Osnove upodobitev končnih grup

Primož Moravec

12. januar 2018

Primož Moravec
Osnove upodobitev končnih grup
[Elektronski vir] / Primož Moravec; - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2018
Način dostopa (URL):
https://www.fmf.uni-lj.si/~moravec/Papers/upodob_moravec.pdf

Kazalo

1 Osnovni pojmi **4**
- 1.1 Osnovne lastnosti upodobitev . . . 4
- 1.2 Polenostavne upodobitve in Wedderburnov izrek . . . 5

2 Karakterji **8**
- 2.1 Osnovni pojmi . . . 8
- 2.2 Tabela karakterjev . . . 10
- 2.3 Kvocientne grupe in karakterji . . . 15
- 2.4 Tabela karakterjev za S_4 . . . 17
- 2.5 Konstrukcije novih upodobitev iz starih . . . 18
- 2.6 Restrikcija in indukcija . . . 21
- 2.7 Tabela karakterjev diedrske grupe . . . 24
- 2.8 Osnovne uporabe tabel karakterjev . . . 25

3 Upodobitve in GAP **29**
- 3.1 Osnovne lastnosti . . . 29
- 3.2 Računanje s karakterji . . . 32
- 3.3 Restrikcija in indukcija . . . 34
- 3.4 Manjšanje norm razrednih funkcij . . . 35
- 3.5 Tabela karakterjev grupe S_6 . . . 36

Uvod

To so razširjeni zapiski predavanj iz teorije upodobitev končnih grup, ki predstavljajo del predmeta Grupe in polgrupe na drugostopenjskem študiju matematike na FMF UL. Ker se pri tem predmetu teorija upodobitev obravnava le del časa, je nujno, da se s čim manj sredstvi pride v kratkem času čim globlje v teorijo. Upodobitve grup so močno povezane s teorijo asociativnih algeber, za katero študenti, ki predmet poslušajo, običajno nimajo globokega predznanja. Bližnjica je, da se teorija upodobitev obravnava le nad obsegom kompleksnih števil in je za osnove teorije dovolj privzeti Wedderburnov izrek o strukturi grupne algebre končne grupe nad $\mathbb{C}$. Zahtevni bralec bo posegel po Brešarjevi knjigi [1] za osnove teorije asociativnih algeber. Velik del teorije, ki jo tukaj izpeljemo, deluje tudi, če obseg zamenjamo s komutativnim kolobarjem z enico, vendar bomo tu zaradi enostavnosti delali nad obsegi.

Zapiski so narejeni tako, da privzamejo nekaj predznanja iz teorije grup. Skoraj vse, kar je potrebno za razumevanje, je pokrito v gradivu [4]. Sicer za globlje razumevanje upodobitev priporočamo Isaacsovo knjigo [3], po kateri so ti zapiski v dobršni meri narejeni.

V zadnjem poglavju na primerih pokažemo, kako lahko upodobitve končnih grup študiramo s pomočjo programskega orodja GAP [2]. Pri tem se lahko bralec seznani z osnovnimi prijemi GAP-a v [4], še več izčrpnih informacij pa najde na GAP-ovi spletni strani [2], kjer je možno dobiti ta programski paket in obsežen priročnik za uporabo.

Poglavje 1

Osnovni pojmi

1.1 Osnovne lastnosti upodobitev

Upodobitev grupe G je homomorfizem $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, kjer je v $\mathrm{GL}(V)$ grupa vseh avtomorfizmov vektorskega prostora V nad obsegom $\mathbb{F}$. Ponavadi privzamemo, da je $\dim V = n$, t.j., da je V končnorazsežen vektorski prostor. V tem primeru grupo $\mathrm{GL}(V)$ označimo z $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Številu n pravimo *stopnja upodobitve* ρ. Če je $\ker \rho = 1$, potem je ρ *zvesta upodobitev*. V tem primeru lahko grupo G obravnavamo kot podgrupo grupe $\mathrm{GL}(V)$.

Primer **1.1.1.** *Naj bo G poljubna grupa in V poljuben vektorski prostor. Upodobitvi $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, dani s predpisom $\rho(g) = I$, pravimo trivialna upodobitev grupe G.*

Primer **1.1.2.** *Naj bo $\mathbb{F}$ poljuben obseg. Preslikava $\rho : S_n \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^\times$, definirana z $\rho(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, se imenuje signaturna upodobitev simetrične grupe S_n.*

Primer **1.1.3.** *Naj bo G ciklična grupa moči n, ki je generirana z elementom g. Potem imamo n možnih upodobitev $G \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, ki so porojene s predpisom $g \mapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, kjer je $0 \le k \le n-1$.*

Primer **1.1.4.** *Grupa S_3 je izomorfna grupi simetrij enakostraničnega trikotnika. Zato lahko najdemo dvorazsežno upodobitev $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ tako, da posameznim elementom grupe S_3 priredimo 2×2 matrike, ki predstavljajo te simetrije. Natančneje, postavimo enakostraničen trikotnik z oglišči 1, 2, 3 tako, da je njegovo težišče v izhodišču koordinatnega sistema O. Če sta e_1 in e_2 krajevna vektorja točk 1 in 2, potem vsaki od permutacij v S_3 priredimo matriko glede na bazo $\{e_1, e_2\}$, ki ustreza tej permutaciji. Tako dobimo*

$$(1\,2) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, (1\,2\,3) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

slike ostalih elementov pa dobimo z upoštevanjem dejstva, da je ρ homomorfizem in $S_3 = \langle (1\,2), (1\,2\,3) \rangle$.

Naj bo G grupa in V $\mathbb{F}G$-modul, pri čemer je $\mathbb{F}G$ grupna algebra grupe G nad obsegom $\mathbb{F}$. Tedaj je s predpisom $g \mapsto (v \mapsto g \cdot v)$ podana upodobitev $G \to \mathrm{GL}(V)$. Obratno, če je V vektorski prostor in $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ upodobitev grupe G, potem z delovanjem $g \cdot v := \rho(g)v$ vektorski prostor V postane $\mathbb{F}G$-modul. Če je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ upodobitev grupe G, potem lahko ρ po linearnosti razširimo do homomorfizma $\overline{\rho} : \mathbb{F}G \to \mathrm{End}(V)$.

Upodobitvi $\rho, \sigma : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ sta *podobni*, če obstaja taka obrnljiva matrika $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, da velja

$$\rho(a) = P^{-1}\sigma(a)P$$

za vse $a \in G$. Naj bosta $\rho : \mathbb{F}G \to \mathrm{End}(V)$ in $\sigma : \mathbb{F}G \to \mathrm{End}(W)$ reprezentaciji, $\tau : V \overset{\cong}{\to} W$ izomorfizem FG-modulov. Naj bo $\rho(a)v := v \cdot a$. Tedaj imamo naslednji komutativen diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(a)"] \arrow[d, "\tau"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ W \arrow[r, "\sigma(a)"] & W \end{tikzcd} \quad \text{, kjer} \quad \begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\tau"'] & v \cdot a \arrow[d, mapsto, "\tau"] \\ \tau(v) \arrow[r, mapsto] & \tau(v) \cdot a \end{tikzcd}$$

To pomeni, da je $\rho(a) = P^{-1}\sigma(a)P$, kjer je P matrika, ki pripada τ. S tem smo pokazali, da sta upodobitvi podobni natanko takrat, ko sta pripadajoča modula izomorfna. Velja torej:

Trditev 1.1.5. *Podobnostni razredi reprezentacij grupe G so v bijektivni korespondenci z $\mathbb{F}G$-moduli. Reprezentacije končno razšzežnih prostorov so v korepspondenci s končno generiranimi G-moduli.*

1.2 Polenostavne upodobitve in Wedderburnov izrek

Naj bo R kolobar z enico. Za R-modul V pravimo, da je *enostaven (nerazcepen)*, če nima pravih netrivialnih podmodulov. Poleg tega pravimo, da je V *polenostaven (povsem razcepen)*, če ga lahko zapišemo kot direktno vsoto enostavnih podmodulov.

Izrek 1.2.1 (Maschke)**.** *Naj bo $\mathbb{F}$ obseg karakteristike 0 ali pa je njegova karaktetistika tuja številu $|G|$. Tedaj za vsak G-podmodul U G-modula V obstaja tak G-podmodul W G-modula V, da je $V = U \oplus W$.*

Dokaz: Naj bo W_0 tak podprostor, da je $V = U \oplus W_0$. Naj bo Φ projekcija na U glede na podprostor W_0. Definirajmo

$$\Theta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi(vg)g^{-1}.$$

Zgornji izraz seveda obstaja, saj je število $|G|$ tuje karakteristiki obsega $\mathbb{F}$. Tedaj je

$$\Theta(vh) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi(vhg)g^{-1} = \sum_{g'\in G}\Phi(vg')g'^{-1}h = \Theta(v)h,$$

torej je Θ G-modulski homomorfizem. Če je $v \in U$, potem je

$$\Theta(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi(vg)g^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(vg)\cdot g^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|G|v = v.$$

Velja torej $\Theta|_U = \mathrm{Id}$. Postavimo $W = \ker\Theta$. Očitno je W G-podmodul v V. Ker za vsak $v \in V$ velja $\Theta v = \Theta^2 v$, sledi $v = \Theta(v) + (v - \Theta(v)) \in U + W$, torej je $V = U + W$. Če je $v \in U \cap W$, potem je $v = \Theta v = 0$. Od tu sledi direktnost vsote. ∎

Posledica 1.2.2. *Vsak G-modul nad obsegom, ki ima karakteristiko tujo z močjo grupe G, je polenostaven oziroma povsem razcepen.*

Od tu dalje se bomo skoraj izključno omejili na primer $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Razlog tiči v naslednji različici Wedderburnovega izreka:

Izrek 1.2.3 (Wedderburn)**.** *Naj bo G končna grupa. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

1. *Obstajajo taka pozitivna števila $r, f_1, \ldots, f_r$, da je $\mathbb{C}G$ kot $\mathbb{C}$-algebra izomorfna $M_{f_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{f_r}(\mathbb{C})$.*

2. *Obstaja natanko r različnih izomorfnih razredov nerazcepnih $\mathbb{C}G$-modulov.*

3. *Če so $M_1, \ldots, M_r$ predstavniki izomorfnih razredov iz točke (b), tedaj je $\mathbb{C}G$ kot G-modul izomorfen*
$$f_1M_1 \oplus \cdots \oplus f_rM_r,$$
kjer je $mM = \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{m}$.

