LIEJEVE GRUPE

Janez Mrčun

zapiski predavanj na FMF UL
jesen 2013, jesen 2015, pomlad 2019, pomlad 2022

Zadnja sprememba: 6. januar 2024

Kazalo

Poglavje 1

Pregled nekaterih osnovnih pojmov

V prvem poglavju bomo pregledali nekatere osnovne pojme iz teorije grup in teorije gladkih mnogoterosti, ki jih bomo potrebovali pri študiju Liejevih grup. Dodatne zglede, kot tudi dokaze nekaterih rezultatov iz razdelkov 1.2.9 in 1.2.10, lahko študent najde na primer v knjigi [**4**]. Pri tem pregledu predpostavljamo, da študent pozna linearno algebro ter analizo funkcij več realnih spremenljivk, vključno z izrekom o inverzni funkciji.

1.1. Grupe

1.1.1. Definicija in prvi zgledi. *Grupa* je množica G, opremljena z operacijo $\mu = \mu_G : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, za katero velja:

(i) $x(yz) = (xy)z$ za vse $x, y, z \in G$,
(ii) obstaja tak $e \in G$, da je $ex = xe = x$ za vsak $x \in G$, in
(iii) za vsak $x \in G$ obstaja tak $x^{-1} \in G$, da je $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Grupa G je *komutativna* (oziroma *abelova*), če je $xy = yx$ za vse $x, y \in G$.

Komentar 1.1. Lastnost (i) imenujemo *asociativnost*. Element $e = e_G$ imenujemo *nevtralni element* (oziroma *identiteta* ali *enota*) grupe G, element $x^{-1} = \iota(x) = \iota_G(x)$ pa je *inverzni element* elementa x v G. Nevtralni element ter inverzni elementi so z lastnostima (ii) in (iii) enolično določeni, za poljubna $x, y \in G$ pa velja $(x^{-1})^{-1} = x$ ter $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Zgled 1.2. (1) Množice $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ so abelove grupe za seštevanje, za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Splošna linearna grupa* stopnje n nad $\mathbb{R}$ je množica realnih obrnljivih matrik dimenzije $n \times n$,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\},$$

z operacijo množenja matrik. Za $n = 1$ je to grupa $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vseh neničelnih realnih števil za množenje.

Podobno definiramo *splošno linearno grupo* stopnje n nad $\mathbb{C}$ kot množico kompleksnih obrnljivih matrik dimenzije $n \times n$,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\},$$

z operacijo množenja matrik. Za $n = 1$ je to grupa $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vseh neničelnih kompleksnih števil za množenje.

(3) *Simetrična grupa* $\mathrm{Sym}(M)$ na poljubni množici M je množica vse bijekcij $M \to M$ z operacijo kompozicije. Za poljubno naravno število n označimo $\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(\{1, 2, \ldots, n\})$.

Podgrupa grupe G je podmnožica $H \subset G$, za katero je

(i) $e_G \in H$,
(ii) za poljubna $x, y \in H$ je $xy \in H$, in
(iii) za vsak $x \in H$ je $x^{-1} \in H$.

KOMENTAR 1.3. Podgrupa H grupe G je torej tudi grupa sama zase, in sicer za operacijo $\mu_H = \mu_G|_{H\times H}$, ob tem pa velja $e_H = e_G$ ter $\iota_H = \iota_G|_H$. To, da je H podgrupa grupe G, s simbolom zapišemo kot $H < G$.

ZGLED 1.4. (1) Velja $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n < \mathbb{C}^n$ za vsako naravno število n.
(2) Krožnica $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ je podgrupa grupe $\mathbb{C}^\times$.
(3) Za vsako naravno število n je množica kompleksnih n-tih korenov enote

$$\{\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}} \in \mathbb{C} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

podgrupa grupe S^1.
(4) Ker je $\mathbb{R}$ podobseg obsega $\mathbb{C}$, velja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

1.1.2. Homomorfizmi grup. Preslikava $\phi : H \to G$ med grupama H in G je *homomorfizem grup*, če za poljubna $x, y \in H$ velja $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

KOMENTAR 1.5. Za vsak homomorfizem grup $\phi : H \to G$ in za vsak $x \in H$ velja tudi $\phi(e_H) = e_G$ in $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.

Naj bo $\phi : H \to G$ homomorfizem grup. *Jedro* homomorfizma ϕ je podgrupa

$$\ker \phi = \{x \in H \mid \phi(x) = e\} < H,$$

njegova *slika* pa je podgrupa

$$\operatorname{im} \phi = \{\phi(x) \mid x \in H\} < G.$$

Homomorfizem ϕ je
(i) *monomorfizem*, če je injektiven,
(ii) *epimorfizem*, če je surjektiven,
(iii) *izomorfizem*, če je bijekcija,
(iv) *endomorfizem*, če je $H = G$, ter
(v) *avtomorfizem*, če je bijekcija in je hkrati $H = G$.

Ni težko videti, da je ϕ monomorfizem če, in samo če, je njegovo jedro trivialno (torej $\ker \phi = \{e\}$). Kompozicija izomorfizmov grup je spet izomorfizem grup. Inverz izomorfizma grup je prav tako izomorfizem grup. Dve grupi sta *izomorfni*, če obstaja kakšen izomorfizem med njima. Množica $\mathrm{Aut}(G)$ vseh avtomorfizmov grupe G je podgrupa simetrične grupe na množici G,

$$\mathrm{Aut}(G) < \mathrm{Sym}(G).$$

ZGLED 1.6. (1) Determinanta kot preslikava

$$\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$$

je epimorfizem grup. Jedro tega epimorfizma je *specialna linearna grupa* stopnje n nad $\mathbb{R}$, ki jo označimo z

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Podobno je

$$\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$$

epimorfizem grup, katerega jedro je *specialna linearna grupa* stopnje n nad $\mathbb{C}$,

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}.$$

Pri tem velja $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) < \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

(2) S predpisom $\phi(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$ je definirana preslikava $\phi : \mathbb{R} \to S^1$, ki je epimorfizem med abelovo grupo $\mathbb{R}$ za seštevanje in krožnico S^1, ki je podgrupa grupe $\mathbb{C}^\times$ in v kateri je operacija dana z množenjem kompleksnih števil. Jedro tega epimorfizma je grupa celih števil $\mathbb{Z}$.

Naj bo G grupa in $x \in G$. Preslikavo $\mathrm{L}_x : G \to G$, dano s predpisom

$$\mathrm{L}_x(y) = xy,$$

imenujemo *leva translacija* z elementom x na G. Ta preslikava je bijekcija z inverzom $(\mathrm{L}_x)^{-1} = \mathrm{L}_{x^{-1}}$. Še več, velja $\mathrm{L}_e = \mathrm{id}$ in $\mathrm{L}_y \circ \mathrm{L}_x = \mathrm{L}_{yx}$. Preslikava $G \to \mathrm{Sym}(G)$, dana s predpisom

$$x \mapsto \mathrm{L}_x,$$

je monomorfizem grup.

Preslikavo $\mathrm{R}_x : G \to G$, dano s predpisom

$$\mathrm{R}_x(y) = yx,$$

imenujemo *desna translacija* z elementom x na G. Tudi ta preslikava je bijekcija, njen inverz je enak $\mathrm{R}_{x^{-1}}$ in velja $\mathrm{R}_e = \mathrm{id}$ ter $\mathrm{R}_y \circ \mathrm{R}_x = \mathrm{R}_{xy}$. Preslikava $G \to \mathrm{Sym}(G)$, dana s predpisom

$$x \mapsto \mathrm{R}_{x^{-1}},$$

je monomorfizem grup.

Preslikavo $\mathrm{C}_x : G \to G$, dano s predpisom

$$\mathrm{C}_x(y) = xyx^{-1},$$

imenujemo *konjugiranje* z elementom x na G. Ta preslikava je avtomorfizem grupe G, pri tem pa velja $\mathrm{C}_x = \mathrm{L}_x \circ \mathrm{R}_{x^{-1}} = \mathrm{R}_{x^{-1}} \circ \mathrm{L}_x$. Preslikava $G \to \mathrm{Aut}(G)$, dana s predpisom

$$x \mapsto \mathrm{C}_x,$$

je homomorfizem grup, katerega jedro imenujemo *center* grupe G in označimo

$$\mathrm{Z}(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ za vsak } y \in G\} < G.$$

Grupa G je abelova če, in samo če, je $\mathrm{Z}(G) = G$.

