

Monty Hallov paradoks

Primož Moravec
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

6. september 2017

V šestdesetih letih prejšnjega stoletja je v Združenih Državah Amerike na televizijski mreži NBC potekal priljubljen televizijski šov „Sklenimo posel” (angl. *Let’s make a deal*), katerega voditelj je bil Monty Hall. Med drugim je med oddajo potekala igra, v kateri je imel tekmovalec pred seboj tri zaprte škatle, v eni od njih so bili ključi avtomobila, drugi dve pa sta bili prazni. Tekmovalec je izbral eno od škatel in če so bili v njej ključi, se je domov odpeljal z novim avtomobilom.

V eni od teh iger je med Montyjem in tekmovalcem potekal naslednji pogovor:

MONTY: Ena od škatel A, B, in C vsebuje ključe povsem novega športnega avtomobila, drugi dve sta prazni. Dajem vam edinstveno priložnost, da izberete eno od škatel in če so v njej ključi, je avto vaš!

TEKMOVALEC: Uh, to je res odlično! Izbiram škatlo B.

MONTY: Seveda je povsem mogoče, da so ključi v škatli B. Ampak premislite, možnost za to je $1 : 3$, medtem ko je možnost za to, da je vaša škatla prazna, enaka $2 : 3$. Dam vam 500 dolarjev, če mi vrnete škatlo.

Za trenutek ustavimo ta pogovor. To, o čemer Monty poskuša prepričati tekmovalca, v matematiki imenujemo *verjetnost dogodka*. Mislimo si, da ključe avtomobila naključno razporedimo v katerokoli od treh škatel. Nato

tekmovalec izbere eno od škatel, zanj pa je ugoden *dogodek*, da so ključi v tej škatli. Število možnih razporejanj ključev v škatle A, B in C je 3, za tekmovalca pa je ugodno le eno od teh. Razmerju $1/3$ pravimo *verjetnost*, da je tekmovalec izbral škatlo s ključi. Podobno je razmerje $2/3$ verjetnost, da je tekmovalec izbral prazno škatlo. Verjetnost torej meri, kakšna je možnost, da se neki dogodek zgodi, izračunamo pa jo tako, da število ugodnih možnosti za dani dogodek delimo s številom vseh možnosti, ki se lahko zgodijo v dani situaciji.

Tekmovalec se je torej znašel pred mamljivo ponudbo. Verjetnost, da dobi avto, je kar pol manjša od te, da ostane praznih rok. Zato se morda po načelu „bolje vrabec v roki kakor golob na strehi” splača vzeti ponujeni denar in oditi. Toda sledil je preobrat:

TEKMOVALEC: Ne, vztrajam pri svoji izbiri! Vzamem škatlo B.

MONTY: Ker mi je vseč vaša odločnost, vam bom naredil uslugo in bom odprl eno od preostalih škatel (odpre škatlo A). Kot vidite, je škatla A prazna! To pomeni, da so ključi bodisi v škatli B bodisi v škatli C. Ker v igri ostajata le še dve škatli, je verjetnost, da dobite avto, že $1/2$. Ponujam vam 1000 dolarjev, če odstopite od igre!

Montyjeva izjava je intuitivno jasna. Odprl je škatlo A, v njej ni bilo ključev, torej se igra v resnici začneja znova, tokrat z le dvema škatlama. V eni od teh škatel so ključi, druga je prazna. Verjetnost, da dobimo ključe, je torej narasla z $1/3$ na $1/2$... ali pač ne?

Tekmovalec, ki je nastopal v tej oddaji, je bil matematik. Odvrnil je:

TEKMOVALEC: Škatlo B zamenjam za škatlo C!

Montyja je ta zahteva presenetila. Imamo le še dve škatli, B in C. Verjetnost, da so ključi v B, je enaka $1/2$, prav tolikšna je verjetnost, da so ključi v škatli C... ali pač ne?

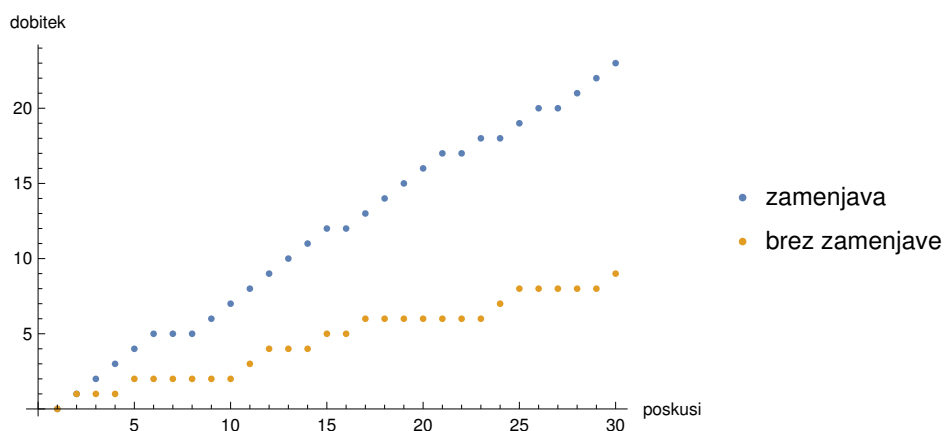
Izkaže se, da zgornje sklepanje ni pravilno, Montyjeva izračuna verjetnosti po tem, ko je odprl škatlo A, sta oba napačna. Poiščimo pravilno rešitev.