4. *Za vsak $\mathbb{C}G$-modul obstajajo nenegativna cela števila $a_1, \ldots, a_r$, da je ta modul izomorfen $a_1M_1 \oplus \cdots \oplus a_rM_r$.*

5. *$M_iM_j = 0$ za vsaka $i \neq j$.*

Dokaz bomo izpustili, bralec ga lahko najde v Brešarjevi knjigi [1, Corollary 2.67]. Oglejmo si nekaj posledic:

Posledica 1.2.4. *Naj bodo $r, f_1, \ldots, f_r$ kot v Wedderburnovem izreku. Tedaj velja $\sum_{i=1}^r f_i^2 = |G|$.*

Dokaz: Grupno algebro $\mathbb{C}G$ lahko obravnavamo kot vektorski prostor z bazo $\{g \in G\}$. Torej je $\dim \mathbb{C}G = |G|$. Po drugi strani je

$$\dim \mathbb{C}G = \sum_{i=1}^{r}\dim M_{f_i}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2.$$

∎

Posledica 1.2.5. *Število razredov za konjugiranje grupe G je enako $r = \dim Z(\mathbb{C}G)$.*

Dokaz: Očitno je

$$Z(\mathbb{C}G) = Z(M_{f_1}(\mathbb{C})) \oplus \cdots \oplus Z(M_{f_r}(\mathbb{C})) = \mathbb{C}^r.$$

Naj bo $z = \sum n_g g \in Z(\mathbb{C}G)$. Tedaj je

$$z = hzh^{-1} = \sum_{g \in G} n_g hgh^{-1} = \sum_{x \in G} n_{h^{-1}xh} x = \sum_{g \in G} n_{h^{-1}gh} g$$

natanko takrat, ko je $n_g = n_{h^{-1}gh}$ za vse $g, h \in G$. Preslikava $g \mapsto n_g$ je konstantna funkcija na vsakem razredu za konjugiranje. Ta funkcija se imenuje *razredna funkcija*. Torej je

$$Z(\mathbb{C}G) = \{\sum n_g g : \ g \mapsto n_g \text{ je razredna funkcija}\}.$$

Od tod trditev hitro sledi. ■

Primer **1.2.6.** *Za grupo S_3 imamo trivialno upodobitev, signaturno upodobitev, poleg tega pa smo našli upodobitev stopnje 2, ki izhaja iz simetrij enakostraničnega trikotnika. Prvi dve upodobitvi sta očitno nerazcepni, ker sta stopnje 1, prav lahko pa je videti, da je tudi dvorazsežna upodobitev nerazcepna, saj noben enorazsežen podprostor v $\mathbb{C}^2$ ni invarianten za delovanje grupe S_3. Ker je $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$, smo s tem našli vse nerazcepne upodobitve grupe S_3.*

Poglavje 2

Karakterji

2.1 Osnovni pojmi

Naj bo $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ upodobitev končne grupe G. *Karakter upodobitve* ρ je preslikava $\chi : G \to \mathbb{F}$, dana s predpisom

$$\chi(g) = \mathrm{tr}\rho(g).$$

Očitno velja $\chi(1) = n = \deg \rho$. Karakterjem stopnje 1 pravimo *linearni karakterji.* Karakter $1_G : G \to \mathbb{F}$, definiran s predpisom $1_G(g) = 1$, je *glavni karakter.*

Lema 2.1.1. *Podobne upodobitve grupe G imajo enake karakterje. Karakterji so razredne funkcije.*

Dokaz: To sledi iz

$$\mathrm{tr}(P^{-1}\sigma(g)P) = \mathrm{tr}(\sigma(g))$$

za vsak $g \in G$. ∎

Če sta ρ in σ upodobitvi grupe G, potem je tudi

$$\rho \oplus \sigma)(g) = \begin{bmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \sigma(g) \end{bmatrix}$$

upodobitev grupe G. Ker je

$$\mathrm{tr}(\rho \oplus \sigma)(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) + \mathrm{tr}(\sigma(g)),$$

sledi, da je vsota karakterjev zopet karakter, ki pripada direktni vsoti upodobitev.

Od sedaj predpostavimo, da je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Naj bo G končna grupa. Zanjo izberimo reprezentativno množico nerazcepnih $\mathbb{C}G$-modulov

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}G) = \{M_1, \ldots, M_r\}.$$

Naj bodo $\rho_1, \ldots, \rho_r$ pripadajoče upodobitve grupe G in naj bodo $\chi_1, \ldots, \chi_r$ pripadajoči karakterji. Karakterje, ki pripadajo nerazcepnim $\mathbb{C}G$-modulom, imenujemo *nerazcepni karakterji.* Množico vseh nerazcepnih karakterjev grupe G označimo z

$$\mathrm{Irr}(G) := \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}.$$

Trditev 2.1.2. *Nerazcepni karakterji grupe G so $\mathbb{C}$-linearno neodvisni elementi vektorskega prostora $\mathbb{C}^G = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ in tvorijo bazo kompleksnega podprostora vseh razrednih funkcij v $\mathbb{C}^G$. Velja še več, funkcija*

$$\varphi := \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$$

je karakter natanko takrat, ko je $\varphi \neq 0$ in so a_χ nenegativna cela števila.

Dokaz: Očitno razredne funkcije tvorijo $\mathbb{C}$-vektorski podprostor $\mathcal{C}$ v $\mathbb{C}^G$. Po Wedderburnovem izreku je

$$\mathbb{C}G = f_1 M_1 \oplus \cdots \oplus f_r M_r$$

za neka naravna števila $r, f_1, \ldots, f_r$. Naj bo $1 = \sum_{i=1}^r e_i$ za $e_i \in f_i M_i$. Tak razcep zaradi dekompozicije modula $\mathbb{C}G$ obstaja. Naj bo $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(M_i)$ nerazcepna upodobitev, ki pripada karakterju χ_i. Po linearnosti lahko ρ_i razširimo do homomorfizma algeber $\rho_i : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(M_i)$. Če je $i \neq j$, potem je $e_j M_i = 0$. Odtod sledi $\rho_i(e_j) = 0$. Potem imamo

$$\rho_i(e_i) = \rho_i(\sum_j e_i) = \rho_i(1).$$

Potem imamo

$$\chi_i(e_j) = \mathrm{tr}(\rho_i(e_j)) = \mathrm{tr}(0) = 0$$

in na podoben način lahko vidimo, da je $\chi_i(e_i) = \chi_i(1) \neq 0$. Funkcije χ_i so torej paroma različne. Predpostavimo, da je $\sum_i a_i \chi_i = 0$ za neka kompleksna števila a_i. Ker za $j \neq i$ velja $\chi_j(e_i) = 0$, je $a_i \chi_i(e_i) = 0$ oziroma $a_i = 0$. Odtod dobimo $\mathbb{C}$-linearno neodvisnost funkcij χ_i. Vemo že, da je $\dim \mathcal{C} = r$. Ker so karakterji $\chi_1, \ldots, \chi_r$ linearno neodvisni, množica karakterjev $\mathrm{Irr}(G)$ tvori bazo za $\mathcal{C}$.

Naj bo

$$\varphi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi.$$

Če je φ karakter, tedaj je $\varphi \neq 0$. Naj bo M modul, ki pripada tej upodobitvi. Po Wedderburnovemu izreku obstajajo nenegativna cela števila a_i, da je

$$M \cong a_1 M_1 \oplus \cdots \oplus a_r M_r.$$

Sledi

$$\varphi = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i.$$

Zaradi linearne neodvisnosti karakterjev χ_i velja $a_{\chi_i} = a_i \geq 0$. Obratno, če so a_χ nenegativna cela števila in $\varphi \neq 0$, je φ očitno karakter, ki pripada ustrezni direktni vsoti nerazcepnih upodobitev. ∎

Če je $\chi = \sum_{i=1}^r n_i \chi_i$ karakter, tedaj se tisti nerazcepni karakterji χ_i, pri katerih je $n_i > 0$, imenujejo *nerazcepni sestavni deli* karakterja χ. Če je ψ tak karakter, da je $\chi - \psi$ bodisi nič bodisi karakter, potem ψ imenujemo *sestavni del* karakterja χ.

Posledica 2.1.3. *Število* $|\mathrm{Irr}(G)|$ *je enako število konjugiranih razredov grupe* G. *Velja*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Dokaz: Vemo, da je

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} f_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2,$$

kar dokaže rezultat. ∎

Posledica 2.1.4. *Naj bosta* ρ *in* σ *dve kompleksni upodobitvi grupe* G. *Tedaj sta* ρ *in* σ *podobni natanko takrat, ko imata isti karakter.*

Dokaz: Ker vemo, da imata podobni upodobitvi iste karakterje, zadošča posledico dokazati v drugo smer. Naj bosta V in W G-modula, ki zaporedoma pripadata upodobitvama ρ in σ. Tedaj je

$$V \cong a_1 M_1 \oplus \cdots \oplus a_r M_r$$

in

$$W \cong b_1 M_1 \oplus \cdots \oplus b_r M_r$$

za neka nenegativna števila a_i in b_j. Tedaj upodobitvi ρ pripada karakter $\sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i$, upodobitvi σ pa karakter $\sum_{i=1}^{r} b_i \chi_i$. Če sta ta karakterja enaka, potem je $a_i = b_i$ in zato $V \cong W$. ∎

Posledica 2.1.5. *Grupa* G *je abelova natanko takrat, ko je vsak nerazcepen karakter linearen.*

Dokaz: Grupa G je abelova natanko takrat, ko vsak razred za konjugiranje vsebuje natanko en element. To pomeni, da je $|G| = r$. Torej je G abelova natanko takrat, ko je $|G| = r$. Po predprejšnji posledici velja

$$|G| = r = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2.$$

Ker je $|\mathrm{Irr}(G)| = r$, je $\chi_i(1) = 1$ za vse $i = 1, \ldots r$. To pa je ekvivalentno temu, da je vsak nerazcepen karakter linearen. ∎

2.2 Tabela karakterjev

Za grupo G nerazcepne karakterje ponavadi predstavimo s tabelo karakterjev. To je tabela kompleksnih števil, katere vrstice pripadajo nerazcepnim karakterjem $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$, stolpci pa ustrezajo konjugiranim razredom $\mathcal{K}_j$. Število na (i, j)-tem mestu tabele je vrednost karakterja χ_i na konjugiranem razredu $\mathcal{K}_j$. Izberemo predstavnike

g_j konjugiranih razredov $\mathcal{K}_j$. Ugodno je beležiti tudi moči množic $C_G(g_i)$ in $|\mathcal{K}_j| = |G : \mathcal{C}_G(g_j)|$. Naslednja slika predstavlja tabelo karakterjev.

$$\begin{array}{c|cccccc} g_i & 1 & g_1 & g_2 & \cdots & g_r \\ \hline |C_G(g_i)| & * & * & * & \cdots & * \\ |\mathcal{K}_i| & * & * & * & \cdots & * \\ \hline \chi_1 & * & * & * & \cdots & * \\ \chi_2 & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_r & * & * & * & \cdots & * \end{array}.$$

