*. Ta variacijski problem sprašuje po enačbi krivulje, ki gre skozi dani točki T_1 in T_2 , po kateri se mora gibati točkasto telo pod vplivom sile teže, da bo v brezračnem prostoru prišla najhitreje od T_1 do T_2 . Problem in njegova rešitev sta obravnavana tudi v Vidavovi knjigi [6]. Poleg tega je Christiaan Huygens v sedemnajstem stoletju uporabil lastnosti cikloid pri konstrukciji natančnih ur, ki so se uporabljale v navigaciji. Geometrijske in fizikalne lastnosti cikloid ter nekaterih posplošitev je podrobno opisal Lockwood [2].

Postavimo celotno dogajanje v ravninski kartezični koordinatni sistem, pri tem pa zaradi enostavnosti predpostavimo, da se krožnica polmera R kotali po abscisni osi. Če na začetku krožnico postavimo tako, da se abscisne osi dotika v izhodišču koordinatnega sistema, označimo točko $O(0,0)$ na tej krožnici in spremljamo njeno gibanje, ko se krožnica kotali v pozitivni smeri x -osi, dobimo krivuljo, kot kaže slika 1.



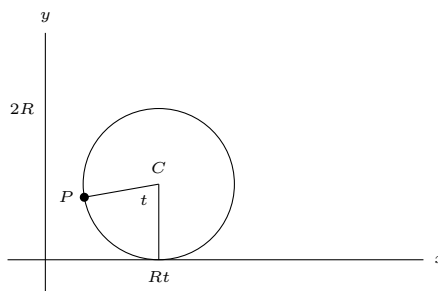
Slika 1: Kotaljenje krožnice po abscisni osi.

Razmeroma enostavno je izpeljati parametrično enačbo cikloide, ki je prikazana na sliki 1. V ta namen si oglejmo krožnico, ki je napravila pot Rt od izhodišča. Fizikalno gledano je to opravljena pot v času t , če se krožnica kotali s kotno hitrostjo 1 s^{-1} . Če ima označena točka na tej krožnici koordinati $P(x,y)$, potem s pomočjo slike 2 hitro vidimo, da x in y lahko opišemo s pomočjo t na naslednji način:

$$x = R(t - \sin t), \quad (1)$$

$$y = R(1 - \cos t). \quad (2)$$

V nadaljevanju članka si bomo ogledali splošnejšo situacijo, ko se krožnica kotali po primerni krivulji. Najprej bomo obdelali kotaljenje po ravninski



Slika 2: Izpeljava parametrične enačbe cikloide.

krivulji. Tu bralcu za razumevanje zadošča osnovno znanje analize ter malo linearne algebre. Na koncu bomo pokazali, da lahko podoben pristop uporabimo tudi za kotaljenje krogle vzdolž prostorske krivulje, ki leži na dani ploskvi. Tu bo poznavanje osnov diferencialne geometrije povsem zadoščalo.

2 Kotaljenje po regularni ravninski krivulji

Recimo, da se krožnica polmera R kotali po regularni ravninski krivulji $\mathcal{C}$, ki je dana s parametrično enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ za $u \in I \subseteq \mathbb{R}$. Ob tem se spomnimo, da krivulji z enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ pravimo *regularna krivulja*, če je neskončnokrat zvezno odvedljiva, odvod $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/du$ pa je različen od nič v vsaki njeni točki. Če si torej krivuljo predstavljamo kot tir gibanja točke, regularnostni pogoj pomeni, da se točka nikjer ne ustavi. Krivulji $\mathcal{C}$ pravimo *lok*, če je funkcija $\mathbf{r}$ na množici I injektivna, torej krivulja nima samopresečišč. Predpostavimo, da se krožnica kotali po regularnem loku brez zdrsanja, v smeri naraščajočega parametra u . Poleg tega bi radi dosegli, da se krožnica pri svojem kotaljenju nikjer ne „zatakne“, kar pomeni, da krožnica krivuljo seka le v dotikališču. Vsaj v primeru, ko je I kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$, je to vedno mogoče:

Trditev. *Naj bo $\mathcal{C}$ regularen lok, ki je dan s parametrično enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ za $u \in I \subseteq \mathbb{R}$. Če je I kompaktna množica, obstaja $R > 0$, da se krožnica s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$ kotali brez zatikanja.*

Skicirajmo dokaz te trditve. Spomnimo se, da je *krivinska krožnica* v dani točki P krivulje $\mathcal{C}$ limita krožnic, ki gredo skozi P in njeni bližnji točki M in

N na krivulji, ko gresta M in N proti P . Polmer krivinske krožnice v dani točki krivulje lahko izračunamo po formuli [7]