1.1.3. Produkt grup. Naj bosta G in H grupi. Na kartezičnem produktu množic G in H,

$$G \times H = \{(x,y) \mid x \in G,\ y \in H\},$$

definiramo operacijo s predpisom

$$(x,y)(z,w) = (xz, yw).$$

S to operacijo $G \times H$ postane grupa, ki jo imenujemo *produkt* grup G in H. Pri tem sta projekciji $\mathrm{pr}_1 : G \times H \to G$ in $\mathrm{pr}_2 : G \times H \to H$ epimorfizma grup. Vložitvi $\mathrm{inc}_1 : G \to G \times H$ ter $\mathrm{inc}_2 : H \to G \times H$, ki sta dani s predpisoma $\mathrm{inc}_1(x) = (x, e)$ ter $\mathrm{inc}_2(y) = (e, y)$, sta monomorfizma grup.

Za poljubni grupi G in H velja

$$\mathrm{Z}(G \times H) = \mathrm{Z}(G) \times \mathrm{Z}(H).$$

Produkt $G \times H$ je torej abelova grupa če, in samo če, sta grupi G in H obe abelovi.

ZGLED 1.7. Za poljubno naravno število n je n-torus produkt n kopij krožnice S^1,

$$T^n = (S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1,$$

in je torej abelova grupa.

1.1.4. Odseki grupe po podgrupi in kvocientna grupa. *Ekvivalenčna relacija* na množici M je dana s podmnožico $\mathcal{R} \subset M \times M$, za katero velja:

(i) $(x, x) \in \mathcal{R}$,
(ii) če $(x, y) \in \mathcal{R}$, potem $(y, x) \in \mathcal{R}$, in
(iii) če $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$, potem $(x, z) \in \mathcal{R}$,

za vse $x, y, z \in M$. Navadno za to, da je $(x, y) \in \mathcal{R}$, uporabljamo okrajšavo $x\mathcal{R}y$ (tedaj pravimo, da je x v relaciji $\mathcal{R}$ z y). *Ekvivalenčni razred* elementa $x \in M$ je podmnožica

$$[x]_{\mathcal{R}} = [x] = \{y \in M \mid x\mathcal{R}y\} \subset M.$$

Množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije $\mathcal{R}$ na M,

$$M/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in M\},$$

je *dekompozicija* (oziroma *particija*) množice M. To pomeni, da je $M/\mathcal{R}$ družina nepraznih paroma disjunktnih podmnožic množice M, katere unija je cel M. Vsaka dekompozicija množice M pripada natanko določeni ekvivalenčni relaciji na M: element $x \in M$ je v relaciji z elementom $y \in M$ če, in samo če, sta x in y elementa iste podmnožice iz dekompozicije.

Množico $M/\mathcal{R}$ včasih imenujemo tudi *kvocientna množica* množice M glede na relacijo $\mathcal{R}$, medtem ko surjektivni funkciji $\pi_{\mathcal{R}} = \pi : M \to M/\mathcal{R}$, dani s predpisom

$$\pi_{\mathcal{R}}(x) = [x]_{\mathcal{R}},$$

pravimo *kvocientna projekcija* relacije $\mathcal{R}$.

ZGLED 1.8. Naj bo $f : M \to Q$ surjektivna funkcija. *Vlakno* funkcije f nad točko $q \in Q$ je množica $f^{-1}(\{q\}) \subset M$. Vsa vlakna funkcije f definirajo dekompozicijo množice M. Za pripadajočo ekvivalenčno relacijo $\mathcal{R}$ torej velja, da je $x\mathcal{R}y$ če, in samo če, je $f(x) = f(y)$. Ekvivalenčni razred elementa $x \in M$ je vlakno

$$\pi(x) = [x] = f^{-1}(\{f(x)\}).$$

Obstaja natanko ena funkcija $\bar{f} : M/\mathcal{R} \to Q$, za katero velja $\bar{f} \circ \pi = f$. Dana je s predpisom $\bar{f}([x]) = f(x)$ in je bijekcija. Množico $M/\mathcal{R}$ lahko torej v tem primeru na naraven način identificiramo z množico Q.

Naj bo G grupa in K njena podgrupa. Za vsak $x \in G$ množico

$$xK = \{xz \mid z \in K\} = L_x(K) \subset G$$

imenujemo *levi odsek* grupe G po podgrupi K skozi x. Ni se težko prepričati, da za poljubna $x, y \in G$ velja:

(i) če $x^{-1}y \in K$, potem $xK = yK$, in
(ii) če $x^{-1}y \notin K$, potem $xK \cap yK = \emptyset$.

Odtod sledi, da levi odseki sestavljajo dekompozicijo

$$G/K = \{xK \mid x \in G\}$$

grupe G. Pripadajočo kvocientno projekcijo označimo z

$$\pi_K = \pi : G \to G/K.$$

Za $x, y \in G$ je torej $\pi_K(x) = \pi_K(y)$ če, in samo če, je $x^{-1}y \in K$.

Podobno definiramo tudi *desne odseke* grupe G po podgrupi K skozi x kot množice

$$Kx = \{zx \mid z \in K\} = \mathrm{R}_x(K) \subset G.$$

Tudi ti sestavljajo dekompozicijo grupe G, ki pa v splošnem ni enaka dekompoziciji z levimi odseki. Kadar je to res, torej kadar je

$$xK = Kx$$

za vsak $x \in G$, pravimo, da je K *normalna podgrupa* oziroma *podgrupa edinka* grupe G, in označimo $K \triangleleft G$. Drugače povedano, podgrupa K je podgrupa edinka grupe G, če velja $xKx^{-1} = K$ oziroma

$$\mathrm{C}_x(K) = K$$

za vsak $x \in G$. Ni težko preveriti, da je jedro poljubnega homomorfizma grup $G \to L$ podgrupa edinka grupe G.

Naj bo K podgrupa edinka grupe G. Na množici G/K definiramo množenje

$$(xK)(yK) = (xy)K.$$

Iz enakost levih in desnih odsekov grupe G po podgrupi edinki K sledi, da je s tem res dobro definirana operacija, s katero G/K postane grupa. Kvocientna projekcija

$$\pi_K : G \to G/K$$

je epimorfizem grup, za katerega je $\ker \pi_K = K$. Grupo G/K imenujemo *kvocientna grupa* grupe G po podgrupi edinki K.

TRDITEV 1.9. *Naj bo K podgrupa edinka grupe G in $\phi : G \to L$ homomorfizem grup, za katerega je $K < \ker \phi$. Tedaj obstaja natanko en homomorfizem grup $\bar{\phi} : G/K \to L$, za katerega je $\bar{\phi} \circ \pi_K = \phi$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_K"'] & L \\ G/K \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Pri tem je $\bar{\phi}$ epimorfizem če, in samo če, je ϕ epimorfizem. Homomorfizem $\bar{\phi}$ je monomorfizem če, in samo če, velja $K = \ker \phi$.

KOMENTAR 1.10. Homomorfizem $\bar{\phi}$ seveda definiramo s predpisom $\bar{\phi}(xK) = \phi(x)$. Navedene lastnosti tega homomorfizma sledijo direktno iz definicij.

ZGLED 1.11. (1) Jedro epimorfizma grup $\phi : \mathbb{R} \to S^1$, $\phi(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, je grupa celih števil $\mathbb{Z}$. Odtod sledi, da ϕ inducira izomorfizem grup med $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in S^1.

(2) Naj bo n naravno število. Jedro homomorfizma grup $\phi : \mathbb{Z} \to S^1$, $\phi(k) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}$, je grupa $n\mathbb{Z}$ vseh celih večkratnikov števila n. Slika homomorfizma ϕ je grupa kompleksnih n-tih korenov enote. Homomorfizem ϕ nam torej inducira izomorfizem med grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in grupo kompleksnih n-tih korenov enote.