Primer **2.2.1.** *Za grupo S_3 smo že določili vse nerazcepne upodobitve. Imamo trivialno upodobitev ρ_1, signaturno upodobitev ρ_2 in nerazcepno dvorazsežno upodobitev ρ_3. Ustrezne karakterje označimo s χ_1, χ_2, χ_3. V S_3 imamo tri konjugirane razrede $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ s predstavniki 1, $(1\,2)$ in $(1\,2\,3)$. Velja $|\mathcal{K}_1| = 1$, $|\mathcal{K}_2| = 3$ in $|\mathcal{K}_3| = 2$. Očitno je $\chi_1(\sigma) = 1$ in $\chi_2(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$, poleg tega pa je $\chi_3(1) = \mathrm{tr}\, I = 2$, $\chi_3((1\,2)) = \mathrm{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ in $\chi_3((1\,2\,3)) = \mathrm{tr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$. Dobimo torej*

$$\begin{array}{c|ccc} g_i & 1 & (1\,2) & (1\,2\,3) \\ \hline |C_G(g_i)| & 6 & 2 & 3 \\ |\mathcal{K}_i| & 1 & 3 & 2 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 \end{array}.$$

Ključ do računanja tabele karakterjev je izpeljava ortogonalnih relacij med nerazcepnimi karakterji. Pri tem si bomo pomagali s posebno upodobitvijo grupe G, t.i. *regularno upodobitvijo.* Naj bo $\mathbb{C}G$ G-modul, kjer G deluje z leve z množenjem. Upodobitev $\rho : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(\mathbb{C}G)$, ki pripada temu modulu, je definirana z

$$\rho(g)(x) = gx$$

in ji pravimo *regularna upodobitev* grupe G. Če izberemo elemente grupe G v nekem vrstnem redu za bazo tega modula, ta preslikava permutira bazo. Njena matrika, t.j., matrika, ki pripada tej preslikavi v tej bazi, je permutacijska matrika. Karakter χ, ki ga dobimo na ta način, imenujemo *regularen karakter* grupe G. Očitno je

$$\chi(g) = \mathrm{tr}\rho(g) = |\{x \in G : \; gx = x\}| = \begin{cases} |G| & : \; g = 1 \\ 0 & : \; \text{sicer} \end{cases}$$

Po Wedderburnovemu izreku lahko pišemo $\mathbb{C}G = f_1 M_1 \oplus \cdots \oplus f_r M_r$, kjer so $M_1, \ldots, M_r$ enostavni G-moduli. Regularen karakter χ lahko v tem primeru zapišemo kot $\chi = \sum_{i=1}^r f_i \chi_i$, pri čemer so χ_i ustrezni nerazcepni karakterji. Ker je $f_i = \chi_i(1)$, dobimo

$$\chi = \sum_{i=1}^r \chi_i(1)\chi_i.$$

Naj bo $1 = \sum_{i=1}^{r} e_i$, kjer so $e_i \in f_i M_i$. Za $i \neq j$ imamo $e_i e_j = 0$. Če množimo enakost $1 = \sum_{i=1}^{r} e_i$ z elementom e_i, dobimo $e_i^2 = e_i$. Torej je $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$.

Lema 2.2.2. *Velja*

$$e_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1) \chi_i(g^{-1}) g.$$

Dokaz: Pišimo $e_i = \sum_{g \in G} a_g \cdot g$ in naj bo χ regularen karakter. Tedaj je

$$e_i g^{-1} = a_g + \sum_{x \in G \setminus \{g\}} a_x x g^{-1}.$$

Regularen karakter $\chi : G \to \mathbb{C}$ razširimo do preslikave na $\mathbb{C}G$. Dobimo

$$\chi(e_i g^{-1}) = a_g |G|.$$

Zapišimo χ kot $\mathbb{C}$-linearno kombinacijo nerazcepnih karakterjev:

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1) \chi_i.$$

Od tod sledi

$$a_g |G| = \sum_{j=1}^{r} \chi_j(1) \chi_j(e g^{-1}).$$

Naj bodo ρ_i nerazcepne upodobitve, ki pripadajo karakterjem χ_i. Tedaj velja

$$\rho_j(e_i g^{-1}) = \rho_j(e_i) \rho_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \rho_j(g^{-1}).$$

Potem imamo

$$\begin{aligned} \chi_j(e_i g^{-1}) &= \mathrm{tr} \rho_j(e_i g^{-1}) = \mathrm{tr}(\delta_{ij} \rho_j(g^{-1})) = \\ &= \delta_{ij} \mathrm{tr} \rho_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \chi_j(g^{-1}). \end{aligned}$$

S tem je rezultat dokazan. ■

Izrek 2.2.3 (Posplošena ortogonalna relacija)**.** *Za vsak $h \in G$ velja*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(gh) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)}.$$

Dokaz: Naj bodo e_i kot zgoraj. Iz $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ s pomočjo Leme 2.2.2 dobimo

$$\frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \chi_i(1) \chi_j(1) \chi_i(g^{-1}) \chi_j(h^{-1}) gh = \frac{\delta_{ij}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1) \chi_i(g^{-1}) g.$$

S krajšanjem členov $\frac{1}{|G|}$ in $\chi_i(1)$ dobimo enakost

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G} \chi_j(1) \chi_i(g^{-1}) \chi_j(h^{-1}) gh = \frac{\delta_{ij}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g.$$

Fiksirajmo $x \in G$ in primerjajmo koeficienta pri x na levi in desni strani. Dobimo

$$\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \chi_j(1)\chi_i(y^{-1})\chi_j(x^{-1}y) = \delta_{ij}\chi_i(x^{-1}).$$

S primerno zamenjavo simbolov dobimo formulo iz izreka. ∎

Posledica 2.2.4 (Prva ortogonalna relacija)**.** *Velja*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}.$$

Dokaz: Vstavimo $h = 1$ v posplošeno ortogonalno relacijo. ∎

Lema 2.2.5. *Naj bo ρ upodobitev grupe G in naj bo χ karakter, ki pripada ρ. Naj bo $g \in G$ element reda n grupe G. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

1. *Matrika $\rho(g)$ je podobna diagonalni matriki* $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$.
2. $\epsilon_i^n = 1$.
3. $\chi(g) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k$ *in velja* $|\chi(g)| \leq \chi(1)$.
4. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Dokaz:

1. Ker je $g^n = 1$, je $1 = \rho(1) = \rho(g^n) = \rho(g)^n$. Minimalni polinom $m_{\rho(g)}$ matrike $\rho(g)$ očitno deli polinom $\lambda^n - 1$ in zato ima $m_{\rho(g)}$ same enostavne ničle. Torej se matrika $\rho(g)$ da diagonalizirati.
2. Če so števila ϵ_i njene lastne vrednosti, potem velja $\epsilon_i^n = 1$.
3. Iz (2) sledi $|\epsilon_i| = 1$ in velja
$$|\chi(g)| = \left|\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i\right| \leq f = \chi(1).$$
4. Če matriki $\rho(g)$ pripada diagonalna matrika $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$, potem matriki $\rho(g^{-1})$ pripada matrika $\mathrm{diag}(\epsilon_1^{-1}, \ldots, \epsilon_k^{-1})$. Tedaj je $\epsilon_i^{-1} = \overline{\epsilon_i}$, saj velja $|\epsilon_i| = 1$.

S tem je dokaz končan. ∎

Naj bosta φ in ϑ razredni funkciji na grupi G. Definirajmo

$$[\varphi, \vartheta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\vartheta(g)}.$$

Očitno ta predpis definira skalarni produkt na vektorskem prostoru vseh razrednih funkcij. Množica nerazcepnih karakterjev $\mathrm{Irr}(G)$ tvori bazo tega vektorskega prostora. Po prvi ortogonalni relaciji 2.2.4 velja

$$[\chi_i, \chi_j] = \delta_{ij},$$

kar pomeni, da je $\mathrm{Irr}(G)$ ortonormirana baza. V posebnem, če je χ poljuben karakter, potem imamo

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} [\chi, \chi_i]\chi_i,$$

kar ni nič drugega kot razvoj vektorja χ po ortonormirani bazi $\mathrm{Irr}(G)$ prostora vseh razrednih funkcij.

Posledica 2.2.6. *Naj bosta χ in ψ poljubna karakterja. Tedaj je $[\chi, \psi] = [\psi, \chi]$ nenegativno število. Karakter χ je nerazcepen natanko takrat, ko je $[\chi, \chi] = 1$.*

Dokaz: Naj bo

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i\chi_i \qquad \text{in} \qquad \psi = \sum_{i=1}^{r} m_i\chi_i.$$

Po trditvi 2.1.2 velja

$$[\chi, \psi] = \sum_{i=1}^{r} n_i m_i = [\psi, \chi]$$

in

$$[\chi, \chi] = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

Od tod hitro sledi še drugi del trditve. ∎

Izrek 2.2.7 (Druga ortogonalna relacija)**.** *Naj bosta $g, h \in G$. Če element h ni konjugiran elementu g, potem je*

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = 0.$$

Če pa sta elementa g, h konjugirana, potem je zgornja vsota enaka $|C_G(g)|$.

Dokaz: Konjugiranih razredov v grupi G je natanko r. Naj bodo $g_1, \ldots, g_r$ predstavniki konjugiranih razredov $K_1, \ldots, K_r$ grupe G. Naj bo $X = [\chi_i(g_j)]_{i,j=1}^{r}$ in D diagonalna matrika z diagonalo $|K_1|, \ldots, |K_r|$. Prvo ortogonalno relacijo lahko zapišemo kot

$$|G|\delta_{ij} = \sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \sum_{k=1}^{r} |K_k|\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}.$$

Od tod sledi $XD\overline{X}^T = |G|I$. Ker je levi kvadratne matrike tudi njen desni inverz, dobimo

$$|G|I = D\overline{X}^T X.$$

S primerjavo elementov in uporabo $|K_i| = |G : C_G(g_i)|$ dobimo iskani rezultat. ∎

Primer **2.2.8.** *Naj bo $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. Ker je grupa G abelova, so konjugirani razredi singletoni. Po posledici 2.1.5 so nerazcepni karakterji linearni. Naj bo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ nerazcepna upodobitev grupe G. Vektorski prostor V je enodimenzionalen, torej je delovanje podano s predpisom $gv = \lambda v$, kjer je $\lambda^n = 1$. Naj bo ϵ primitiven n-ti koren enote in definirajmo upodobitve ρ_i za $i = 0, \dots, n-1$, podane s predpisi $gv = \epsilon^i v$. Tedaj je $\chi_i(g^j) = \epsilon^{ij}$. Po posledici 2.2.6 lahko preverimo, da so karakterji χ_i nerazcepni. Tako dobimo naslednjo tabelo nerazcepnih karakterjev:*

g_i	1	g	g^2	$\cdots$	g^{n-1}
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	n	n	n	$\cdots$	n
$\lvert \mathcal{K}_i \rvert$	1	1	1	$\cdots$	1
χ_1	1	1	1	$\cdots$	1
χ_2	1	ϵ	ϵ^2	$\cdots$	ϵ^{n-1}
χ_3	1	ϵ^2	ϵ^4	$\cdots$	ϵ^{n-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_n	1	ϵ^{n-1}	ϵ^{n-2}	$\cdots$	ϵ

.