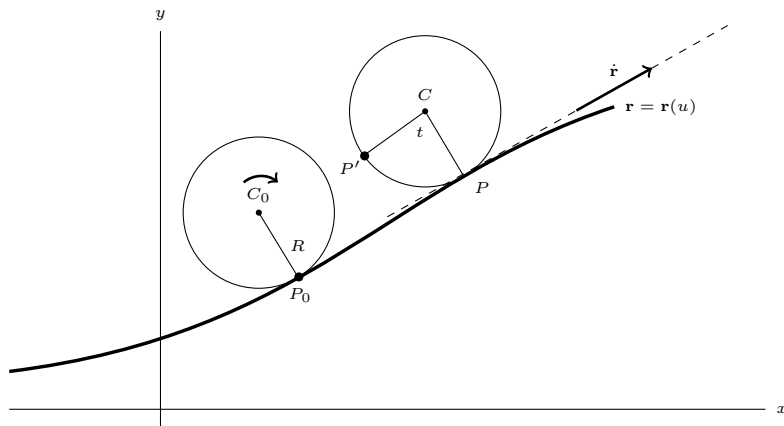
$$\rho(u) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(u)|^3}{|\dot{x}(u)\ddot{y}(u) - \dot{y}(u)\ddot{x}(u)|}.$$

Krivinska krožnica se v dani točki najboljše prilega krivulji, zato moramo za točke $\mathbf{r}(u_0)$ na krivulji, v katerih sta središči kotaleče se krožnice in krivinske krožnice na isti strani krivulje, najprej zahtevati $R \leq \rho(u_0)$. Kljub temu pa lahko krivinska krožnica seka krivuljo v točki, ki je poljubno blizu dane točke $\mathbf{r}(u_0)$. Zato R še nekoliko zmanjšajmo; če npr. zahtevamo $R \leq \rho(u_0)/2$, potem obstaja $\epsilon = \epsilon(u_0) > 0$, da krožnica s polmerom R , ki se krivulje dotika v $\mathbf{r}(u_0)$, ne gre skozi točko $\mathbf{r}(u)$ za vsak $u \in (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \setminus \{u_0\}$. Sedaj moramo doseči še, da kotaleča se krožnica ne seka točk $\mathbf{r}(u)$ na krivulji za $u \in I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$. Ker je množica $I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ kompaktna in krivulja nima samopresečišč, je razdalja med $\mathbf{r}(u_0)$ in lokom $\{\mathbf{r}(u); u \in I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)\}$ pozitivna. Če je premer krožnice manjši od te razdalje, se krožnica preostanka krivulje ne dotakne. Kratek premislek pokaže, da se krožnica z malo manjšim polmerom lepo kotali tudi v točkah blizu $\mathbf{r}(u_0)$. Zato zaradi kompaktnosti obstaja polmer, ki ustreza pogojem v trditvi na celem intervalu I .

Sedaj si oglejmo izpeljavo krivulje, ki jo opiše izbrana točka na krožnici polmera R , ki se kotali po krivulji $\mathcal{C}$. Fiksiramo točko na krožnici. Recimo, da je pri $u = u_0$ to tista točka P_0 , kjer se krožnica dotika krivulje $\mathcal{C}$, torej je njen položaj določen z $\mathbf{r}(u_0)$. Pri izbiri, po kateri strani krivulje se krožnica kotali, imamo dve možnosti. Če se postavimo v središče C krožnice in gledamo proti dotikališču krožnice in krivulje $\mathcal{C}$, predpostavimo najprej, da je konec tangentnega vektorja $\dot{\mathbf{r}}$, ki ga postavimo na krivuljo v dotikališču, vedno na levi strani. Označimo točko na krivulji $\mathcal{C}$, ki ustreza vektorju $\mathbf{r}(u)$, s P , opazovano točko na krožnici, ki se dotika krivulje v točki P , pa označimo s P' . Postavimo $t = \angle PCP'$. Potem je dolžina loka krivulje $\mathcal{C}$ med točkama P_0 and P enaka dolžini krožnega loka med točkama P in P' . Od tod dobimo naslednjo zvezo med parametroma t in u :

$$t = \frac{1}{R} \int_{u_0}^u |\dot{\mathbf{r}}(v)| dv. \quad (3)$$

Z drugimi besedami, če gledamo Rt kot funkcijo parametra u , je to ravno *naravni parameter* za krivuljo $\mathcal{C}$ [7, stran 21].



Slika 3: Kotaljenje krožnice po regularni krivulji.

Označimo z $\mathcal{V}_\varphi$ linearno transformacijo $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki predstavlja vrtež za kot φ okrog izhodišča; bralec si lahko več o linearnih transformacijah prebere v Križaničevem učbeniku [1]. Vektor $\mathbf{a}$ od točke P do točke C dobimo tako, da enotski vektor v smeri vektorja $\dot{\mathbf{r}}$ zavrtimo za $\pi/2$ in potem ustrezno popravimo njegovo dolžino:

$$\mathbf{a} = \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|} \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathbf{r}}.$$

Če z $\mathbf{r}_C$ označimo krajevni vektor točke C , potem iz zgornje zveze dobimo

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r} + \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|} \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} \dot{\mathbf{r}}.$$