1.2. Gladke mnogoterosti

1.2.1. Gladke funkcije več realnih spremenljivk. Za dano naravno število n so elementi evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ urejene n-terice $r = (r_1, \ldots, r_n)$ realnih števil. Funkcija $f : U \to \mathbb{R}$, definirana na odprti podmnožici U prostora $\mathbb{R}^n$, je *gladka*, če v vsaki točki $a \in U$ obstajajo vsi parcialni odvodi

$$\frac{\partial^k f}{\partial r_{j_k} \cdots \partial r_{j_1}}(a)$$

in so zvezni kot funkcije $U \to \mathbb{R}$, za vse $j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n$ in $k = 0, 1, \ldots$. Množica

$$C^\infty(U)$$

vseh takšnih funkcij je zaprta za seštevanje in množenje funkcij. Za gladke funkcije vrstni red parcialnih odvodov ni pomemben, zato lahko parcialne odvode označimo krajše kot

$$\frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial r^\nu}(a) = \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial r_n^{\nu_n} \cdots \partial r_1^{\nu_1}}(a),$$

kjer je $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ urejena n-terica nenegativnih celih števil (torej $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) in $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$. Prvi parcialni odvodi sestavljajo *gradient* funkcije f v točki a, ki ga označimo z

$$\nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial r_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial r_n}(a)\Big) \in \mathbb{R}^n.$$

Vektorska funkcija $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je *gladka*, če so vse njene komponente $g_1, \ldots, g_m$ gladke funkcije. Vektorski prostor vseh gladkih funkcij $U \to \mathbb{R}^m$ označimo z

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m).$$

Odvod gladke funkcije $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ v točki $a \in U$ je realna (*Jacobijeva*) matrika dimenzije $m \times n$, sestavljena iz prvih parcialnih odvodov,

$$(dg)_a = \Big[\frac{\partial g_i}{\partial r_j}(a)\Big]_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}).$$

Odvod $(dg)_a$ kot linearna preslikava $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je enolično določen s pogojem

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a) - (dg)_a(h)}{|h|} = 0.$$

Smerni odvod funkcije g v točki a in v smeri vektorja $v \in \mathbb{R}^n$ lahko izračunamo kot

$$(\partial_v g)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a+tv) - g(a)}{t} = (dg)_a(v) \in \mathbb{R}^m.$$

Posebej seveda velja $(\partial_v g)(a) = \big((\partial_v g_1)(a), \ldots, (\partial_v g_m)(a)\big)$ in

$$(\partial_{e_j} g)_a = \frac{\partial g}{\partial r_j}(a) = \Big(\frac{\partial g_1}{\partial r_j}(a), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial r_j}(a)\Big),$$

kjer e_j označuje j-ti standardni bazni vektor prostora $\mathbb{R}^n$.

Za odvod velja verižno pravilo: če je $h : W \to \mathbb{R}^k$ še ena gladka funkcija, definirana na odprti podmnožici W prostora $\mathbb{R}^m$, potem je tudi kompozicija funkcij $h \circ g = h \circ g|_{g^{-1}(W)}$ gladka funkcija in velja

$$d(h \circ g)_a = (dh)_{g(a)}(dg)_a$$

za vsak $a \in g^{-1}(W)$.

Preslikava $g : U \to V$ med odprtima podmnožicama $U, V \subset \mathbb{R}^n$ je *difeomorfizem*, če je gladka bijekcija z gladkim inverzom. Iz verižnega pravila sledi, da je v tem primeru $\det(dg)_a \neq 0$ za vsak $a \in U$. Izrek o inverzni funkciji nam pove obratno:

TRDITEV 1.12. *Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ in $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Če je $\det(dg)_a \neq 0$, potem obstaja takšna odprta podmnožica V prostora $\mathbb{R}^n$, da je $a \in V \subset U$, da je $g(V)$ odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$ in da je preslikava $g|_V : V \to g(V)$ difeomorfizem.*

Graf gladke realne funkcije dveh spremenljivk si predstavljamo kot ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$, lahko pa ploskev v $\mathbb{R}^3$ podamo kot množico rešitev neke enačbe, na primer kot množico ničel primerne gladke realne funkcije treh spremenljivk. Tako denimo krožnico v ravnini lahko podamo kot množico rešitev enačbe $x^2 + y^2 = 1$, ne moremo pa je v celoti predstaviti kot graf funkcije.

Splošneje, če je U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^{n+m}$ in so $g_1, \ldots, g_m \in C^\infty(U)$, nas zanima množica rešitev $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ sistema m enačb za $n + m$ neznank:

$$\begin{aligned} g_1(r_1, \ldots, r_{n+m}) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(r_1, \ldots, r_{n+m}) &= 0 \end{aligned}$$

Izrek o implicitni funkciji pove, da lokalno v majhni okolici neke točke $p \in N$ lahko N predstavimo kot graf funkcije nekih n spremenljivk, primerno izbranih izmed spremenljivk $r_1, \ldots, r_{n+m}$, a to pod pogojem, da so gradienti $\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_m(p)$ linearno neodvisni. Bolj natančno, izrek o implicitni funkciji pove:

TRDITEV 1.13. *Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, $(a, b) \in U$, $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Če so vektorji*

$$\frac{\partial g}{\partial r_{n+1}}(a, b), \ldots, \frac{\partial g}{\partial r_{n+m}}(a, b)$$

linearno neodvisni, potem obstaja odprta okolica $U_0 \subset U$ točke (a, b) v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ter odprti podmnožici $V \subset \mathbb{R}^n$ ter $W \subset \mathbb{R}^m$, tako da je preslikava $G : U_0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, dana s predpisom

$$G(x, y) = (x, g(x, y)),$$

difeomorfizem med U_0 in množico $V \times W$. Inverz $G^{-1} : V \times W \to U_0$ je dan s predpisom

$$G^{-1}(x, z) = (x, f_z(x)),$$

kjer je $f_z \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$, in velja

$$g(x, f_z(x)) = z$$

za vsak $x \in V$ in vsak $z \in W$.

KOMENTAR 1.14. Drugače povedano, izrek o implicitni funkciji pove, da lahko na majhni okolici U_0 točke (a, b) s pomočjo difeomorfizma G spremenimo koordinate (x, y) v nove koordinate (x, z), glede na katere se g izrazi kot projekcija: komutira torej diagram:

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "g"'] & & V \times W \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & \mathbb{R}^m & \end{tikzcd}$$

Za poljuben $z \in W$ (in posebej za $z = g(a,b)$) je množica rešitev enačbe $g(x,y) = z$ lokalno na množici U_0 enaka grafu gladke funkcije $f_z : V \to \mathbb{R}^m$.

1.2.2. Lokalne karte in gladki atlasi. Na poljubni podmnožici prostora $\mathbb{R}^m$, pa tudi na poljubnem metričnem prostoru M, imamo definiran pojem odprte podmnožice - to so tiste podmnožice prostora M, ki jih lahko zapišemo kot unijo neke družine odprtih krogel v M. Za družino $\mathcal{O}$ vseh odprtih podmnožic prostora M velja:

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$,
(ii) če $U, V \in \mathcal{O}$, potem $U \cap V \in \mathcal{O}$, in
(iii) če $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$, potem $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

Splošneje, poljubno družino $\mathcal{O}$, sestavljeno iz podmnožic množice M, ki zadošča pogojem (i)-(iii), imenujemo *topologija* na množici M. *Topološki prostor* je množica M z izbrano topologijo na njej. Elemente topologije prostora M imenujemo *odprte* podmnožice topološkega prostora M, njihove komplemente pa *zaprte* podmnožice. Podmnožica U topološkega prostora M je *okolica* točke $p \in U$, če obstaja takšna odprta podmnožica V prostora M, da je $p \in V \subset U$.

Topološki prostor M je *Hausdorffov*, če za poljubni dve različni točki $p, q \in M$ lahko najdemo okolico U točke p ter okolico V točke q v M, da velja $U \cap V = \emptyset$.

Topološki prostor M je *2-števen*, če obstaja takšna števna družina $\mathcal{B}$ odprtih podmnožic v M, da vsako odprto podmnožico prostora M lahko zapišemo kot unijo neke poddružine družine $\mathcal{B}$.

Zgled 1.15. (1) Vsak metrični prostor je Hausdorffov topološki prostor. Vsaka podmnožica $M \subset \mathbb{R}^n$ je 2-števen metrični prostor.

(2) Naj bo M topološki prostor in N podmnožica prostora M. Topologija $\mathcal{O}$ prostora M inducira topologijo $\mathcal{O}|_N$ na N s predpisom

$$\mathcal{O}|_N = \{U \cap N \mid U \in \mathcal{O}\}.$$

Vsaka podmnožica topološkega prostora je torej spet topološki prostor. Če je M 2-števen ali Hausdorffov, potem je tak tudi N.