2.3 Kvocientne grupe in karakterji

Lema 2.3.1. *Naj bo ρ upodobitev grupe G in naj bo χ karakter, porojen z ρ. Tedaj je $g \in \ker \rho$ natanko takrat, ko velja $\chi(g) = \chi(1)$.*

Dokaz: Naj bo $g \in \ker \rho$. Tedaj je $\rho(g) = I = \rho(1)$. Od tod sledi

$$\chi(g) = \mathrm{tr}\rho(g) = \mathrm{tr}\rho(1) = \chi(1).$$

Pokažimo še obratno. Naj bo $\chi(g) = \chi(1)$. Vemo, da je $\chi(1) = f$ in velja $\chi(g) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_f$, kjer je $|\epsilon_i| = 1$ po lemi 2.2.5. Tedaj je $\epsilon_i = 1$ za vse i. Torej je $\rho(g)$ podobna matrki $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_f) = I$ oziroma $g \in \ker \rho$. ■

Naj bo χ karakter grupe G. Definirajmo *jedro karakterja* χ z

$$\ker \chi = \{g \in G : \ \chi(g) = \chi(1)\}.$$

Lema 2.3.2. *Naj bo χ karakter grupe G in naj bo*

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i$$

dekompozicija na nerazcepne karakterje. Tedaj je

$$\ker \chi = \bigcap_{n_i > 0} \ker \chi_i$$

in

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker \chi_i = 1.$$

Dokaz: Po lemi 2.2.5 je $|\chi_i(g)| \leq \chi_i(1)$. Če je $\chi(g) = \chi(1)$, potem je $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, če je le $n_i \neq 0$. Torej je

$$\ker \chi \subseteq \bigcap_{n_i > 0} \ker \chi_i.$$

Obratna inkluzija je trivialna.

Naj bo χ regularen karakter in

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)\chi_i$$

njegova dekompozicija na nerazcepne karakterje. Torej velja

$$\chi(g) = \begin{cases} |G| & : \quad g = 1 \\ 0 & : \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Potem je $\ker \chi = 1$ in z uporabo prvega dela leme dokažemo iskano trditev. ∎

Lema 2.3.3. *Naj bo N podgrupa edinka grupe G. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

1. *Če je χ karakter grupe G in $N \leq \ker \chi$, potem je χ konstanten na odsekih grupe N v G. Funkcija $\widehat{\chi} : G/N \to \mathbb{C}$, definirana s predpisom $\widehat{\chi}(Ng) = \chi(g)$, je karakter grupe G/N.*

2. *Če je $\widehat{\chi}$ karakter na G/N, potem je $\chi(g) := \widehat{\chi}(Ng)$ karakter grupe G.*

3. *V obeh primerih je $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ natanko takrat, ko je $\widehat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G)$.*

Dokaz: Dokaz leme sledi iz dejstva, da obstaja enolična korespondenca med upodobitvami grupe G/N in upodobitvami grupe G, katerih jedra vsebujejo podgrupo edinko N. ∎

Pogosto identificiramo χ z $\widehat{\chi}$. Glede na to identifikacijo je

$$\mathrm{Irr}(G/N) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : N \leq \ker \chi\}.$$

Primer **2.3.4.** *Še enkrat določimo tabelo karakterjev za $G = S_3$. Grupa S_3/A_3 je ciklična moči 2 in je generirana z $(1\,2)A_3$. Tabela karakterjev za S_3 je torej oblike*

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	6	2	3
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	$*$
χ_3	$*$	$*$	$*$

Po posledici 2.1.3 velja

$$\chi_1(1)^2 + \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2 = |S_3| = 6.$$

Ker je $\chi_3(1) > 0$, *dobimo* $\chi_3(1) = 2$. *Po drugi ortogonalni relaciji dobimo*

$$\sum_{i=1}^{3} \chi_i(1)\overline{\chi_i((1\,2))} = 0.$$

Torej je $\chi_3((1\,2)) = 0$. *Na podoben način iz*

$$\sum_{i=1}^{3} \chi_i((12))\overline{\chi_i((1\,2\,3))} = 0$$

sledi $\chi_2((1\,2\,3)) = 1$. *Potem iz*

$$\sum_{i=1}^{3} \chi_i(1)\overline{\chi_i((1\,2\,3))} = 0$$

sledi $\chi_3((1\,2\,3)) = -1$. *Tabela karakterjev za* S_3 *je enaka*

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	6	2	3
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

.

2.4 Tabela karakterjev za S_4

Izračunajmo tabelo karakterjev grupe $G = S_4$. V tej grupi imamo 5 konjugiranih razredov v G, katerih predstavniki so 1, $(1\,2)$, $(1\,2\,3)$, $(1\,2)(3\,4)$ in $(1\,2\,3\,4)$. Če označimo

$$K = \langle (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4)\rangle,$$

je K Kleinova četverka in $S_4/K \cong S_3$. Tabela karakterjev grupe S_4 je zato oblike

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	6	8	3	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	$*$	$*$
χ_3	2	0	-1	$*$	$*$
χ_4	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
χ_5	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

.

Ker je $K \le \ker \chi_2$, je $\chi_2((1\,2)(3\,4)) = \chi_2(1) = 1$. Ortogonalnost vrstic da $\chi_2((1\,2\,3\,4)) = -1$. Torej je

$$\chi_2 \quad : \quad 1\ -1\ 1\ 1\ -1.$$

Na podoben način vidimo, da velja

$$\chi_3 \quad : \quad 2\,0\,-1\,2\,0.$$

Grupa G deluje na množici $X = \{1, 2, 3, 4\}$. To delovanje lahko linearno razširimo do delovanja grupe G na kompleksnem vektorskem prostoru z bazo X. Naj bo χ karakter tega delovanja. Očitno je $\chi(g)$ enak številu fiksnih točk od g. Torej

$$\chi \quad : \quad 4\,2\,1\,0\,0.$$

Lahko pišemo

$$\chi = \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(G)} [\chi, \psi]\psi.$$

Tedaj je

$$[\chi, \chi_1] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X : \; gx = x\}| =$$

$$= \frac{1}{|G|} |\{(g, x) \in G \times X : \; gx = x\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\{g \in G : \; gx = x\}|.$$

Za vsak $x \in X$ imamo 6 elementov grupe G, ki fiksirajo x. Torej je $[\chi, \chi_1] = 1$. Zato obstaja karakter ψ, da je $\chi = \chi_1 + \psi$. Torej je

$$\chi_4 = \chi - \chi_1 \quad : \quad 3\,1\,0\,-1\,-1$$

karakter. Imamo $[\chi_4, \chi_4] = 1$ in zato je χ_4 nerazcepen. Končno definirajmo $\chi_5 = \chi_4\chi_2$. Tedaj je χ_5 karakter (glej naslednji razdelek) in velja $[\chi_5, \chi_5] = 1$. Torej je tudi χ_5 nerazcepen karakter. Tabela karakterjev grupe $G = S_4$ je zato enaka

g_i	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	6	8	3	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

.

2.5 Konstrukcije novih upodobitev iz starih

Naj bosta U in V G-modula. Tedaj lahko na $U \otimes_{\mathbb{F}} V$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ in $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, F)$ definiramo G-modulsko strukturo na naslednji način:

$$g(u \otimes v) := (gu) \otimes (gv),$$
$$(g\Phi)(u) = g\Phi(g^{-1}u).$$

Dobili smo torej nove upodobitve grupe G. Oglejmo si, kako določimo njihove karakterje. Najprej dokažimo pomožen rezultat:

Lema 2.5.1. *Naj bosta U in V G-modula. Preslikava $\Gamma : \Phi \otimes v \mapsto (u \mapsto \Phi(u)v)$ je G-modulski izomorfizem med moduloma $U^* \otimes_{\mathbb{F}} V$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$.*

Dokaz: Definirajmo preslikavo $\overline{\Gamma} : U^* \times V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ s predpisom

$$(\Phi, v) \mapsto (u \mapsto \in \Phi(u)v).$$

Ta preslikava je očitno bilinearna, zato inducira $\mathbb{F}$-modulski homomorfizem $\Gamma : U^* \otimes_{\mathbb{F}} V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$. Preslikava Γ je tudi G-modulski homomorfizem. Pokažimo, da je Γ injektivna. Naj bo $\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \otimes v_i\right) = 0$. Tedaj je

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u) v_i = 0$$

za vsak $u \in U$. Če so vektorji $v_1, \ldots, v_n$ linearno neodvisni, potem je $\Phi_i(u) = 0$ za vse $i = 1, \ldots, n$. Torej je $\Phi_1 = \ldots = \Phi_n = 0$, saj zgornja enakost velja za vsak $u \in U$. Iz

$$\dim U^* \otimes_{\mathbb{F}} V = \dim U \cdot \dim V = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$

sedaj sledi, da je Γ tudi surjektivna preslikava. ∎

Izrek 2.5.2. *Naj bosta U in V G-modula. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

1. $\chi_{U \otimes V} = \chi_U \cdot \chi_V$.
2. $\chi_{U^*} = \overline{\chi_U}$.
3. $\chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)} = \overline{\chi_U} \chi_V$.

Dokaz:

1. Naj bosta $\rho : G \to \mathrm{GL}(U)$ in $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ pripadajoči upodobitvi in $g \in G$. Tedaj je $U \otimes V$ G-modul preko delovanja $g(u \otimes v) = gu \otimes gv$, upodobitev grupe G glede na $U \otimes V$ pa je podana z

   $$(\rho \otimes \sigma)(g)(u \otimes v) = (\rho(g)u) \otimes (\sigma(g)(v)).$$

   Obstajata taki bazi $\{u_1, \ldots, u_m\}$ za U in $\{v_1, \ldots, v_n\}$ za V, da je

   $$\rho(g)u_i = \lambda_i u_i \qquad \text{in} \qquad \sigma(g)v_j = \mu_j v_j.$$

   Množica $\{u_i \otimes v_j : \ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ je baza prostora $U \otimes V$, zanjo pa velja

   $$(\rho \otimes \sigma)(g)(u_i \otimes v_j) = (\rho(g)u_i) \otimes (\sigma(g)(v_j)) = \lambda_i \mu_j (u_i \otimes v_j).$$

   Od tod sledi

   $$\mathrm{tr}(\rho \otimes \sigma)(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \mathrm{tr}\rho(g) \cdot \mathrm{tr}\sigma(g),$$

   torej $\chi_{\rho \otimes \sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma$.