Naš cilj je opisati krajevni vektor $\mathbf{r}_{P'}$ točke P' . To lahko dosežemo, če najprej vektor $\mathbf{a}$ zavrtimo za kot t v smeri gibanja urinega kazalca (torej v negativni smeri). Če z $\tilde{\mathbf{a}}$ označimo vektor od točke C do točke P' , dobimo $\tilde{\mathbf{a}} = -\mathcal{V}_{-t} \mathbf{a}$, od tod pa sledi

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} + \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|} (\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}-t}) \dot{\mathbf{r}}. \quad (4)$$

Podoben sklep lahko napravimo v primeru, ko se krožnica po krivulji kotali z druge strani. Sedaj je torej, gledano iz središča C krožnice proti

dotikališču krožnice in krivulje $\mathcal{C}$, konec tangentnega vektorja $\dot{\mathbf{r}}$, ki ga postavimo na krivuljo v dotikališču, vedno na desni strani. Vse, kar moramo spremeniti v zgornjem sklepu, so smeri vrtežev. Če upoštevamo, da velja $\mathcal{V}_{-\pi/2} = -\mathcal{V}_{\pi/2}$, hitro dobimo

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} - \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|}(\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}+t})\dot{\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Enačbi (4) in (5) predstavljata vektorski enačbi krivulj, ki ju dobimo pri kotaljenju krožnice po krivulji $\mathcal{C}$. Če želimo dobiti parametrična opisa, označimo $\mathbf{r} = (x(u) \ y(u))^T$ in $\mathbf{r}_{P'} = (X(u) \ Y(u))^T$. V standardni bazi $\mathbb{R}^2$ lahko linearno transformacijo $\mathcal{V}_\varphi$ predstavimo z matriko

$$\mathcal{V}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

torej je

$$\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}+t} = \begin{pmatrix} \mp \sin t & -1 + \cos t \\ 1 - \cos t & \mp \sin t \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi:

$$\begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}} \begin{pmatrix} \mp \sin t(u) & -1 + \cos t(u) \\ 1 - \cos t(u) & \mp \sin t(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{pmatrix}.$$

Če slednjo enačbo napišemo po komponentah, dobimo:

Izrek. *Naj bo $\mathcal{C}$ regularna ravninska krivulja, ki je dana s parametrično enačbo $x = x(u)$, $y = y(u)$. Krivulja, ki jo opiše izbrana točka na krožnici polmera R , ki se kotali po krivulji $\mathcal{C}$ brez zdrsavanja, ima parametrično enačbo*

$$X(u) = x(u) \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}} (\mp \dot{x}(u) \sin t(u) + \dot{y}(u)(-1 + \cos t(u))), \quad (6)$$

$$Y(u) = y(u) \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}} (\dot{x}(u)(1 - \cos t(u)) \mp \dot{y}(u) \sin t(u)). \quad (7)$$

Pri tem je funkcija $t(u)$ dana z enačbo (3), izbira predznaka pa je odvisna od tega, po kateri strani krivulje se krožnica kotali.

Oglejmo si že znani primer, ko se krožnica kotali po x -osi, torej $x(u) = u$, $y(u) = 0$, od koder dobimo $\dot{x}(u) = 1$, $\dot{y}(u) = 0$ in $\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = 1$. Če postavimo začetno krožnico v izhodišče koordinatnega sistema, potem je $u_0 = 0$, zato iz enačbe (3) sledi $t = u/R$ oziroma $u = Rt$. Zato enačbi (6) in (7) postaneta $X(t) = R(t - \sin t)$ in $Y(t) = \pm R(1 - \cos t)$. Dobimo enačbi dveh cikloid, eno na zgornji, drugo pa na spodnji strani abscisne osi.

V naslednjem zgledu si oglejmo še en klasičen primer [2], ko se krožnica s polmerom R kotali brez zdrsavanja po krožnici s središčem v izhodišču in polmerom a , kjer je $a > R$. Slednjo krožnico lahko opišemo s parametričnima enačbama $x = a \cos u$, $y = a \sin u$. Izberimo $u_0 = 0$, torej na začetku kotalečo krožnico postavimo tako, da se dane krožnice s polmerom a dotika v točki $T(a, 0)$. Kratek račun pokaže, da je $\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = a$. Iz enačbe (3) dobimo $t(u) = au/R$. Ker iz te zveze zlahka izrazimo u v odvisnosti od t , bomo enačbi (6) in (7) raje zapisali v odvisnosti od parametra t :

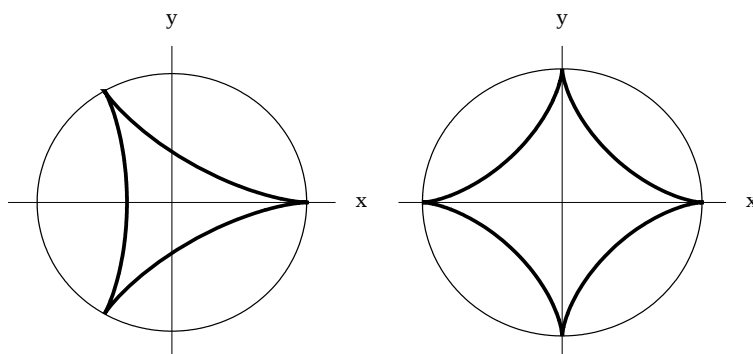
$$X(t) = (a \mp R) \cos \frac{R}{a}t \pm R \cos \left(1 \mp \frac{R}{a}\right)t, \quad (8)$$

$$Y(t) = (a \mp R) \sin \frac{R}{a}t - R \sin \left(1 \mp \frac{R}{a}\right)t. \quad (9)$$