Preslikava $g : N \to M$ med topološkimi prostori je *zvezna*, če je za vsako odprto podmnožico U prostora M njena praslika $g^{-1}(U)$ odprta podmnožica prostora N. V primeru preslikave med metričnimi prostori se ta definicija ujema z običajno definicijo zveznosti z uporabo metrike. Preslikava $g : N \to M$ je *homeomorfizem*, če je zvezna bijekcija in je njen inverz tudi zvezen. Kompozicija zveznih preslikav je spet zvezna preslikava, kompozicija homeomorfizmov je spet homeomorfizem.

Lokalna karta dimenzije $m \in \mathbb{N}_0$ na topološkem prostoru M je injektivna preslikava

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^m,$$

definirana na odprti podmnožici $U \subset M$, ki ima odprto sliko $\varphi(U)$ v prostoru $\mathbb{R}^m$ in ki nam da homeomorfizem med U in $\varphi(U)$. Komponente lokalne karte $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ imenujemo tudi *lokalne koordinate* na M.

Dve takšni lokalni karti na M, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ in $\vartheta : V \to \mathbb{R}^m$, sta *gladko kompatibilni*, če je preslikava

$$(\vartheta|_{U\cap V}) \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \vartheta(U \cap V)$$

difeomorfizem med odprtima podmnožicama v $\mathbb{R}^m$. To preslikavo imenujemo tudi *prehodna preslikava* med lokalnima kartama φ in ϑ.

Gladek atlas dimenzije m na M je družina $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$ paroma gladko kompatibilnih lokalnih kart na M, za katero je $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$. Za tak gladek atlas označimo $\varphi_{\beta\alpha} = (\varphi_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}) \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta})^{-1}$, ter opazimo, da za poljuben $a \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$ velja $\varphi_{\gamma\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(a)) = \varphi_{\gamma\alpha}(a)$, za vse $\alpha, \beta, \gamma \in A$.

Gladek altas dimenzije m na M je *maksimalen*, če vsebuje vsako lokalno karto na M, ki je gladko kompatibilna z vsemi lokalnimi kartami iz tega atlasa. Maksimalen gladek atlas dimenzije m na M imenujemo tudi *gladka struktura* dimenzije m na M. Vsak gladek atlas $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ na M je poddružina natanko enega maksimalnega gladkega atlasa, ki ga dobimo tako, da atlasu $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ dodamo vse lokalne karte na M, ki so gladko kompatibilne z vsemi lokalnimi kartami φ_α, $\alpha \in A$. Vsak gladek atlas na M torej natanko določi (generira) maksimalen gladek atlas na M.

Gladka mnogoterost dimenzije m je Hausdorffov 2-števen topološki prostor M, opremljen z maksimalnim gladkim atlasom dimenzije m na M.

Komentar 1.16. (1) Gladke mnogoterosti bomo na kratko imenovali kar mnogoterosti, lokalne karte iz maksimalnega gladkega atlasa mnogoterosti M pa *lokalne karte na mnogoterosti* M. Gladek atlas na M, ki je sestavljen iz lokalnih kart na mnogoterosti M, na kratko imenujemo *atlas na mnogoterosti* M. Vsak tak atlas je torej poddružina (podatlas) maksimalnega gladkega atlasa mnogoterosti M. Dimenzijo mnogoterosti M označimo z $\dim M$.

Iz praktičnih razlogov je v večini konkretnih primerov seveda koristno, da gladko strukturo mnogoterosti opišemo z atlasom, v katerem je čim manj lokalnih kart.

(2) Opazimo lahko, da je za vsako lokalno karto $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na mnogoterosti M in za vsako odprto podmnožico $V \subset U$ v M tudi zožitev $\varphi|_V : V \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na mnogoterosti M.

(3) Za vsako lokalno karto $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na mnogoterosti M in poljuben difeomorfizem $g : V \to W$ med odprtima podmnožicama prostora $\mathbb{R}^m$ tudi $g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$ lokalna karta na mnogoterosti M.

(4) Lokalno karto dimenzije m bi lahko definirali tudi na poljubni množici, in sicer kot injektivno preslikavo $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, katere slika je odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$. Dve takšni lokalni karti $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ in $\vartheta : V \to \mathbb{R}^m$ na množici M sta gladko kompatibilni, če sta množici $\varphi(U \cap V)$ in $\vartheta(U \cap V)$ odprti v $\mathbb{R}^m$ in je preslikava

$$(\vartheta|_{U\cap V}) \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \vartheta(U \cap V)$$

difeomorfizem. Na podlagi tega lahko analogno kot prej na topološkem prostoru zdaj tudi na množici definiramo pojem (maksimalnega) gladkega atlasa. Takšen (maksimalen) gladek atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$ nam tedaj inducira topologijo na množici M s predpisom, da je podmnožica U množice M odprta, če je $\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)$ odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$ za vsak $\alpha \in A$. Če je dobljeni topološki prostor M Hausdorffov in 2-števen, potem je M z maksimalnim gladkim atlasom gladka mnogoterost.

Opazimo lahko, da je M Hausdorffov prostor če, in samo če, lahko za poljubni različni točki $x, y \in M$ najdemo lokalni karti $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ in $\vartheta : V \to \mathbb{R}^m$ iz maksimalnega gladkega atlasa, da velja $x \in U$, $y \in V$ in $U \cap V = \emptyset$.

Topološki prostor M je 2-števen če, in samo če, ima maksimalen gladek atlas na M vsaj en števen podatlas na M. (Če ta pogoj velja, potem pravimo, da je maksimalen atlas *števno generiran*.)

Zgled 1.17. (1) Prostor $\mathbb{R}^m$ je seveda prvi primer gladke mnogoterosti dimenzije m, za poljuben m. Gladek atlas na njem je dan z eno samo lokalno karto, to je identiteto $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. *Standardne koordinate* na $\mathbb{R}^m$ so komponente te identitete, torej so projekcije $r_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $r_i(a_1, \ldots, a_m) = a_i$.

Tudi vsaka odprta podmnožica $U \subset \mathbb{R}^m$ je gladka mnogoterost dimenzije m. Njena gladka struktura je določena z atlasom, v katerem je le ena lokalna karta, to je inkluzija $U \to \mathbb{R}^m$. Zožitve $r_i|_U$ so *standardne koordinate* na U.

(2) Mnogoterost dimenzije 0 je diskretna: vse podmnožice takšne mnogoterosti so odprte. Zaradi pogoja 2-števnosti ima mnogoterost dimenzije 0 števno mnogo točk.

(3) Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$ in $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Graf preslikave g je tedaj podmnožica v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, projekcija

$$\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Graf}(g) \to \mathbb{R}^n$$

pa je lokalna karta, ki določi gladko strukturo na prostoru $\mathrm{Graf}(g)$. Graf gladke preslikave g je torej gladka mnogoterost dimenzije n.

(4) Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^{n+m}$ in $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Izberimo $c \in \mathbb{R}^m$ ter označimo $N = g^{-1}(\{c\}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Če je za vsak $q \in N$ rang odvoda $(dg)_q$ enak m, potem po izreku o implicitni funkciji v okolici točke q lahko predstavimo N kot graf gladke funkcije. Tak graf nam, enako kot v zgledu (3), definira lokalno karto na okolici točke q. Ni težko preveriti, da na ta način dobimo gladek atlas na N, s katerim N postane gladka mnogoterost dimenzije n.

(5) Za poljubno nenegativno celo število n je

$$S^n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r_1^2 + r_2^2 \cdots + r_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

gladka mnogoterost dimenzije n, ki jo imenujemo *n-sfera*. Gladko strukturo na S^n lahko dobimo tako kot v zgledu (4), saj je $S^n = g^{-1}(\{1\})$, kjer je $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ dana s predpisom $g(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) = r_1^2 + r_2^2 \cdots + r_{n+1}^2$, poleg tega pa je gradient $\nabla g(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) = 2(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})$ neničelen za vsak $(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) \in S^n$.

Lahko pa gladko strukturo na S^n opišemo tudi eksplicitno z gladkim atlasom: Za vsak $k = 1, 2, \ldots, n+1$ in $\sigma = -1, 1$ naj bo

$$U_k^\sigma = \{(r_1, \ldots, r_{n+1}) \in S^n \mid \sigma r_k > 0\}$$

ter definirajmo $\varphi_k^\sigma : U_k^\sigma \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\varphi_k^\sigma(r_1, \ldots, r_{n+1}) = (r_1, \ldots, r_{k-1}, r_{k+1}, \ldots, r_{n+1}).$$

Ta preslikava je homeomorfizem na odprto kroglo s središčem v 0 in radijem 1, z inverzom danim s predpisom

$$(\varphi_k^\sigma)^{-1}(s_1, \ldots, s_n) = (s_1, \ldots, s_{k-1}, \sigma\sqrt{1 - s_1^2 - \cdots - s_n^2}, s_k, \ldots, s_n).$$

Družina $\{\varphi_k^\sigma \mid k = 1, 2, \ldots, n+1,\ \sigma = -1, 1\}$ je gladek atlas na S^n. Posebej je $S^0 = \{-1, 1\}$.