2. Naj bo $\rho : G \to \mathrm{GL}(U)$ pripadajoča upodobitev. Tedaj obstaja baza $\{u_1, \ldots, u_m\}$ prostora U, da je
$$\rho(g)u_i = \lambda_i u_i.$$
Naj bo $\{f_1, \ldots, f_j\}$ dualna baza k tej bazi prostora U. Modulska struktura na U^* je dana z
$$(gf_j)(x) := f_j(g^{-1}x).$$
Naj bo $x = u_i$. Imamo
$$(gf_j)(u_i) = \lambda_i^{-1}\delta_{ij} = \overline{\lambda_i}\delta_{ij}.$$
Naj bo ρ^* upodobitev grupe G, ki pripada U^*. Tedaj je
$$\mathrm{tr}\rho^*(g) = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{\mathrm{tr}\rho(g)}.$$

3. Po Lemi 2.5.1 sta prostora $U^* \otimes V$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ izomorfna. Po točki (1) in (2) sledi
$$\chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)} = \chi_{U^* \otimes V} = \chi_{U^*} \cdot \chi_V = \overline{\chi_U} \cdot \chi_V.$$

S tem je izrek dokazan. ■

Izrek 2.5.3. *Naj bosta G in H grupi. Za $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ in $\psi_j \in \mathrm{Irr}(H)$ definirajmo*
$$\tau_{ij} : G \times H \to \mathbb{C}$$
s predpisom $\tau_{ij}(g, h) = \chi_i(g)\psi_j(h)$. Množica vseh τ_{ij} je natanko $\mathrm{Irr}(G \times H)$.

Dokaz: Naj bo S_i nerazcepen $\mathbb{C}G$-modul, ki pripada nerazcepnemu karakterju χ_i in naj bo T_j nerazcepen $\mathbb{C}H$-modul, ki pripada nerazcepnemu karakterju ψ_j. Tedaj grupa $G \times H$ deljuje na $S_i \otimes T_j$ s prepisom
$$(g, h)(u \otimes v) = (gu) \otimes (hv).$$
Po izreku 2.5.2 je τ_{ij} karakter, ki pripada tej upodobitvi grupe $G \times H$. Dokažimo še, da so karakterji τ_{ij} nerazcepni. To takoj sledi iz
$$[\tau_{ij}, \tau_{ij}] = \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \tau_{ij}(g, h)\overline{\tau_{ij}(g, h)} =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_i(g)} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h)\overline{\psi_j(g)} = [\chi_i, \chi_i][\psi_j, \psi_j] = 1.$$
Tako smo našli vse nerazcepne karakterje grupe $G \times H$. ■

Ta rezultat, skupaj s primerom 2.2.8, omogoča, da enostavno poiščemo tabelo karakterjev poljubne končne abelove grupe.

Za konec tega razdelka omenimo še en način konstruiranja karakterjev iz že znanih. Če je V $\mathbb{C}G$-modul, potem je $V \otimes V$ kot $\mathbb{C}\mathbb{G}$-modul izomorfen $S^2V \oplus \wedge^2 V$, kjer je $S^2V = (V \otimes V)/\langle u \otimes v - v \otimes u\rangle$ *simetrični del*, $\wedge^2 V = (V \otimes V)/\langle u \otimes v + v \otimes u\rangle$ pa *antisimetrični del* tenzorskega kvadrata $V \otimes V$; dokaz prepuščamo bralcu. Velja:

Trditev 2.5.4. *Naj bo χ kartakter upodobitve V grupe G nad $\mathbb{C}$. Potem je $S^2\chi(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$ in $\wedge^2\chi(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$.*

Dokaz: Izberimo $g \in G$. Matrika $\rho(g)$ se da diagonalizirati, zato obstaja baza $u_1, u_2, \ldots, u_r$ prostora V, da je $\rho(g)u_i = \lambda_i u_i$. Potem slike elementov množice $\{u_i \otimes u_i, u_i \otimes u_j \mid 1 \leq i < j \leq r\}$ tvorijo bazo S^2V. Zato je

$$\begin{aligned} S^2\chi(g) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{1}{2}\Big((\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)^2 + (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_r^2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)). \end{aligned}$$

Dokaz za poševno simetrični del je podoben. ■

2.6 Restrikcija in indukcija

Če je $H \leq G$ in ρ upodobitev grupe G, potem je $\rho|_H$ upodobitev grupe H, ki jo imenujemo *restrikcija* upodobitve ρ. Če je χ karakter, dobljen iz ρ, potem je $\chi|_H$ karakter, ki pripada reprezentaciji $\rho|_H$. Imenujemo ga *restrikcija* karakterja χ.

Obratno, naj bo H podgrupa grupe G in naj bo ϕ razredna funkcija na podgrupi H. Definirajmo preslikavo $\phi^0 : G \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$\phi^0(g) = \begin{cases} \phi(g) & : \quad g \in H \\ 0 & : \quad g \notin H \end{cases}.$$

Sedaj definirajmo $\phi^G : G \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$\phi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi^0(xgx^{-1}).$$

Očitno velja

$$\phi^G(1) = \frac{1}{|H|} \sum_{x | inG} \phi^0(1) = \frac{|G|}{|H|}\phi(1) = |G : H|\phi(1).$$

Oglejmo si

$$\phi^G(y^{-1}gy) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \phi^0(xy^{-1}g(xy^{-1})^{-1}).$$

S preimenovanjem $xy^{-1} = t$ dobimo, da je zadnji izraz enak $\phi^G(g)$. Torej je ϕ^G razredna funkcija na grupi G, ki jo imenujemo *inducirana razredna funkcija*, ki pripada ϕ.

Inducirano razredno funkcijo ϕ^G lahko razmeroma preprosto izračunamo na naslednji način: izberimo desno transverzalo T za podgrupo H v G. Tedaj je

$$\phi^G(g) = \sum_{t \in T} \phi^0(tgt^{-1}).$$

Razlog, da se $|H|$ pokrajša, je v tem, da se vsak člen v desni vsoti zadnjega izraza v definiciji inducirane razredne funkcije pojavi natanko $|H|$-krat.

Izrek 2.6.1 (Frobeniusov izrek o recipročnosti)**.** *Naj bo $H \leq G$ in naj bosta ϕ ter θ zaporedoma razredni funkciji na H in G. Tedaj velja*

$$[\phi, \theta|_H]_H = [\phi^G, \theta]_G.$$

Dokaz: Preprosto računamo

$$[\phi^G, \theta]_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi^G(g)\overline{\theta(g)} = \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G, x \in G} \phi^0(xgx^{-1})\overline{\theta(g)}.$$

Preimenujemo $y = xgx^{-1}$ in opazimo, da velja $\theta(g) = \theta(y)$, saj je θ razredna funkcija na G. Izraz $\phi(y)$ se pojavi $|G|$-krat, torej imamo

$$[\phi^G, \theta]_G = \frac{1}{|G||H|} \sum_{y \in G, x \in G} \phi^0(y)\overline{\theta(y)} =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \phi(y)\overline{\theta|_H(y)} = [\phi, \theta|_H]_H.$$

■

Posledica 2.6.2. *Naj bo H podgrupa grupe G in naj bo ϕ karakter na H. Tedaj je ϕ^G karakter na G.*

Dokaz: Če je χ nerazcepen karakter na grupi G, potem je $\chi|_H$ karakter na podgrupi H. Po Frobeniusovem izreku o recipročnosti je

$$[\phi^G, \chi]_G = [\phi, \chi|_H]_H \geq 0.$$

Ker je

$$\phi^G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} [\phi^G, \chi]\chi,$$

je ϕ^G karakter. ■

Posledica 2.6.3. *Naj bo $H \leq G$ in naj bo $\phi \in \mathrm{Irr}(H)$ nerazcepen karakter podgrupe H. Tedaj obstaja tak nerazcepen karakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, da je ϕ sestavni del karakterja $\chi|_H$.*

Dokaz: Naj bo $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ poljuben nerazcepen sestavni del karakterja ϕ^G. Tedaj je

$$0 < [\phi^G, \chi]_G = [\phi, \chi|_H]_H,$$

kar nam da rezultat. Velja strogi neenačaj, saj χ sestavni del karakterja ϕ^G. ■

Trditev 2.6.4. *Naj bo $H \leq G$ in naj bo χ karakter grupe H. Naj bodo $x_1, \ldots, x_m$ predstavniki konjugiranih razredov grupe H, ki so vsebovani v konjugiranem razredu elementa $g \in G$. Tedaj velja*

$$\chi^G(g) = \begin{cases} 0 & : \ m = 0 \\ |C_G(g)| \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi(x_i)}{|C_H(x_i)|} & : \ m \neq 0 \end{cases}.$$

Dokaz: Če je $m = 0$, je H disjunktna s konjugiranim razredom elementa $g \in G$. Tedaj so vsi $\chi^0(xgx^{-1})$ enaki 0. Ko x preteče celo grupo G, je $xgx^{-1} = x_i$ za natanko $|H|\frac{|C_G(g)|}{|C_H(x_i)|}$ elementov x. Izberimo tiste $t_i \in G$, da velja $t_i g t_i^{-1} = x_i$. Tedaj je

$$|\{x \in G : \ xgx^{-1} = x_i\}| = |C_G(g) \cdot t_i^{-1} H t_i|.$$

Odtod sledi

$$|\{x \in G \ xgx^{-1} = x_i\}| = |C_G g) \cdot t_i^{-1} H t_i| = \frac{|C_G(g)||H|}{|C_G(g) \cap t_i^{-1} H t_i|} =$$

$$= \frac{|C_G(g)||H|}{|t_i C_G(g) t_i^{-1} \cap H|} = \frac{|C_G(g)||H|}{|C_G(x_i) \cap H|} = \frac{|C_G(g)||H|}{C_H(x_i)}.$$

∎

Primer **2.6.5.** *Naj bo $G = A_5$. V tej grupi je 5 konjugiranih razredov, o tabeli karakterjev zlahka dobimo naslednje osnovne informacije:*

g_i	1	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 5 4)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	60	4	3	5	5
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	15	20	12	12

.