Enačbi za X in Y , v katerih vzamemo zgornji predznak, predstavljata krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica s polmerom R kotali po notranji strani krožnice s polmerom a . Taki krivulji pravimo *hipocikloida*. Odlikovana posebna primera hipocikloid sta *deltoida* in *astroida*. Prvo dobimo za $a = 3R$, drugo pa za $a = 4R$. Njuna tira poti sta predstavljena na sliki 4. Omenimo, da je deltoido prvi preučeval Leonhard Euler leta 1745 v povezavi s problemom iz optike. Astroida igra pomembno vlogo v termodinamiki, to je namreč krivulja, ki loči območje z enim minimumom proste energije od tistega, ki ima dva taka minimuma [5]. Še več lastnosti teh dveh krivulj in ostalih hipocikloid je opisanih v knjigi [2].

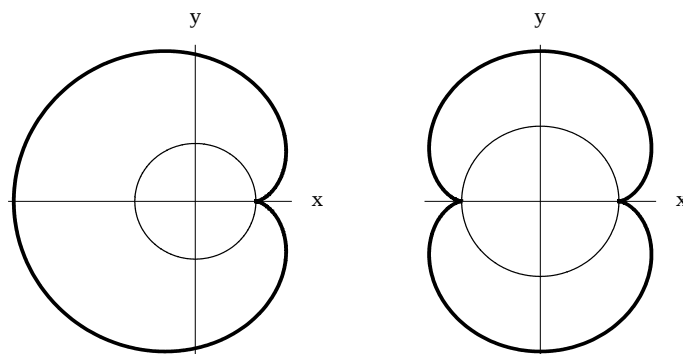
Če v enačbah (8) in (9) vzamemo spodnji predznak, predstavljata krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica s polmerom R kotali po zunanji strani krožnice s polmerom a . Taki krivulji pravimo *epicikloida*. Epicikloide je prvi preučeval Ole Rømer leta 1674 pri študiju najboljših oblik zobatih koles.

V primeru, ko je $a = R$, kotaleča se krožnica napravi ravno en obhod. Krivulji, ki jo dobimo, zaradi njene značilne oblike pravimo *kardioida*. V



Slika 4: Deltoida in astroida.

primeru, ko je $a = 2R$, dobljeno krivuljo imenujemo *nefroida* [2]. Obe krivulji sta prikazani na sliki 5.

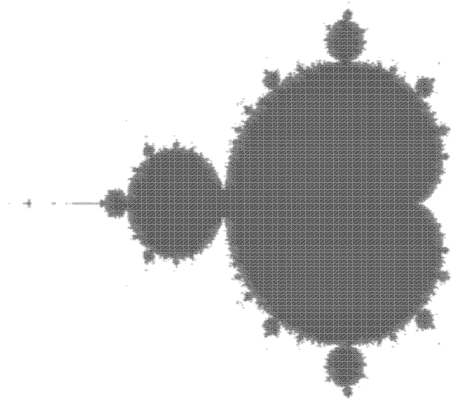


Slika 5: Kardioida in nefroida.

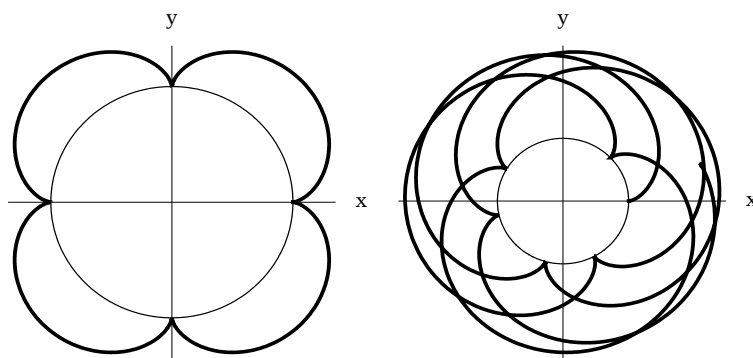
Kardioida ima več lepih geometrijskih lastnosti. Dobimo jo, če z inverzijo preslikamo parabolo čez poljubno krožnico, katere središče leži v gorišču dane parabole. Poleg tega je kardioida rob osrednjega „mehurčka“ Mandelbrotove množice [3], ki igra pomembno vlogo v teoriji fraktalov, glej sliko 6. V fiziki sta kardioida in nefroida povezani s problemi iz optike.

Epiklkoida, dana z enačbama (8) in (9), je periodična natanko tedaj, ko je a/R racionalno število (podoben sklep velja tudi v primeru hipocikloide). Na sliki 7 sta prikazana primera periodične in neperiodične epiklkoida.