(6) Naj bo $\mathbb{R}P^n$ množica vseh premic v $\mathbb{R}^{n+1}$, ki gredo skozi izhodišče. Vsaka takšna premica seka sfero S^n v natanko dveh, antipodnih točkah, in ti dve točki enolično določita premico. Z drugimi besedami, preslikava $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$, ki točki $r \in S^n$ priredi premico $\pi(r) = \mathbb{R}r = \{tr \mid t \in \mathbb{R}\}$, je surjektivna in $\pi^{-1}(\{\pi(r)\}) = \{r, -r\}$ za vsak r. Na $\mathbb{R}P^n$ imamo topologijo, v kateri je podmnožica $U \subset \mathbb{R}P^n$ odprta če je praslika $\pi^{-1}(U)$ odprta v S^n.

Za vsak $k = 1, 2, \ldots, n+1$ naj bo $U_k = \pi(U_k^1)$ in $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n$ preslikava, enolično določena s pogojem $\varphi_k \circ \pi = \varphi_k^1$. Pri tem je $\varphi_k^1 : U_k^1 \to \mathbb{R}^n$ lokalna karta na S^n, definirana v zgledu (5). Ni težko preveriti, da je $\{\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n \mid k = 1, 2, \ldots, n+1\}$ gladek atlas na $\mathbb{R}P^n$, s katerim $\mathbb{R}P^n$ postane mnogoterost dimenzije n. To mnogoterost imenujemo *realen projektiven prostor* dimenzije n.

Opazimo, da je $\mathbb{R}P^0$ mnogoterost z eno samo točko in da je mnogoterost $\mathbb{R}P^1$ difeomorfna 1-sferi S^1. Mnogoterost $\mathbb{R}P^2$ imenujemo tudi *projektivna ravnina*.

(7) Naj bo V realen vektorski prostor dimenzije m. Izbira baze $v_1, \ldots, v_m$ prostora V nam da linearni izomorfizem $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : \mathsf{V} \to \mathbb{R}^m$, določen z enačbo

$$x_1(v)v_1 + \cdots + x_m(v)v_m = v$$

za vsak $v \in \mathsf{V}$. Preslikava φ je lokalna karta na V in določi gladko strukturo na V. Drugačna izbira baze prostora V nam da kompatibilno lokalno karto, saj je prehodna preslikava linearna in zato gladka. To pomeni, da je gladka struktura na V neodvisna od izbire baze, in da je torej V gladka mnogoterost dimenzije m.

Vsak kompleksen vektorski prostor kompleksne dimenzije m je posebej tudi realen vektorski prostor dimenzije $2m$, torej gladka mnogoterost dimenzije $2m$.

(8) Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m z gladkim atlasom $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$ in naj bo U odprta podmnožica mnogoterosti M. Tedaj je tudi U gladka mnogoterost dimenzije m z atlasom $\{\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U} : U_\alpha \cap U \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$. Topologija mnogoterosti U je inducirana s topologijo na M.

(9) Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m z gladkim atlasom $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$ in naj bo N gladka mnogoterost dimenzije n z gladkim atlasom $\{\vartheta_\beta : V_\beta \to \mathbb{R}^n \mid \beta \in B\}$. Tedaj je kartezični produkt $M \times N$ gladka mnogoterost dimenzije $m + n$ z gladkim atlasom

$$\{\varphi_\alpha \times \vartheta_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \mid \alpha \in A,\, \beta \in B\}.$$

Odprte podmnožice mnogoterosti $M \times N$ so tiste podmnožice, ki jih lahko zapišemo kot unijo podmnožic oblike $U \times V$, kjer je U odprta podmnožica M in V odprta podmnožica N.

(10) Ker je n-torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ produkt n kopij krožnice, ki je gladka mnogoterost dimenzije 1, je T^n gladka mnogoterost dimenzije n.

Poljubna gladka mnogoterost M je *metrizabilen* prostor. To pomeni, da obstaja takšna metrika na M, da je so odprte podmnožice mnogoterosti M natanko tiste, ki jih lahko zapišemo kot unijo neke družine odprtih krogel v tej metriki. Takšna metrika na mnogoterosti ni enolično določena.

Spomnimo se, da je podmnožica $K \subset \mathbb{R}^m$ kompaktna, če je zaprta in omejena v $\mathbb{R}^m$, ali ekvivalentno, če ima vsako zaporedje točk iz K vsaj eno stekališče v K. Ta zadnji opis kompaktnosti velja tudi v poljubnem metričnem (oziroma metrizabilnem) prostoru: podmnožica K mnogoterosti M je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje točk iz K vsaj eno stekališče v K. Posebej je mnogoterost M kompaktna, če ima vsako zaporedje v njej vsaj eno stekališče. Primera kompaktne mnogoterosti sta S^n in $\mathbb{R}P^n$. Ni se težko prepričati, da je slika kompaktne množice vzdolž poljubne zvezne preslikave je spet kompaktna.

Kompaktnost podmnožice K mnogoterosti M lahko opišemo še drugače. Podmnožica K je kompaktna če, in samo če, za vsako družino $\mathcal{U}$ odprtih podmnožic mnogoterosti M, za katero je $K \subset \cup\mathcal{U}$, obstaja končno mnogo odprtih podmnožic $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$, da je $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Kompaktnost lahko preverimo tudi s pomočjo atlasa. Naj bo $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \mid \alpha \in A\}$ atlas na mnogoterosti M. Tedaj je $K \subset M$ kompaktna če, in samo če, lahko najdemo $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in A$ in podmnožice $K_1, \ldots, K_l \subset M$, tako da je $K = K_1 \cup \cdots \cup K_l$, $K_i \subset U_{\alpha_i}$ in da je $\varphi_{\alpha_i}(K_i)$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^m$ za vsak $i = 1, \ldots, l$.

Spomnimo se še, da je *pot* v mnogoterosti M od točke x do točke y dana z zvezno preslikavo $\gamma : [0,1] \to M$, za katero je $\gamma(0) = x$ in $\gamma(1) = y$. *Komponenta* za povezanost (s potmi) mnogoterosti M, v kateri leži točka $x \in M$, je podmnožica mnogoterosti M, ki poleg točke x vsebuje še natanko vse tiste točke, do katerih obstaja kakšna pot v M, ki se začne v točki x. Komponente mnogoterosti M so odprte in zaprte podmnožice, ki nam definirajo dekompozicijo mnogoterosti M. To dekompozicijo bomo označili z

$$\pi_0(M).$$

Elementi množice $\pi_0(M)$ so torej vse komponente mnogoterosti M, kvocientna projekcija $M \to \pi_0(M)$ pa vsaki točki x priredi komponento mnogoterosti M, ki vsebuje točko x. Zaradi 2-števnosti ima vsaka mnogoterost le števno mnogo komponent. Mnogoterost M je *povezana*, če ima največ eno komponento, oziroma če za poljubni dve točki iz M lahko najdemo pot v M med njima.

1.2.3. Gladke preslikave. Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m. Realna funkcija $f : M \to \mathbb{R}$ na M je *gladka*, če je $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ gladka za vsako lokalno karto $\varphi : U \to \mathbb{R}$ na M. Če ta pogoj velja za vse lokalne karte φ iz nekega atlasa na M, potem zaradi gladke kompatibilnosti med kartami velja za vse lokalne karte na mnogoterosti M. Vsota in produkt dveh gladkih funkcij na M sta spet gladki funkciji na M. Odtod sledi, da je množica vse takšnih gladkih funkcij, ki jo označimo s

$$C^\infty(M),$$

realen vektorski prostor (za seštevanje funkcij in množenje funkcij z realnimi števili) ter komutativna asociativna algebra (za dodatno operacijo množenja po točkah).