Naj bo $H = A_4 \leq G$ in izračunajmo $(1_H)^G$ s pomočjo trditve 2.6.4. Na primer, za $g = (1\,2\,3)$ v H obstajata dva razreda elementov, ki so konjugirani z g. Natančneje, H ima 4 konjugirane razrede. Konjugirana razreda $(1\,2\,3)^H$ in $(1\,2\,4)^H$ sta vsebovana v $(1\,2\,3)^G$, medtem ko konjugirana razreda 1^H in $(1\,2)(3\,4)^H$ nista vsebovana v $(1\,2\,3)^G$. Če sta x_1 in x_2 predstavnika, imamo $1_H(x_i) = 1$ in $|C_G(g)| = 3 = |C_H(x_i)|$. Torej je $(1_H)^G g) = 2$. Dobimo

$$(1_H)^G \quad : \quad 5\ 1\ 2\ 0\ 0.$$

Naj bo χ_1 glavni karakter grupe G in naj bo

$$\chi_2 = (1_H)^G - \chi_1 \quad : \quad 4\ 0\ 1\ -1\ -1.$$

S pomočjo 2.1.2 in 2.2.6 lahko preverimo, da je karakter χ_2 nerazcepen.

2.7 Tabela karakterjev diedrske grupe

Diedrska grupa $G = D_{2n}$ moči $2n$ ima prezentacijo

$$G = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle.$$

Omejimo se na primer, ko je število n liho (sodi primer prepuščamo bralcu). Ker je

$$[y, x] = yxy^{-1}x^{-1} = x^{-2}$$

in ker je red elementa x liho število, je lahko videti, da je $G' = \langle x \rangle \cong C_n$. Zato je G/G' ciklična grupa reda 2. Poiščimo konjugirane razrede v G. Ker je

$$(x^k y)y(x^k y)^{-1} = x^k y x^{-k} = x^{2k} y$$

in ker je red x liho število, sledi, da je vsak element oblike $x^\ell y$ konjugiran z y. Zato imamo naslednje konjugirane razrede:

$$\begin{aligned} K_0 &= \{1\}, \\ K_k &= \{x^k, x^{-k}\}, \\ K_{\frac{n+1}{2}} &= \{x^i y \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}, \end{aligned}$$

kjer $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$.

Ker ima G/G' moč 2, ima grupa G dva linearna karakterja, ki izhajata iz karakterjev grupe G/G'. Eden je trivialni karakter, drugega označimo z λ:

	G'	yG'
1	1	1
λ	1	-1

Nerazcepni karakterji podgrupe $G' = \langle x \rangle$ so $\chi_s : \langle x \rangle \to \mathbb{C}$, dani s predpisom $\chi_s(x) = \zeta^s$, kjer je $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Oglejmo si karakterje, ki jih χ_s inducirajo v G; velja

$$\chi_s^G(g) = \sum_{t \in \{1, y\},\, tgt^{-1} \in G'} \chi_s(tgt^{-1}).$$

Od tu hitro dobimo

$$\begin{aligned} \chi_s^G(1) &= 2\chi_s(1) = 2, \\ \chi_s^G(x^k) &= \chi_s(x^k) + \chi_s(x^{-k}) = \zeta^{ks} + \zeta^{-ks}, \\ \chi_s^G(y) &= 0. \end{aligned}$$

Za $s = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ so karakterji χ_s^G paroma različni. Poleg tega so nerazcepni karakterji grupe G; če bi namreč bil kakšen od njih razcepen, bi bil enak vsoti linearnih karakterjev, torej $1 + \lambda$, vendar je lahko preveriti, da se potem vrednosti ne ujemajo. S tem smo skupaj našli ravno toliko nerazcepnih karakterjev, kot je konjugiranih razredov grupe G, kar pomeni, da smo našli vse.

2.8 Osnovne uporabe tabel karakterjev

Tabela karakterjev poda podrobne informacije o podgrupah edinkah grupe G. Naj bo

$$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$$

in definirajmo $N_i = \ker \chi_i$.

Trditev 2.8.1. *Vsaka podgrupa edinka grupe G je presek nekih N_i.*

Dokaz: Naj bo N podgrupa edinka in naj bo χ regularen karakter na grupi G/N. Iz dokaza leme 2.3.2 sledi $\ker \chi = N/N = 1$. Po drugi strani pa lahko χ gledamo kot karakter na grupi G, t.j.

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} [\chi, \chi_i]\chi_i.$$

Preko te identifikacije je

$$N = \ker \chi = \bigcap_{[\chi,\chi_i]\neq 0} N_i.$$

■

Posledica 2.8.2. *Grupa G enostavna natanko takrat, ko velja $\ker \chi = 1$ za vse neglavne karakterje $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.*

S pomočjo posledice 2.8.1 lahko iz tabele karakterjev ugotovimo, ali je končna grupa rešljiva. Spomnimo se, da je končna grupa G *rešljiva*, ko ima tako vrsto podgrup

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G,$$

da so vsi indeksi $|G_{i+1} : G_i|$ praštevila. Grupe G_i in njihove moči lahko najdemo v tabeli karakterjev.

Primer **2.8.3.** *Za simetrično grupo S_4 smo že izračunali tabelo karakterjev:*

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	6	8	3	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

.

Določimo jedra nerazcepnih karakterjev:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \ker \chi_1 = S_4,\\
N_2 &= \ker \chi_2 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3\mathcal{K}_4 = A_4\\
N_3 &= \ker \chi_3 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_4 = \langle (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4)\rangle \cong C_2 \times C_2\\
N_4 &= \ker \chi_4 = \mathcal{K}_1 = 1\\
N_5 &= \ker \chi_5 = \mathcal{K}_1 = 1.
\end{aligned}$$

Podgrupe edinke v S_4 dobimo kot preseke grup $N_1, N_2, \ldots, N_5$. Ker očitno velja $N_4 = N_5 \leq N_3 \leq N_2 \leq N_1$, so te podgrupe edine edinke. Če sedaj pogledamo vrsto

$$1 = N_5 \lhd \langle (1\,2)(3\,4) \rangle \lhd N_3 \lhd N_2 \lhd N_1 = S_4,$$

ugotovimo, da je S_4 rešljiva grupa.

Izrek 2.8.4. *Naj bo G končna grupa. Tedaj veljata naslednji trditvi:*

1. $G' = \bigcap\{\ker \chi : \ \chi \in \mathrm{Irr}(G),\ \chi(1) = 1\}$.
2. $|G : G'|$ *je enako števili linearnih karakterjev na grupi G.*

Dokaz: Če je χ linearen karakter na grupi G, tedaj je χ homomorfizem iz G v abelovo grupo $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$. Torej je $G' \leq \ker \chi$. Ker je G/G' abelova, so vsi njeni karakterji linearni. Torej je

$$\mathrm{Irr}(G/G') = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : \ G' \leq \ker \chi,\ \chi(1) = 1\} = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : \ \chi(1) = 1\}.$$

Z uporabo leme 2.3.2 za G/G' dobimo

$$1 = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G/G')} \ker \chi.$$

Torej velja

$$G' = \bigcap\{\ker \chi : \ \chi \in \mathrm{Irr}(G),\ \chi(1) = 1\}.$$

Po zgornjih argumentih je število linearnih karakterjev na G enako številu linearnih karakterjev na G/G', kar pa je enako $|G/G'|$. ∎

Z izrekom 2.8.4 lahko iščemo stopnje upodobitev grup.

Primer **2.8.5.** *Naj bo G neabelova grupa moči 27. Ker je G' podgrupa grupe G, je lahko le $|G : G'| = 9$, grupa G pa ima natanko 11 konjugiranih razredov. Po zgornjem ima grupa G natanko 9 linearnih karakterjev in 2 nelinearna karakterja χ in ψ. Torej imamo*

$$27 = |G| = 9 + \chi(1)^2 + \psi(1)^2.$$

Če zapišemo 18 kot vsoto dveh kvadratov, vidimo, da je edini možen zapis $18 = 3^2+3^2$. Torej je $\chi(1) = \psi(1) = 3$.

Naj bo χ karakter na grupi G. Definirajmo

$$Z(\chi) = \{g \in G : \ |\chi(g)| = \chi(1)\}.$$

Lema 2.8.6. *Naj bo ρ nerazcepna kompleksna upodobitev grupe G stopnje n. Naj bo A kompleksna matrika velikosti $n \times n$, ki komutira z $\rho(g)$ za vse $g \in G$. Tedaj je $A = \alpha I$ za nek $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Dokaz: Naj bo M n-dimenzionalen vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, ki ima $\mathbb{C}G$-modulsko strukturo inducirano z ρ, t.j.,

$$a \cdot m = \rho(a)m$$

za $a \in \mathbb{C}G$ in $m \in M$. Naj bo $\theta : M \to M$ definirana s predpisom

$$\theta(m) = mA.$$

Po predpostavki je θ $\mathbb{C}G$-modulski endomorfizem modula M. Ker je M nerazcepen, je $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(M) = \mathbb{C} \cdot 1$. Torej je $\theta = \alpha \cdot 1$ za nek $\alpha \in \mathbb{C}$. ■

Trditev 2.8.7. *Naj bo G končna grupa. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

1. $Z(\chi) = \{g \in G : \ \rho(g) = \epsilon I$ *za nek* $\epsilon \in \mathbb{C}\}$.
2. $Z(\chi)$ *je podgrupa grupe* G.
3. $\chi|_{Z(\chi)} = \chi(1)\lambda$ *za nek linearen karakter* $\lambda \in Z(\chi)$.
4. $Z(\chi)/\ker\chi$ *je ciklična podgrupa v* $Z(G/\ker\chi)$.
5. *Če je* χ *nerazcepen karakter, potem je* $Z(\chi)/\ker\chi = Z(G/\ker\chi)$.

Dokaz je enostaven in ga prepuščamo bralcu.

Izrek 2.8.8. *Naj bo G končna grupa. Tedaj je*

$$Z(G) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} Z(\chi).$$

Dokaz: Ker je
$$Z(G)\ker\chi/\ker\chi \leq Z(G/\ker\chi),$$
po lemi 2.8.7 sledi $Z(G) \leq Z(\chi)$. Pokažimo še obratno. Naj bo $g \in Z(\chi)$ za vse nerazcepne karakterje $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Tedaj je $g(\ker\chi) \in Z(G\ker\chi)$. Torej za poljuben $x \in G$ velja $[g, x] \in \ker\chi$. Od tod sledi

$$[g, x] \in \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \ker\chi = 1.$$

Torej je $g \in Z(G)$. ■

Spomnimo se, da je grupa G *nilpotentna*, če ima normalno vrsto

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

za katero je G_{i+1}/G_i vsebovana v centru grupe G/G_i za vse i.