Najprej si oglejmo primer, ko Monty odpre škatlo A, ki je prazna, tekmovalec pa se odloči, da bo obdržal škatlo B. Na začetku je bila verjetnost, da so ključi v škatli B, enaka $1/3$. Ko je škatla A odprta, to ničesar ne spremeni, torej je verjetnost, da dobimo ključe, še vedno enaka $1/3$ in ne $1/2$, kot je trdil Monty. Kaj pa, če tekmovalec svojo škatlo zamenja s preostalo? Tu verjetnost izračunamo s pomočjo preštevanja vseh možnosti. Tekmovalec je izbral škatlo B, Monty odpre eno od praznih škatel in tekmovalec zamenja škatlo B za preostalo škatlo. Če so ključi v škatli B, tekmovalec izgubi v vsakem primeru. Če so ključi v škatli A, bo Monty odprl škatlo C, tekmovalec bo zamenjal svojo škatlo B s škatlo A in gotovo dobil ključe. Če so ključi v škatli C, bo Monty odprl škatlo A, tekmovalec bo zamenjal škatlo B s škatlo C in spet gotovo dobil ključe. V dani situaciji imamo torej tri možne izide, za tekmovalca pa sta ugodni dve izmed njiju, torej je verjetnost, da dobi avto, enaka $2/3$, kar je bistveno bolje kot na začetku. Do enakega rezultata bi prišli, če na začetku ne bi fiksirali, katero škatlo je tekmovalec odprl in bi spet prešteli vse možnosti.

Zgornji primer ima presenetljivo rešitev, ki je v nasprotju s sklepanjem po zdravi pameti. Pojavu v verjetnosti pravimo *Monty Hallov paradoks*. Problem je prvi opisal Selvin [1, 2].

V pravilnost našega sklepa se lahko prepričamo tudi s simulacijo z računalnikom. Večkrat ponovimo poskus, ko naključno izberemo škatlo, v kateri bodo ključi, naključno in neodvisno izberemo škatlo, za katero se odloči tekmovalec in naključno ter neodvisno izberemo še neodprto prazno škatlo, ki jo bo Monty odprl. Nato štejemo, ali je tekmovalec dobil ključe, enkrat ob predpostavki, da je zamenjal svojo škatlo, drugič pa ne. Seveda rezultati ne bodo vsakič enaki, tipična simulacija 30 poskusov pa da rezultat, kot je grafično prikazan na Sliki 1. Iz grafa je razvidno, da brez menjave v tridesetih poskusih ključ dobimo približno desetkrat, z menjavo škatle pa približno v dvakrat več primerih. To se sklada z našim izračunom.

Zgornji problem lahko posplošimo na n škatel, natanko ena od njih vsebuje avtomobilske ključe, Monty pa po tekmovalčevi izbiri škatle odpre m praznih škatel, pri čemer je $0 \leq m \leq n - 2$. Če tekmovalec ne zamenja škatle, je verjetnost dobitka enaka $1/n$. Če pa se odloči, da bo škatlo zamenjal



Slika 1: Število dobitkov v več poskusih Montyjeve igre.

z eno od preostalih zaprtih, je verjetnost dobitka enaka

$$p = \frac{n-1}{n(n-m-1)}.$$

Bralca vabimo, da preveri to formulo. Hitro vidimo, da če je $m = 0$, je ta verjetnost še vedno $1/n$, če pa Monty odpre vsaj eno škatlo, potem je verjetnost dobitka večja od $1/n$. V najboljšem primeru, ko Monty odpre $m = n - 2$ praznih škatel, je verjetnost dobitka enaka

$$p = \frac{n-1}{n}.$$

Ko je n velik, je vrednost p blizu 1, kar z drugimi besedami pomeni, da bomo v tem primeru z menjavo škatle „skoraj gotovo” priigrali avtomobil.

Literatura

- [1] S. Selvin, *A problem in probability (letter to the editor)*. American Statistician **29** (1975), no. 1, 67.
- [2] S. Selvin, *On the Monty Hall problem (letter to the editor)*, American Statistician **29** (1975), no. 3, 134.