Naj bo $f \in C^\infty(M)$. *Nosilec* funkcije f je podmnožica

$$\mathrm{supp}(f) \subset M,$$

definirana kot najmanjša zaprta podmnožica mnogoterosti M, ki vsebuje vse točke, v katerih je f neničelna. Drugače povedano, točka $x \in M$ ni v množici $\mathrm{supp}(f)$ če, in samo če, obstaja odprta okolica U točke x v M, da je $f(y) = 0$ v vsaki točki $y \in U$. Množico vseh gladkih realnih funkcij na M, ki imajo kompakten nosilec, označimo z

$$C_c^\infty(M).$$

Ker je vsota in produkt dveh realnih gladkih funkcij s kompaktnim nosilcem spet realna gladka funkcija s kompaktnim nosilcem, je $C_c^\infty(M)$ vektorski podprostor in podalgebra v $C^\infty(M)$.

Pomembno dejstvo o gladkih funkcijah na mnogoterosti je, da jih je veliko. Bolj natančno, naj bo x poljubna točka mnogoterosti M ter U poljubna odprta okolica točke x v M. Tedaj lahko najdemo takšno funkcijo $f \in C_c^\infty(M)$, da je $\mathrm{supp}(f) \subset U$ in $f(y) = 1$ za vse točke y iz neke okolice točke x.

Prav tako pomemben je obstoj *razčlenitve enote* na gladki mnogoterosti M: Naj bo $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ indeksirana družina odprtih podmnožic mnogoterosti M, katere unija je cel M. Tedaj obstaja indeksirana družina $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gladkih realnih nenegativnih funkcij na M, za katero velja:

(i) $\mathrm{supp}(f_\lambda) \subset U_\lambda$ za vsak $\lambda \in \Lambda$,
(ii) za vsako točko $p \in M$ lahko najdemo tako majhno okolico U točke p v M, da je $U \cap \mathrm{supp}(f_\lambda) = \emptyset$ za vse $\lambda \in \Lambda$ z izjemo končno mnogih, in
(iii) $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(p) = 1$ za vsak $p \in M$.

Obstoj takšne razčlenitve enote je pomembno tehnično orodje pri razširitvi rezultatov iz lokalnih (v lokalnih koordinatah) na globalne (na celi mnogoterosti).

Naj bo $g : N \to M$ zvezna preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava g je *gladka*, če je preslikava $\varphi \circ g \circ \vartheta^{-1} : \vartheta(g^{-1}(U)) \to \mathbb{R}^m$ gladka za vsako lokalno karto $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na mnogoterosti M in vsako lokalno karto $\vartheta : V \to \mathbb{R}^n$ na mnogoterosti N. Če ta pogoj velja za vse lokalne karte φ iz nekega atlasa na M in vse lokalne karte ϑ in nekega altasa na N, potem zaradi gladke kompatibilnosti med kartami velja za vse lokalne karte na mnogoterosti M in vse lokalne karte na mnogoterosti N. Tu smo s $\varphi \circ g \circ \vartheta^{-1}$ označili preslikavo $\varphi \circ g \circ \vartheta^{-1}|_{\vartheta(g^{-1}(U))}$, torej smo predpis zožili na množico, kjer je kompozicija definirana. Takšno okrajšavo bomo zaradi enostavnosti zapisa pogosto uporabljali. Množico vseh gladkih preslikav iz N v M bomo označili z

$$C^\infty(N, M).$$

Kompozicija gladkih preslikav je spet gladka preslikava. Preslikava med gladkimi mnogoterostimi je *difeomorfizem*, če je gladka bijekcija z gladkim inverzom. Dve mnogoterosti sta si *difeomorfni*, če obstaja kakšen difeomorfizem med njima.

ZGLED 1.18. Naj bo $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na mnogoterosti M. Tedaj je φ difeomorfizem med U in $\varphi(U)$.

1.2.4. Tangentni prostor. Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m in $p \in M$. *Derivacija* na $C^\infty(M)$ v točki p je linearna preslikava

$$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

za katero velja Leibnizova enakost

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

za vse $f, g \in C^\infty(M)$. Vse takšne derivacije sestavljajo vektorski prostor

$$T_pM,$$

ki ga imenujemo *tangentni prostor* mnogoterosti M v točki p. Izkaže se, da je ta prostor končno dimenzionalen in da je njegova dimenzija enaka m.

ZGLED 1.19. Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$ in $a \in U$. Parcialni odvod na spremenljivko r_i nam definira derivacijo $\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)_a \in T_aU$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\right)_a(f) = \frac{\partial f}{\partial r_i}(a)$$

za vsak $f \in C^\infty(U)$.

VAJA 1.20. (1) Naj bo M mnogoterost dimenzije m in v derivacija na $C^\infty(M)$ v točki $p \in M$. Velja:

(i) Če je $f \in C^\infty(M)$ konstantna funkcija, je $v(f) = 0$.

(ii) Če se funkciji $f, g \in C^\infty(M)$ ujemata na neki okolici točke p v M, potem je $v(f) = v(g)$.

(2) Naj bo U odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$ in $a \in U$.

(i) Naj bo ε tako majhno pozitivno realno število, da je odprta krogla $K(a, \varepsilon)$ s središčem v a in radijem ε cela znotraj množice U. Za poljubno funkcijo $f \in C^\infty(U)$ in za vsak $r \in K(a, \varepsilon)$ je

$$f(r) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} (r_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r_i}\big(a + t(r-a)\big) dt.$$

(ii) Za vsako derivacijo v na $C^\infty(U)$ v točki a in poljubno funkcijo $f \in C^\infty(U)$ velja

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(r_i) \frac{\partial f}{\partial r_i}(a).$$

(iii) Derivacije $\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial r_m}\right)_a$ sestavljajo bazo prostora $T_a U$.

Naj bo M mnogoterost dimenzije m. Izberimo lokalno karto $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ na M in naj bo $p \in U$. Za $i = 1, \ldots, m$ definiramo preslikavo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

s predpisom

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))$$

za vsak $f \in C^\infty(M)$. Krajše označimo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Ni težko preveriti, da je $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ derivacija na $C^\infty(M)$ v točki p. Derivacije

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$$

sestavljajo bazo tangentnega prostora $T_p M$, kar je posledica vaje 1.20 (2).

ZGLED 1.21. (1) Naj bo V realen vektorski prostor dimenzije m in $p \in \mathsf{V}$. Za vsak vektor $v \in \mathsf{V}$ je s smernim odvodom dana derivacija $(\partial_v)_p \in T_p\mathsf{V}$, torej

$$(\partial_v)_p(f) = (\partial_v f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Imamo torej naravno preslikavo $\mathsf{V} \to T_p\mathsf{V}$, $v \mapsto (\partial_v)_p$, ki je linearna. Izbira baze $v_1, \ldots, v_m$ prostora V nam da izomorfizem $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : \mathsf{V} \to \mathbb{R}^m$, določen z enačbo

$$x_1(v)v_1 + \cdots + x_m(v)v_m = v$$

za vsak $v \in \mathsf{V}$. Izomorfizem φ je lokalna karta na mnogoterosti V. Iz definicije sledi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi^{-1}(\varphi(p)+te_i)) - f(\varphi^{-1}(\varphi(p)))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv_i)-f(p)}{t} \\ &= (\partial_{v_i} f)(p).\end{aligned}$$

Naravna preslikava $\mathsf{V} \to T_p\mathsf{V}$ torej bazo $v_1,\ldots,v_m$ prostora V preslika v bazo $\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)_p,\ldots,\big(\frac{\partial}{\partial x_m}\big)_p$ prostora $T_p\mathsf{V}$, zato je izomorfizem. Inverz tega izomorfizma poljubni derivaciji $\delta \in T_p\mathsf{V}$ priredi vektor $\sum_{i=1}^m \delta(x_i)v_i$.

Glede na ta izomorfizem bomo vedno identificirali tangentni prostor $T_p\mathsf{V}$ s prostorom V.

V posebnem primeru $\mathsf{V} = \mathbb{R}^m$ torej naravno identificiramo $\mathbb{R}^m = T_a\mathbb{R}^m$, za vsak $a \in \mathbb{R}^m$. Standardnemu baznemu vektorju e_i ustreza derivacija $\big(\frac{\partial}{\partial r_i}\big)_a$. Obratno, poljubni derivaciji $\delta \in T_p\mathbb{R}^m$ ustreza vektor $(\delta(r_1),\ldots,\delta(r_n)) \in \mathbb{R}^m$, kjer so $r_1,\ldots,r_m$ standardne koordinate na $\mathbb{R}^m$.