Oglejmo si sedaj kotaljenje krožnice po verižnici, ki ima enačbo $y = \operatorname{ch} x$. Verižnico lahko parametriziramo kar z $x(u) = u$, $y(u) = \operatorname{ch} u$. Izberimo



Slika 6: Mandelbrotova množica.

Slika 7: Epicikloidi za $a/R = 4$ in $a/R = \sqrt{2}$.

$u_0 = 0$. Tedaj je $\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = \text{ch } u$, iz enačbe (3) pa dobimo

$$t(u) = \frac{1}{R} \text{sh } u.$$

Če to vstavimo v enačbi (6) in (7), dobimo parametrizaciji cikloid po verižnici, enkrat po zgornji, drugič pa po spodnji strani. Tudi v tem primeru dobimo nekoliko lepši enačbi, če parametriziramo po parametru t . Parameter u se da namreč lepo izraziti v odvisnosti od t :

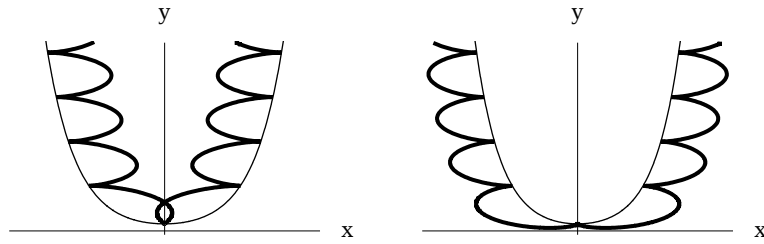
$$u = \text{Arsh } Rt.$$

Ker je $\text{ch } u = \sqrt{1 + R^2 t^2}$, od tod dobimo:

$$X(t) = \operatorname{Arsh} Rt \pm \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 t^2}} (\mp \sin t + Rt(-1 + \cos t)), \quad (10)$$

$$Y(t) = \sqrt{1 + R^2 t^2} \pm \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 t^2}} (1 - \cos t \mp Rt \sin t). \quad (11)$$

Obe tako dobljeni cikloidi sta prikazani na sliki 8.

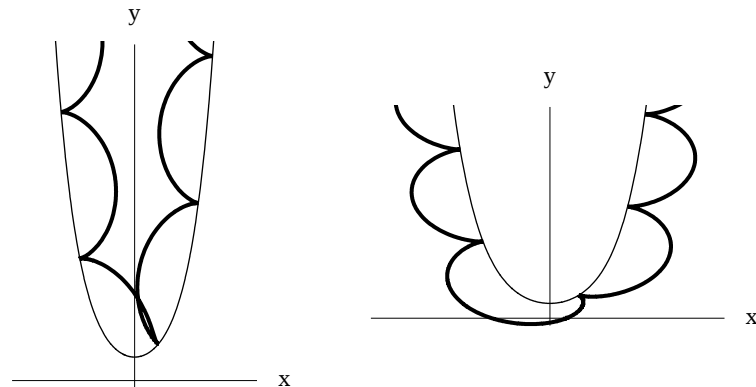


Slika 8: Kotaljenje krožnice po verižnici z začetkom v izhodišču.

Oglejmo si, kaj se zgodi, če začetek kotaljenja po verižnici izberemo v kakšni drugi točki. V tem primeru iz enačbe (3) dobimo

$$t = \frac{1}{R}(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} u_0),$$

torej $u = \operatorname{Arsh}(Rt + \operatorname{sh} u_0)$. V tem primeru enačbi cikloid po verižnici postaneta nekoliko bolj zapleteni, zato ju ne bomo zapisali. Bralca vabimo, da to za vajo stori sam. Tira poti obeh krivulj sta prikazana na sliki 9.



Slika 9: Kotaljenje krožnice po verižnici z začetkom izven izhodišča.

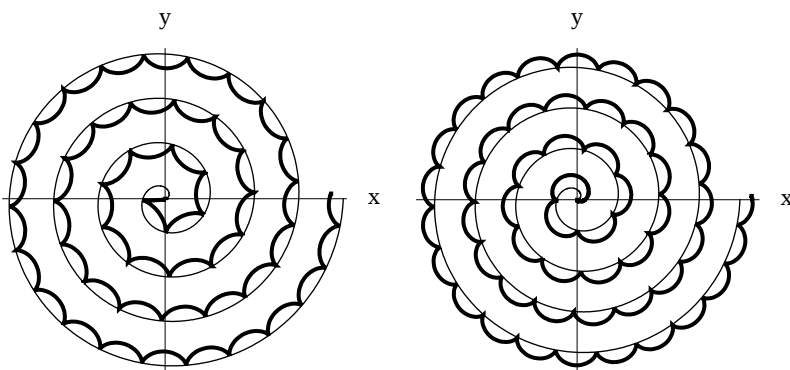
Za konec si pogledjmo še krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica kotali po Arhimedovi spirali. Arhimedova spirala ima v polarni obliki enačbo $\rho(\varphi) = a\varphi$, kjer je $a > 0$. Zato jo lahko parametriziramo z $x(u) = au \cos u$, $y(u) = au \sin u$. Postavimo $u_0 = 0$. S krajšim računom hitro dobimo, da je

$$\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = a\sqrt{1 + u^2}$$

in

$$t = \frac{a}{R} \int_0^u \sqrt{1 + v^2} dv = \frac{a}{2R} (u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{Arsh} u).$$

V tem primeru je u težko izraziti v odvisnosti od t , zato enačbi cikloid (6) in (7) parametriziramo v odvisnosti od u . Tudi tu dobimo zapleteni enačbi, zato ju ne bomo zapisali. Cikloidi sta prikazani na sliki 10.