Primer **2.8.9.** *Oglejmo si diedrsko grupo* $D_8 = \langle x, y \mid y^2 = x^4 = 1,\, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$. *Njena tabela karakterjev je*

g_i	1	yx^2	x	x^2	yx^3
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	8	4	4	8	4
$\lvert\mathcal{K}_i\rvert$	1	2	2	1	2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	1
χ_5	2	0	0	-2	0

Izračun tabele prepuščamo bralcu. Izračunajmo centre nerazcepnih karakterjev:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z(\ker \chi_1) = D_8, \\ Z_2 &= Z(\ker \chi_2) = D_8, \\ Z_3 &= Z(\ker \chi_3) = D_8, \\ Z_4 &= Z(\ker \chi_4) = D_8, \\ Z_5 &= Z(\ker \chi_5) = \langle x^2 \rangle. \end{aligned}$$

Od tod sledi $Z(D_8) = Z_5 = \langle x^2 \rangle$. *Grupa* $D_8/Z(D_8)$ *ima moč 4, zato je abelova. Vrsta* $1 \leq Z(D_8) \leq D_8$ *torej pokaže, da je* D_8 *nilpotentna grupa.*

Poglavje 3

Upodobitve in GAP

3.1 Osnovne lastnosti

V GAP-u lahko tabelo karakterjev dane grupe prikažemo na naslednji način:

```
gap> Display( CharacterTable ( "M11" ) );
M11

      2 4 4 1 3 . 1 3 3 . .
      3 2 1 2 . . 1 . . . .
      5 1 . . . 1 . . . . .
     11 1 . . . . . . . 1 1

        1a 2a 3a 4a 5a 6a 8a 8b 11a 11b
     2P 1a 1a 3a 2a 5a 3a 4a 4a 11b 11a
     3P 1a 2a 1a 4a 5a 2a 8a 8b 11a 11b
     5P 1a 2a 3a 4a 1a 6a 8b 8a 11a 11b
    11P 1a 2a 3a 4a 5a 6a 8a 8b 1a 1a

X.1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
X.2 10 2 1 2 . -1 . . -1 -1
X.3 10 -2 1 . . 1 A -A -1 -1
X.4 10 -2 1 . . 1 -A A -1 -1
X.5 11 3 2 -1 1 . -1 -1 . .
X.6 16 . -2 . 1 . . . B /B
X.7 16 . -2 . 1 . . . /B B
X.8 44 4 -1 . -1 1 . . . .
X.9 45 -3 . 1 . . -1 -1 1 1
X.10 55 -1 1 -1 . -1 1 1 . .

A = E(8)+E(8)^3
  = Sqrt(-2) = i2
```

```
B = E(11)+E(11)^3+E(11)^4+E(11)^5+E(11)^9
  = (-1+Sqrt(-11))/2 = b11
```

Na tem mestu razložimo oznake, ki jih `GAP` uporablja.

Zgornji del tabele na levi strani vsebuje vsa praštevila, ki delijo moč grupe. Za vsak razred konjugiranosti posebej je nato zapisana praštevilska faktorizacija moči centralizatorja (pri tem v celi tabeli pika „.” pomeni število 0).

Pod temi številkami so v prvi vrstici zapisani konjugirani razredi, ki so številčeni po redu predstavnika in s črkami abecede. Naslednje vrstice, poimenovane s `pP`, kjer je p praštevilo, ki deli moč grupe, podajajo slike teh elementov glede na preslikavo $g \mapsto g^p$; ta informacija je uporabna pri računanju (anti)simetričnih delov upodobitev.

Vrstice so poimenovane po karakterjih, tipično z `X.1`, `X.2` itd. V tabeli so nato podane vrednosti posameznih karakterjev, pod tabelo pa še razlaga oznak v tabeli; za več informacij naj si bralec ogleda `GAP`-ov priročnik. Tu omenimo, da `/A` pomeni kompleksno konjugiranko števila `A`, z `E(n)` pa `GAP` označi primitivni n-ti koren enote.

Oglejmo si nekoliko manjši primer:

```
gap> G := SymmetricGroup( 4 );;
gap> tbl := CharacterTable( G );
CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) )
gap> Display( tbl );
CT1

     2 3 2 3 . 2
     3 1 . . 1 .

       1a 2a 2b 3a 4a
    2P 1a 1a 1a 3a 2b
    3P 1a 2a 2b 1a 4a

X.1 1 -1 1 1 -1
X.2 3 -1 -1 . 1
X.3 2 . 2 -1 .
X.4 3 1 -1 . -1
X.5 1 1 1 1 1
```

Sedaj lahko vrsto lastnosti grupe G določimo bodisi preko same grupe bodisi preko tabele karakterjev. Oglejmo si najprej konjugirane razrede:

```
gap> cc := ConjugacyClasses( tbl );
[ ()^G, (1,2)^G, (1,2)(3,4)^G, (1,2,3)^G, (1,2,3,4)^G ]
```

Stopnje nerazcepnih karakterjev:

```
gap> CharacterDegrees( G );
```

```
[ [ 1, 2 ], [ 2, 1 ], [ 3, 2 ] ]
gap> CharacterDegrees( tbl );
[ [ 1, 2 ], [ 2, 1 ], [ 3, 2 ] ]
```

Seznam nerazcepnih karakterjev:

```
gap> Irr( G );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 3, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 2, 0, 2, -1, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 3, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
gap> Irr( tbl );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 3, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 2, 0, 2, -1, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 3, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
```

Izberemo lahko linearne karakterje:

```
gap> LinearCharacters( G );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
gap> LinearCharacters( tbl );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 4 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
```

Iz tabele karakterjev lahko neposredno razberemo naslednje lastnosti grupe:

```
gap> AbelianInvariants( tbl );
[ 2 ]
gap> CommutatorLength( tbl );
1
gap> IsAbelian( tbl );
false
gap> IsNilpotent( tbl );
false
gap> IsSimple( tbl );
false
gap> IsSolvable( tbl );
true
```

Podrobnejše informacije o tabeli karakterjev lahko dobimo na naslednji način:

```
gap> NrConjugacyClasses( tbl );
5
```

```
gap> Size( tbl );
24
gap> SizesCentralizers( tbl );
[ 24, 4, 8, 3, 4 ]
gap> SizesConjugacyClasses( tbl );
[ 1, 6, 3, 8, 6 ]
gap> ClassNames( tbl );
[ "1a", "2a", "2b", "3a", "4a" ]
gap> CharacterNames( tbl );
[ "X.1", "X.2", "X.3", "X.4", "X.5" ]
```

S tabelo karakterjev lahko, kot smo že videli, natančno opišemo podgrupe edinke dane grupe:

```
gap> ClassPositionsOfNormalSubgroups( tbl );
[ [ 1 ], [ 1, 3 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 2, 3, 4, 5 ] ]
gap> ClassPositionsOfCenter( tbl );
[ 1 ]
gap> ClassPositionsOfDerivedSubgroup( tbl );
[ 1, 3, 4 ]
```

3.2 Računanje s karakterji

V tem razdelku si oglejmo, kako z GAP-om računamo s konkretnimi karakterji. Najprej konstruirajmo tabelo karakterjev diedrske grupe moči 8:

```
gap> G := DihedralGroup( 8 );
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> tbl := CharacterTable ( G );
CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> )
gap> Display( tbl );
CT3

     2 3 2 2 3 2

       1a 2a 4a 2b 2c

X.1 1 1 1 1 1
X.2 1 -1 1 1 -1
X.3 1 1 -1 1 -1
X.4 1 -1 -1 1 1
X.5 2 . . -2 .
gap> conj := ConjugacyClasses( tbl );
[ <identity> of ...^G, f1^G, f2^G, f3^G, f1*f2^G ]
```

```
gap>
gap> irr := Irr( G );
[ Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
  [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ), Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with
    3 generators> ), [ 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
  [ 1, 1, -1, 1, -1 ] ), Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with
    3 generators> ), [ 1, -1, -1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
  [ 2, 0, 0, -2, 0 ] ) ]
```

Izberimo dva karakterja:

```
gap> c1 := irr[ 2 ];
Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
 [ 1, -1, 1, 1, -1 ] )
gap>
gap> c2 := irr[ 3 ];
Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
 [ 1, 1, -1, 1, -1 ] )
```

Lahko izračunamo skalarni produkt:

```
gap> ScalarProduct( c1, c1 );
1
gap>
gap> ScalarProduct( c2, c1 );
0
```

Lahko izračunamo vrednost prvega karakterja na npr. tretjem konjugiranem razredu:

```
gap> c1[ 3 ];
1
```

Lahko si ogledamo linearne kombinacije karakterjev:

```
gap> c := c1 - c2;
VirtualCharacter( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
 [ 0, -2, 2, 0, 0 ] )
gap> IsCharacter( c );
false
gap> c := c1 + 3 * c2;
Character( CharacterTable( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
 [ 4, 2, -2, 4, -4 ] )
gap> IsCharacter( c );
true
```

Lahko izračunamo jedro karakterja:

```
gap> Kernel( c );
Group([ f3 ])
```

3.3 Restrikcija in indukcija

Oglejmo si primer restrikcije karakterjev grupe S_5 na podgrupo A_5:

```
gap> a5:= CharacterTable( AlternatingGroup(5) );
CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) )
gap> s5:= CharacterTable( SymmetricGroup(5) );
CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) )
gap> Irr( s5 );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 4, -2, 0, 1, 1, 0, -1 ] ), Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
 [ 5, -1, 1, -1, -1, 1, 0 ] ), Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
 [ 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1 ] ), Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 5, 1, 1, -1, 1, -1, 0 ] ), Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
 [ 4, 2, 0, 1, -1, 0, -1 ] ), Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
gap> RestrictedClassFunction( Irr( s5 )[2], a5 );
Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 4, 0, 1, -1, -1 ] )
gap> RestrictedClassFunctions( Irr( s5 ), a5 );
[ Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 4, 0, 1, -1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 5, 1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 6, -2, 0, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 5, 1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 4, 0, 1, -1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ) ]
```

Indukcija deluje podobno:

```
gap> InducedClassFunctions( Irr( a5 ), s5 );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 2, 0, 2, 2, 0, 0, 2 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 8, 0, 0, 2, 0, 0, -2 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 10, 0, 2, -2, 0, 0, 0 ] )
 ]
gap> InducedClassFunctions( Irr( a5 ), SymmetricGroup( 5 ) );
[ Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 2, 0, 2, 2, 0, 0, 2 ] ),
```

```
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 6, 0, -2, 0, 0, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 8, 0, 0, 2, 0, 0, -2 ] ),
  Character( CharacterTable( Sym( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 10, 0, 2, -2, 0, 0, 0 ] )
 ]
```

3.4 Manjšanje norm razrednih funkcij

V tem tehničnem razdelku si oglejmo naslednjo situacijo. Recimo, da že imamo nek seznam razrednih funkcij grupe G. Z linearnimi kombinacijami želimo ustvariti nove razredne funkcije s čim manjšo normo glede na standardni skalarni produkt. Ideja je, da če najdemo razredno funkcijo z normo enako 1, je to nerazcepen karakter.