V še bolj posebnem primeru $\mathsf{V} = \mathbb{R}$ identificiramo $\mathbb{R} = T_a\mathbb{R}$, za vsak $a \in \mathbb{R}$. V tem primeru je standardni bazni vektor e_1 kar število 1, standardno koordinato r_1 pa največkrat označimo s t. Tako število 1 ustreza derivaciji $\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)_a = \big(\frac{d}{dt}\big)_a = \frac{d}{dt}\big|_{t=a}$, obratno pa poljubni derivaciji $\delta \in T_p\mathbb{R}$ ustreza število $\delta(t) = \delta(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

(2) Naj bo M gladka mnogoterost in U odprta podmnožica mnogoterosti M. Za vsak $p \in M$ lahko naravno identificiramo prostora T_pM in T_pU z izomorfizmom $\kappa : T_pU \to T_pM$, ki je podan s predpisom $\kappa(v)(f) = v(f|_U)$, za $v \in T_pU$ in $f \in C^\infty(M)$.

Naj bo M mnogoterost dimenzije m. Naj bosta $\varphi = (x_1,\ldots,x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ in $\vartheta = (y_1,\ldots,y_m) : V \to \mathbb{R}^m$ dve lokalni karti na M in $p \in U \cap V$. Tako imamo dve bazi prostora T_pM, prvo sestavljeno iz derivacij $\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p$, $i = 1,\ldots,m$, in drugo iz derivacij $\big(\frac{\partial}{\partial y_i}\big)_p$, $i = 1,\ldots,m$. Prehodna matrika med obema bazama je ravno Jacobijeva matrika prehodne preslikave med lokalnima kartama. Res, za vsak $f \in C^\infty(M)$ namreč velja

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y_j}(p) &= \frac{\partial(f\circ\vartheta^{-1})}{\partial r_j}(\vartheta(p)) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\vartheta^{-1})}{\partial r_j}(\vartheta(p)) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p))\frac{\partial(\varphi\circ\vartheta^{-1})_i}{\partial r_j}(\vartheta(p)) \\ &= \sum_{i=1}^m \Big(\frac{\partial(x_i\circ\vartheta^{-1})}{\partial r_j}(\vartheta(p))\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p).\end{aligned}$$

Velja torej $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) = \big(d(\varphi\circ\vartheta^{-1})_{\vartheta(p)}\big)_{ij}$ in

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p.$$

1.2.5. Odvod gladke preslikave. Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostima in naj bo $q \in N$. Preslikavo

$$(dg)_q = T_q g : T_q N \to T_{g(q)} M,$$

dano s predpisom

$$(dg)_q(v)(f) = v(f \circ g)$$

za vsak $v \in T_q N$ in vsako funkcijo $f \in C^\infty(M)$, imenujemo *odvod* funkcije g v točki q. Očitno je to dobro definirana linearna preslikava, za odvod pa velja verižno pravilo: za še eno gladko preslikavo $h : M \to Q$ med gladkima mnogoterostima velja

$$d(h \circ g)_q = (dh)_{g(q)} \circ (dg)_q.$$

ZGLED 1.22. (1) Naj bo M gladka mnogoterost in $f \in C^\infty(M)$. Odvod funkcije f v točki $p \in M$ je linearna preslikava

$$(df)_p : T_p M \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Za vsak $v \in T_p M$ in vsako funkcijo $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ je $(df)_p(v)(h) = v(h \circ f)$, glede na identifikacijo $T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ pa to pomeni

$$(df)_p(v) = (df)_p(v)(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = v(f).$$

(2) Naj bo M mnogoterost in $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na M s komponentami $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$. V vsaki točki $p \in U$ je odvod preslikave φ linearna preslikava iz $T_p U \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$, a ker identificiramo $T_p U = T_p M$ in $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, je odvod torej linearna preslikava $(d\varphi)_p : T_p M \to \mathbb{R}^m$. Za vsak $v \in T_p M$ je

$$(d\varphi)_p(v) = \big((d\varphi)_p(v)(r_1), \ldots, (d\varphi)_p(v)(r_m)\big) = (v(x_1), \ldots, v(x_m)).$$

Posebej je

$$(d\varphi)_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p = e_j.$$

(3) Naj bo V odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $g \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$. Za $b \in V$ in $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ velja

$$\begin{aligned}(dg)_b\Big(\frac{\partial}{\partial r_j}\Big)_b(f) &= \frac{\partial (f \circ g)}{\partial r_j}(b) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial r_i}(g(b)) \frac{\partial g_i}{\partial r_j}(b) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial r_j}(b) \Big(\frac{\partial}{\partial r_i}\Big)_{g(b)}(f).\end{aligned}$$

Ob identifikaciji $T_b\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ in $T_{g(b)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ je torej $(dg)_b$ Jacobijeva matrika preslikave g v točki b.

(4) Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima in $q \in N$. Izberimo lokalno karto $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ na M in lokalno karto $\vartheta = (y_1, \ldots, y_n) : V \to \mathbb{R}^n$ na N tako da je $q \in V$ in $p = g(q) \in U$. Po potrebi lahko domeno V lokalne karte ϑ zmanjšamo tako, da velja $g(V) \subset U$. Z odvajanjem

gladkih preslikav v diagramu

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ {\scriptstyle\vartheta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \vartheta(V) & \xrightarrow[\varphi g \vartheta^{-1}]{} & \varphi(U) \end{array}$$

dobimo komutativen diagram linearnih preslikav:

$$\begin{array}{ccc} T_qN & \xrightarrow{(dg)_q} & T_pM \\ {\scriptstyle(d\vartheta)_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(d\varphi)_p} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[d(\varphi g \vartheta^{-1})_{\vartheta(q)}]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Z uporabo točk (2) in (3) sledi

$$\begin{aligned} (dg)_q\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_q &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\varphi g \vartheta^{-1})_i}{\partial r_j}(\vartheta(q))\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(q)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p, \end{aligned}$$

kjer smo v zadnji enakosti označili $g_i = x_i \circ g$.

(5) Naj bo $\gamma : J \to M$ gladka preslikava, definirana na odprti podmnožici realnih števil $J \subset \mathbb{R}$, in naj bo $s \in J$ ter $p = \gamma(s)$. Takšni preslikavi pravimo tudi *gladka (parametrizirana) krivulja* v M skozi p. Njen odvod v točki s nam da linearno preslikavo $(d\gamma)_s : \mathbb{R} = T_s\mathbb{R} \to T_pM$. Označimo

$$(d\gamma)_s(1) = (d\gamma)_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)_s = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\gamma(t) = \dot{\gamma}(s) \in T_pM.$$

Če izberemo lokalne koordinate $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ na M tako, da je $p \in U$, tedaj po enakosti iz (4) dobimo

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(x_i \circ \gamma)}{\partial t}(s)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_{i=1}^m \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} x_i(\gamma(t))\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p.$$

Pomembno je opaziti, da vsak tangentni vektor v na M v točki p lahko dobimo na ta način: obstaja gladka krivulja $\gamma : \mathbb{R} \to M$, za katero je $\gamma(0) = p$ in $\dot{\gamma}(0) = v$. Kot bomo videli v naslednjem zgledu, nam to lahko pomaga pri računanju odvoda.

(6) Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima in $q \in N$. Za poljuben $v \in T_qN$ izberimo gladko krivuljo $\gamma : \mathbb{R} \to N$, za katero je $\gamma(0) = q$ in $\dot{\gamma}(0) = v$. Tedaj velja

$$(dg)_q(v) = (dg)_q((d\gamma)_0(1)) = d(g \circ \gamma)_0(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(\gamma(t)).$$

(7) Naj bo M gladka mnogoterost, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na M in $p \in U$. Za poljuben $j = 1, \ldots, m$ je s predpisom

$$\gamma_j(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j)$$

definirana gladka krivulja $\gamma_j : J \to M$ na neki odprti okolici J točke 0 v $\mathbb{R}$, za katero je

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_j(0) = (d\gamma)_0\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)_0 &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x_i(\gamma_j(t))\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi(p)+te_j)_i\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p.\end{aligned}$$

(8) Za poljubno linearno preslikavo $A : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ med realnima vektorskima prostoroma končne dimenzije je

$$(dA)_p = A$$

za vsak $p \in \mathsf{V}$. Res, izberimo poljuben vektor $v \in \mathsf{V}$ ter definirajmo $\gamma(t) = p+tv \in \mathsf{V}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Tako je γ gladka krivulja, za katero je $\gamma(0) = p$ in $\dot{\gamma}(0) = v$. Po enačbi iz (6) dobimo

$$\begin{aligned}(dA)_p(v) = (dA)_p(\dot{\gamma}(0)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(\gamma(t)) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{A(\gamma(t)) - A(\gamma(0))}{t} \\ &= A\Big(\lim_{t\to 0}\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}\Big) = A(v).\end{aligned}$$