Slika 10: Kotaljenje krožnice po Arhimedovi spirali.

Bralca ob tem vabimo, da s pomočjo zgoraj opisanega postopka poskuša sam najti nove primere cikloidnih krivulj. Poleg tega naj za zgornje primere cikloid oceni, kolikšen je lahko največ polmer kotaleče se krožnice, da kotaljenje poteka brez zatikanja.

3 Kotaljenje po regularni prostorski krivulji

Preselimo sedaj dogajanje v trirazsežni prostor in opazujmo kotaljenje krogle s polmerom R po ploskvi vzdolž dane krivulje, ki leži na tej ploskvi. Naj bo D odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$ in naj bo $\mathcal{P}$ ploskev, ki je podana s parametrično

enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, kjer je $(u, v) \in D$ in je $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ neskončnokrat parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Predpostavimo še, da je ploskev *regularna*, kar pomeni, da na celnem območju D velja

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0.$$

Naj bo $u = u(w)$ in $v = v(w)$, kjer je $w \in I \subseteq \mathbb{R}$, parametrična enačba regularne krivulje, ki poteka po območju D . Tedaj je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(w), v(w))$ enačba regularne krivulje $\mathcal{C}$, ki leži na ploskvi $\mathcal{P}$. Pri oznakah smo tu malce površni in $\mathbf{r}$ uporabljamo tako za krajevni vektor $\mathbf{r}(u, v)$ točke na ploskvi kot tudi za krajevni vektor točke $\mathbf{r}(w)$ na krivulji, vendar pa je iz konteksta nedvoumno razvidno, kaj oznaka pomeni. Tudi tu predpostavimo, da je parametrizacija krivulje injektivna in da se krogla kotali v smeri naraščajočega parametra w . Izberimo začetno točko $P_0 \in \mathcal{C}$, ki ji v parametrizaciji ustreza parameter w_0 . Naj bo P poljubna točka na krivulji $\mathcal{C}$, ki ji ustreza parameter w in ima krajevni vektor $\mathbf{r}$. Naj bo $\mathbf{t}$ enotski vektor v smeri tangente na krivuljo $\mathcal{C}$ v točki P , torej velja

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \quad (12)$$

pri čemer tu uporabljamo oznako $\dot{\mathbf{r}}$ za odvod funkcije $\mathbf{r}$ po spremenljivki w . Po verižnem pravilu velja

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{u}\mathbf{r}_u + \dot{v}\mathbf{r}_v,$$

kar dokazuje (gl. tudi izrek II.1 v [7]), da tangentni vektor $\mathbf{t}$ leži v tangentni ravnini Σ na ploskev $\mathcal{P}$ v točki P , torej tisti ravnini, ki gre skozi točko P in vsebuje vektorja $\mathbf{r}_u(w)$ in $\mathbf{r}_v(w)$. Naj bo $\mathbf{n}$ enotska normala na ravnino Σ , torej

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \quad (13)$$

Pri tem je predznak odvisen od tega, kako si na začetku izberemo orientacijo ploskve $\mathcal{P}$. To storimo tako, da normala kaže v isto smer kot vektor od P do C , kjer je C središče kotaleče se kroglice, ki se ploskve dotika v točki P . Na kroglici izberimo opazovano točko, pri čemer predpostavimo, da se pri $w = w_0$ ta točka ujema s P_0 . Naj bo P' opazovana točka na kroglici v trenutku, ko se ta prikotali v točko P . Točki P in P' ležita na krožnici središčem C in polmerom R , ki leži v *pritisnjeni ravnini* krivulje $\mathcal{C}$ v točki P , torej ravnini, ki vsebuje enotska pravokotna vektorja $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$.