Oglejmo si nekaj nerazcepnih karakterjev grupe A_5:

```
gap> tbl:= CharacterTable( AlternatingGroup(5) );
CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) )
gap>
gap> chars := Irr( tbl ){ [ 2 .. 4 ] };
[ Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 3, -1, 0, -E(5)-E(5)^4, -E(5)^2-E(5)^3 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 3, -1, 0, -E(5)^2-E(5)^3, -E(5)-E(5)^4 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 4, 0, 1, -1, -1 ] ) ]
```

Poiščimo vse možne tenzorske produkte:

```
gap> chars := Set( Tensored( chars, chars ) );
[ Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 9, 1, 0, -1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 9, 1, 0, -2*E(5)-E(5)^2-E(5)^3-2*E(5)^4, -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4
     ] ), Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 9, 1, 0, -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, -2*E(5)-E(5)^2-E(5)^3-2*E(5)^4
     ] ), Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 12, 0, 0, E(5)^2+E(5)^3, E(5)+E(5)^4 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
  [ 12, 0, 0, E(5)+E(5)^4, E(5)^2+E(5)^3 ] ),
  Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 16, 0, 1, 1, 1 ] ) ]
```

Dobili smo seznam razrednih funkcij, iz katerega bomo sedaj poskušali tvoriti takšne z majhno normo:

```
gap> red := ReducedClassFunctions( chars );
rec( irreducibles := [ Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
      [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ), Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
```

```
      [ 3, -1, 0, -E(5)-E(5)^4, -E(5)^2-E(5)^3 ] ),
      Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ),
      [ 3, -1, 0, -E(5)^2-E(5)^3, -E(5)-E(5)^4 ] ),
      Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 4, 0, 1, -1, -1 ] ),
      Character( CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) ), [ 5, 1, -1, 0, 0 ] ) ],
  remainders := [ ] )
```

Na ta način smo našli nove nerazcepne karakterje grupe A_5.

3.5 Tabela karakterjev grupe S_6

Tabelo karakterjev grupe lahko z GAP-om konstruiramo tudi tako, da posnemamo „ročne tehnike". To še posebej pride prav, ko je grupa razmeroma velika. Oglejmo si to na primeru grupe S_6.

Za začetek bomo ustvarili prazno tabelo karakterjev. Konjugirani razredi so določeni s ciklično strukturo permutacij (dolžinami ciklov v dekompoziciji na disjunktne cikle), torej so v bijektivni korespondenci s particijami števila 6. Te so $(1,1,1,1,1,1)$, $(2,1,1,1,1)$, $(2,2,1,1)$, $(2,2,2)$, $(3,1,1,1)$, $(3,2,1)$, $(3,3)$, $(4,1,1)$, $(4,2)$, $(5,1)$, (6). Enostavno je prešteti, koliko je permutacij v vsakem od teh konjugiranih razredov in od tod izračunati moči centralizatorjev. Te so po vrsti $720, 48, 16, 48, 18, 6, 18, 8, 8, 5, 6$.

```
gap> c := rec(Identifier := "S6",
> OrdersClassRepresentatives := [1,2,2,2,3,6,3,4,4,5,6],
> SizesCentralizers := [720,48,16,48,18,6,18,8,8,5,6],
> UnderlyingCharacteristic := 0);
rec( Identifier := "S6",
  OrdersClassRepresentatives := [ 1, 2, 2, 2, 3, 6, 3, 4, 4, 5, 6 ],
  SizesCentralizers := [ 720, 48, 16, 48, 18, 6, 18, 8, 8, 5, 6 ],
  UnderlyingCharacteristic := 0 )
gap>
gap> ConvertToCharacterTable(c);
CharacterTable( "S6" )
```

Oglejmo si najprej linearne karakterje. Ker je $S_6/S_6' = S_6/A_6 \cong C_2$, imamo dva linearna karakterja, to pa sta ravno trivialni in signaturni. Ustvarimo ju tako, da povemo, kam po vrsti slikajo predstavnike konjugiranih razredov, nato pa ju dodamo v tabelo (zaenkrat v začasni seznam):

```
gap> l := [];
[ ]
gap> Add(l, Character(c, [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]));
gap> Add(l, Character(c, [1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,1,-1]));
```

Grupa S_6 deluje na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zato imamo t.i. *permutacijski krakter* π, za katerega očitno velja, da je $\pi(g)$ število fiksnih točk delovanja elementa g. Izračunamo vrednosti na posameznih konjugiranih razredih in ustvarimo karakter:

```
gap> p := Character(c, [6,4,2,0,3,1,0,2,0,1,0]);
Character( CharacterTable( "S6" ), [ 6, 4, 2, 0, 3, 1, 0, 2, 0, 1, 0 ] )
```

Karakter π ni nerazcepen:

```
gap> ScalarProduct(p, p);
2
```

Od tod sledi, da je π vsota dveh nerazcepnih karakterjev. Sedaj lahko, tako kot v „ročnem načinu", poskušamo odštevati že znane nerazcepne karakterje, lahko se igramo z raznimi linearnimi kombinacijami,... Na srečo to GAP dela avtomatično z ukazom Reduced:

```
gap> red := Reduced(l,[p]);
rec( irreducibles := [ Character( CharacterTable( "S6" ),
      [ 5, 3, 1, -1, 2, 0, -1, 1, -1, 0, -1 ] ) ], remainders := [ ] )
```

Rezultat pove, da smo našli nov nerazcepen karakter, ki ga dodamo v seznam:

```
gap> Add(l,red.irreducibles[1]);
```

Sedaj lahko tvorimo tenzorski produkt drugega in tretjega karakterja iz že dobljene tabele in upamo, da bomo naleteli na nov nerazcepen karakter:

```
gap> t := l[2] * l[3];
Character( CharacterTable( "S6" ), [ 5, -3, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, 0, 1 ] )
gap> ScalarProduct(t, t);
1
gap> t in l;
false
gap> Add(l, t);
```

Sedaj poiščemo karakterje simetričnih delov; pri tem moramo najprej izračunati kvadrate predstavnikov:

```
gap> squares := [1,1,1,1,5,5,7,3,3,10,7];
[ 1, 1, 1, 1, 5, 5, 7, 3, 3, 10, 7 ]
gap> ComputedPowerMaps(c)[2] := squares;
[ 1, 1, 1, 1, 5, 5, 7, 3, 3, 10, 7 ]
gap> s :=SymmetricParts(c, l, 2);
[ Character( CharacterTable( "S6" ), [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 15, 7, 3, 3, 3, 1, 0, 1, 1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 15, 7, 3, 3, 3, 1, 0, 1, 1, 0, 0 ] ) ]
gap>
```

```
gap> r :=Reduced(l, s);
rec( irreducibles := [ Character( CharacterTable( "S6" ),
      [ 9, 3, 1, 3, 0, 0, 0, -1, 1, -1, 0 ] ) ], remainders := [ ] )
gap>
gap> Add(l, r.irreducibles[1]);
```

Še enkrat poskusimo s tenzorskimi produkti:

```
gap> t := Tensored(l, l);
[ Character( CharacterTable( "S6" ), [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, 3, 1, -1, 2, 0, -1, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, -3, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 9, 3, 1, 3, 0, 0, 0, -1, 1, -1, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, -3, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, 3, 1, -1, 2, 0, -1, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 9, -3, 1, -3, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, 3, 1, -1, 2, 0, -1, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, -3, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 25, 9, 1, 1, 4, 0, 1, 1, 1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 25, -9, 1, -1, 4, 0, 1, -1, 1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 45, 9, 1, -3, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, -3, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 5, 3, 1, -1, 2, 0, -1, 1, -1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 25, -9, 1, -1, 4, 0, 1, -1, 1, 0, -1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 25, 9, 1, 1, 4, 0, 1, 1, 1, 0, 1 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 45, -9, 1, 3, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 9, 3, 1, 3, 0, 0, 0, -1, 1, -1, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 9, -3, 1, -3, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 0 ] ),
```

```
  Character( CharacterTable( "S6" ),
  [ 45, 9, 1, -3, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 45, -9, 1, 3, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0 ] ),
  Character( CharacterTable( "S6" ), [ 81, 9, 1, 9, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0 ] ) ]
gap> r := Reduced(l, t);
rec( irreducibles := [ Character( CharacterTable( "S6" ),
      [ 9, -3, 1, -3, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 0 ] ),
      Character( CharacterTable( "S6" ),
      [ 10, -2, -2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -1 ] ),
      Character( CharacterTable( "S6" ),
      [ 10, 2, -2, -2, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 1 ] ) ],
  remainders := [ VirtualCharacter( CharacterTable( "S6" ),
      [ 21, -1, 1, 3, -3, -1, 0, 1, -1, 1, 0 ] ),
      VirtualCharacter( CharacterTable( "S6" ),
      [ 21, 1, 1, -3, -3, 1, 0, -1, -1, 1, 0 ] ),
      VirtualCharacter( CharacterTable( "S6" ),
      [ 37, -1, 1, 3, -5, -1, -2, 1, -1, 2, 0 ] ) ] )
gap> Append(l, r.irreducibles);
```

Sedaj smo našli vse:

```
gap> Length(l);
8
```

Vse, kar ostane, je zgraditi tabelo:

```
gap> SetIrr(c, l);
gap>
gap> Display(c);
S6

     2 4 4 4 4 1 1 1 3 3 . 1
     3 2 1 . 1 2 1 2 . . . 1
     5 1 . . . . . . . . 1 .

       1a 2a 2b 2c 3a 6a 3b 4a 4b 5a 6b
    2P 1a 1a 1a 1a 3a 3a 3b 2b 2b 5a 3b

X.1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
X.2 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1
X.3 5 3 1 -1 2 . -1 1 -1 . -1
X.4 5 -3 1 1 2 . -1 -1 -1 . 1
X.5 9 3 1 3 . . . -1 1 -1 .
X.6 9 -3 1 -3 . . . 1 1 -1 .
X.7 10 -2 -2 2 1 1 1 . . . -1
X.8 10 2 -2 -2 1 -1 1 . . . 1
```

Literatura

[1] M. Brešar, *Introduction to noncommutative algebra*, Springer, 2014.

[2] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.9*; 2017, (https://www.gap-system.org).

[3] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups.* Corrected reprint of the 1976 original [Academic Press, New York]. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[4] P. Moravec, *Some topics in the theory of finite groups.* A chapter in M. Ellingham, M. Meszka, P. Moravec, and E. Pašalić, 2014 PhD Summer School in Discrete Mathematics, Famnit Lectures 3, Koper, 2014. ISSN 2335-3708.