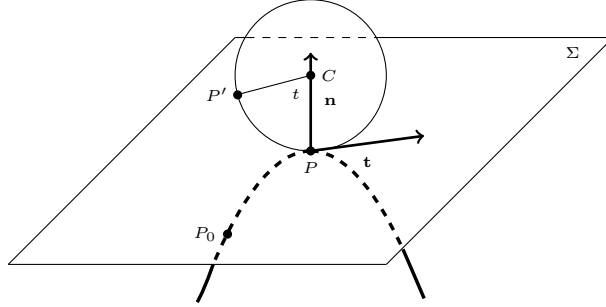
Če je I kompaktna množica, potem lahko izberemo tak $R > 0$, da kotaljenje krogle s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$ poteka brez zatikanja. Sklep je podoben kot v ravninskem primeru, zato bralca vabimo, da podrobnosti izpelje sam. Pri tem omenimo le, da se krivinski polmer $\rho(w)$ prostorske krivulje računa kot $\rho(w) = 1/\kappa(w)$, kjer je $\kappa(w)$ *fleksijska ukrivljenost* oziroma *zvitost* krivulje v dani točki. Ta se izračuna po formuli [7]

$$\kappa(w) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(w) \times \ddot{\mathbf{r}}(w)|}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|^3}.$$

Izpeljimo sedaj enačbo krivulje, ki jo opišejo točke P' . Naj bo $t = \angle PCP'$. Podobno kot v ravninskem primeru, torej kot v enačbi (4), dobimo

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} + R(\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}}^{\Sigma} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}-t}^{\Sigma})\mathbf{t}, \quad (14)$$

kjer $\mathcal{V}_{\varphi}^{\Sigma}$ označuje vrtež $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ okrog izhodišča v koordinatnem sistemu v pozitivni smeri za kot φ okrog osi, napete na vektor $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$.



Slika 11: Kotaljenje krogle po prostorski krivulji.

Vektorji $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ in $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Hitro vidimo, da je

$$\mathcal{V}_{\varphi}^{\Sigma}\mathbf{t} = \cos \varphi \cdot \mathbf{t} + \sin \varphi \cdot \mathbf{n},$$

zato lahko enačbo (14) prepišemo v

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} - R \sin t \cdot \mathbf{t} + R(1 - \cos t) \cdot \mathbf{n}. \quad (15)$$

Preostane nam še, da najdemo zvezo med parametroma t in w . Tu opazimo, da je dolžina loka krivulje $\mathcal{C}$ med P_0 in P enaka dolžini krožnega loka med točkama P in P' . Zato je

$$t = \frac{1}{R} \int_{w_0}^w |\dot{\mathbf{r}}(\omega)| d\omega = \frac{1}{R} \int_{w_0}^w \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} d\omega, \quad (16)$$

kjer so $E = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v$ in $G = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v$ koeficienti prve fundamentalne forme ploskve $\mathcal{P}$ [7]. Iz enačbe (16) dobimo t izražen v odvisnosti od parametra w , Rt pa je tudi tu naravni parameter krivulje $\mathcal{C}$.

Enačba (15) nam že podaja vektorski opis cikloidne krivulje, ki jo dobimo pri kotaljenju krogle s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$. Pri risanju tira poti krivulje je uporabnejši zapis enačbe po komponentah. Vektor $\mathbf{r}$ ima komponente $(x(w) \ y(w) \ z(w))^T$, poleg tega pa označimo $\mathbf{r}_{P'} = (X(w) \ Y(w) \ Z(w))^T$. Komponente vektorjev $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$ dobimo iz enačb (12) in (13). Če označimo $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\tilde{x}(w) \ \tilde{y}(w) \ \tilde{z}(w))^T$ in upoštevamo, da je $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, potem dobimo

Izrek. *Naj bo $\mathcal{P}$ regularna ploskev, dana z enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Naj bo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(w), v(w))$ enačba regularne krivulje $\mathcal{C}$, ki leži na ploskvi $\mathcal{P}$. Ob zgornjih oznakah izbrana točka na krogli s polmerom R , ki se kotali po ploskvi $\mathcal{P}$ vzdolž krivulje $\mathcal{C}$, opiše krivuljo z enačbo*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{R \sin t}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \pm \frac{R(1 - \cos t)}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Pri tem izbira $\pm$ v enačbi (17) odloča o tem, po kateri strani ploskve se krogla kotali.

Oglejmo si primer, ko se krogla s polmerom R kotali po vzporedniku sfere z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, kjer je $a > R$. Sfero lahko parametriziramo s sfernimi koordinatami:

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Pri tem je $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\theta \in [0, \pi]$. Točke na danem vzporedniku so natanko tiste, ki imajo konstanten parameter θ , torej $\theta = \theta_0$. Vektorska funkcija $\mathbf{r}(\varphi, \theta_0)$ nam podaja parametrizacijo vzporednika v odvisnosti od parametra φ . Izberimo še orientacijo sfere tako, da normala vedno kaže ven, torej naj se krogla kotali po zunanji strani sfere. Iz enačb (12) in (13) s krajšim računom dobimo

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \varphi \\ \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

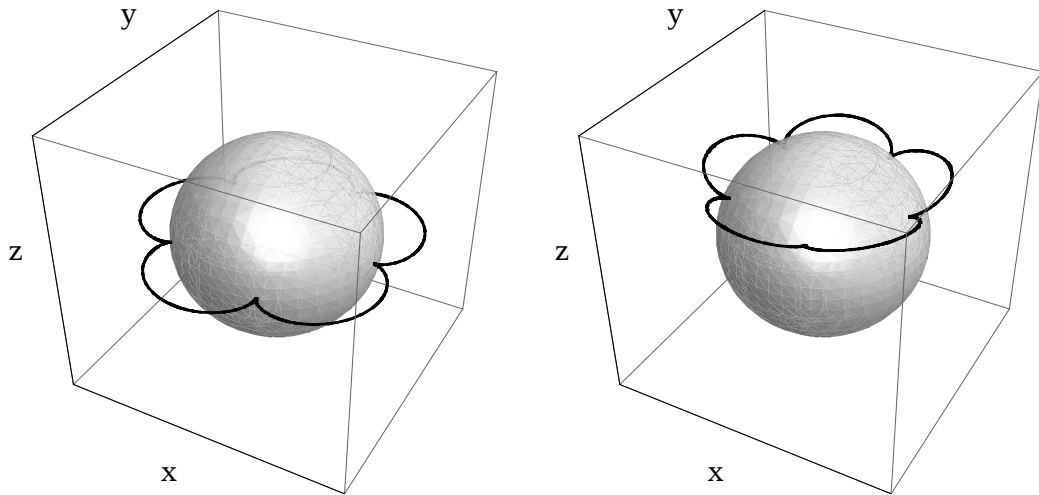
Če izberemo začetno vrednost za φ kar $\varphi_0 = 0$, potem iz enačbe (16) dobimo

$$t = \frac{1}{R} \int_0^\varphi |\dot{\mathbf{r}}(\omega, \theta_0)| d\omega = \frac{a \sin \theta_0}{R} \varphi.$$

Označimo $A = (a/R) \sin \theta_0$. Če opazimo, da je $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$, iz enačbe (15) dobimo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (a + R(1 - \cos A\varphi)) \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \varphi \\ \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} - R \sin A\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Dva primera krivulj z enačbo (18) sta prikazana na sliki 12. Omenimo še, da je krivulja, dana z enačbo (18), periodična natanko tedaj, ko je razmerje med polmerom vzporednika pri $\theta = \theta_0$ in polmerom R kotaleče se krogle racionalno število. Lahko je videti, da je to izpolnjeno natanko tedaj, ko je $A \in \mathbb{Q}$.

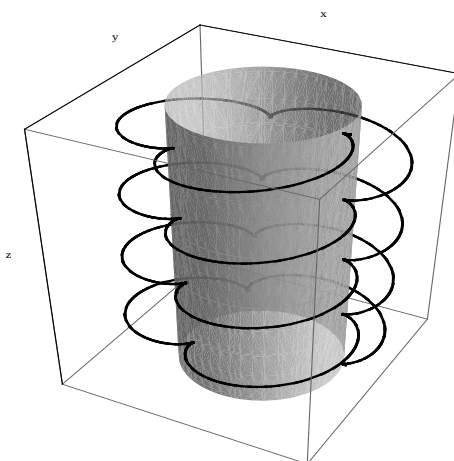


Slika 12: Kotaljenje krogle po vzporedniku sfere.

Za konec vabimo bralca, da sam izpelje še nekaj podobnih enačb. Poišče naj na primer enačbo krivulje, ki jo dobimo, če se kroglja s polmerom R kotali po spirali s parametrično enačbo

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

kjer sta a in b pozitivni števili. Pri tem naj upošteva, da je ta spirala napeta na valj $x^2 + y^2 = a^2$. Pri izpeljavi je dobro uporabiti parametrizacijo ploskve s cilindričnimi koordinatami. Ena od teh cikloidnih krivulj je prikazana na sliki 13.



Slika 13: Kotaljenje po spirali, naviti na valj.

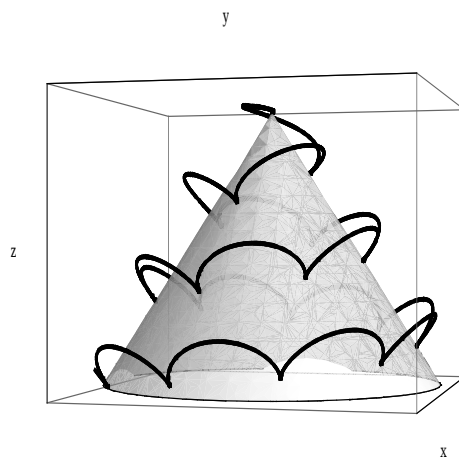
Kot zadnji zgled si oglejmo kotaljenje krogle po spirali

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \cos bt \\ at \sin bt \\ at \end{pmatrix},$$

ki je navita na stožec $x^2 + y^2 = z^2$. Bralec lahko za vajo izpelje enačbo te cikloidne krivulje, katere tir poti je prikazan na sliki 14.

Literatura

- [1] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, d.d., Ljubljana, 1993.
- [2] E. H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
- [3] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals – New Frontiers of Science*, Springer, New-York 1992, 2004.



Slika 14: Kotaljenje po spirali, naviti na stožec.

- [4] R. A. Proctor, *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves*, Longmans, Green, and Co., London, 1878.
- [5] E. C. Stoner, E. P. Wohlfarth, *A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys*, Phil. Trans. R. Soc. London A **240** (1948), 599–642.
- [6] I. Vidav, *Variacijski račun*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1985.
- [7] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1989.