(9) Naj bosta M in N mnogoterosti, $p \in M$ in $q \in N$. Označimo z $\mathrm{inc}_{M,q} : M \to M \times N$ in $\mathrm{inc}_{p,N} : N \to M \times N$ gladki preslikavi, dani z $\mathrm{inc}_{M,q}(x) = (x,q)$ in $\mathrm{inc}_{p,N}(y) = (p,y)$. Naj bosta $\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$ in $\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N$ projekciji. Vektorska prostora $T_pM \times T_qN$ in $T_{(p,q)}(M \times N)$ imata enaki dimenziji. Linearna preslikava $T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$, $(v,w) \mapsto d(\mathrm{inc}_{M,q})_p(v) + d(\mathrm{inc}_{p,N})_q(w)$, je izomorfizem vektorskih prostorov, z inverzom $u \mapsto (d(\mathrm{pr}_1)_{(p,q)}(u), d(\mathrm{pr}_2)_{(p,q)}(u))$. Preko tega izomorfizma naravno identificiramo tangentni prostor $T_{(p,q)}(M \times N)$ s produktom tangentnih prostorov $T_pM \times T_qN$.

Posebej to pomeni, da za poljubno funkcijo $f \in C^\infty(M \times N)$ ter vsak par $(v,w) \in T_pM \times T_qN = T_{(p,q)}(M \times N)$ izračunamo

$$(v,w)(f) = v(f \circ \mathrm{inc}_{M,q}) + w(f \circ \mathrm{inc}_{p,N}).$$

Splošneje, če je $g : M \times N \to Q$ gladka preslikava med mnogoterostima, potem za poljubno funkcijo $h \in C^\infty(Q)$ velja

$$\begin{aligned}dg_{(p,q)}(v,w)(h) &= (v,w)(h \circ g) = v(h \circ g \circ \mathrm{inc}_{M,q}) + w(h \circ g \circ \mathrm{inc}_{p,N}) \\ &= d(g \circ \mathrm{inc}_{M,q})_p(v)(h) + d(g \circ \mathrm{inc}_{p,N})_q(w)(h),\end{aligned}$$

zato torej

$$dg_{(p,q)}(v,w) = d(g \circ \mathrm{inc}_{M,q})_p(v) + d(g \circ \mathrm{inc}_{p,N})_q(w).$$

Če je $\gamma : \mathbb{R} \to M$ gladka krivulja v M, $\gamma(0) = p$, in $\zeta : \mathbb{R} \to N$ gladka krivulja v N, $\zeta(0) = q$, potem je

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(\gamma(t),\zeta(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(\gamma(t),q) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(p,\zeta(t)).$$

1.2.6. Submerzije, imerzije in podmnogoterosti. Izrek o inverzni funkciji je lokalen rezultat, zato velja tudi za preslikave med mnogoterostimi, in sicer v naslednji obliki:

TRDITEV 1.23 (Izrek o inverzni funkciji). *Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima in $q \in N$. Če je odvod $(dg)_q$ izomorfizem, potem obstaja takšna odprta podmnožica U mnogoterosti N, da je $q \in U$, da je $g(U)$ odprta podmnožica mnogoterosti M in da je*

$$g|_U : U \to g(U)$$

difeomorfizem.

Odvod gladke preslikave med mnogoterostima v neki točki je seveda lahko izomorfizem le pod pogojem, da je sta dimenziji mnogoterosti enaki. Gladki preslikavi $g : N \to M$ med mnogoterostima, katere odvod $(dg)_q$ je izomorfizem v vsaki točki $q \in N$, pravimo *lokalni difeomorfizem.* Iz verižnega pravila sledi, da je vsak difeomorfizem tudi lokalni difeomorfizem. Preprost primer lokalnega difeomorfizma, ki ni difeomorfizem, je preslikava $\mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$.

Gladka preslikava $g : N \to M$ med mnogoterostima je *submerzija v točki* $q \in N$, če je odvod $(dg)_q$ surjektiven. Preslikava g je *submerzija*, če je submerzija v vsaki točki $q \in N$. Preprost primer submerzije je projekcija

$$\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m,$$

ki je dana s predpisom $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$. Izrek o implicitni funkciji pove, da je lokalno vsaka submerzija te oblike:

TRDITEV 1.24 (Normalna forma submerzije). *Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima, ki je submerzija v točki $q \in N$. Tedaj obstajata takšni lokalni karti $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na M in $\vartheta : V \to \mathbb{R}^n$ na N, da je $q \in V$, $g(V) = U$ in da komutira diagram:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "g|_V"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

KOMENTAR 1.25. Komutativnost zgornjega diagrama v standardnih koordinatah pomeni $(\varphi \circ g \circ \vartheta^{-1})(r_1, \ldots, r_m, \ldots, r_n) = (r_1, \ldots, r_m)$.

Gladka preslikava $g : N \to M$ med mnogoterostima je *imerzija v točki* $q \in N$, če je odvod $(dg)_q$ injektiven. Preslikava g je *imerzija*, če je imerzija v vsaki točki $q \in N$. Preprost primer imerzije je inkluzija

$$\mathrm{inc}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

ki je dana s predpisom $\mathrm{inc}_1(x) = (x, 0)$. Vsaka imerzija je lokalno te oblike:

TRDITEV 1.26 (Normalna forma imerzije). *Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima, ki je imerzija v točki $q \in N$. Tedaj obstajata takšni lokalni karti $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na M in $\vartheta : V \to \mathbb{R}^n$ na N, da je $q \in V$, $g(V) \subset U$, da je*

$\varphi(U) = \vartheta(V) \times W$ *za neko odprto podmnožico* W *v* $\mathbb{R}^{m-n}$ *in da komutira diagram:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "g|_V"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{inc}_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \end{tikzcd}$$

Komentar 1.27. Komutativnost zgornjega diagrama v standardnih koordinatah pomeni $(\varphi \circ g \circ \vartheta^{-1})(r_1, \ldots, r_n) = (r_1, \ldots, r_n, 0, \ldots, 0)$. Tudi ta trditev sledi direktno iz izreka o inverzni funkciji: ker je rezultat lokalen, lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $N = \mathbb{R}^n$ in $M = \mathbb{R}^m$, nato pa uporabimo izrek o inverzni funkciji za preslikavo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $(x, y) \mapsto g(x) + (0, y)$.

Naj bosta M in N mnogoterosti in naj bo hkrati N podmnožica množice M. Inkluzijo množice N v množico M označimo z $\mathrm{inc} : N \to M$.

Mnogoterost N je *imerzirana podmnogoterost* (ali na kratko *podmnogoterost*) mnogoterosti M, če je $\mathrm{inc} : N \to M$ imerzija.

Mnogoterost N je *vložena podmnogoterost* mnogoterosti M, če je $\mathrm{inc} : N \to M$ imerzija in se topologija mnogoterosti N ujema s topologijo na množici N, ki je inducirana s topologijo na M. Ekvivalentno, mnogoterost N je vložena podmnogoterost mnogoterosti M če, in samo če, je $\mathrm{inc} : N \to M$ imerzija in za vsak $q \in N$ obstaja takšna lokalna karta $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na M, da je $q \in U$ in velja

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Mnogoterost N je *zaprta vložena podmnogoterost* mnogoterosti M, če je N vložena podmnogoterost in hkrati zaprta podmnožica mnogoterosti M. Vsaka kompaktna imerzirana podmnogoterost mnogoterosti M je avtomatično tudi zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti M.

Zgled 1.28. (1) Vsaka injektivna imerzija $g : N \to M$ med poljubnima mnogoterostima nam da imerzirano podmnogoterost $g(N)$ mnogoterosti M, s tem da na množici $g(N)$ vzamemo gladko strukturo, ki jo dobimo iz gladke strukture na N preko bijekcije $g : N \to g(N)$ (ta bijekcija je torej difeomorfizem). Iz tega razloga včasih kar injektivno imerzijo samo imenujemo imerzirana podmnogoterost.

(2) Naj bo $g : \mathbb{R} \to T^2$ gladka krivulja v 2-torusu, dana s predpisom

$$g(t) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} r t}) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

kjer je r realna konstanta.

Če število r ni racionalno, je g injektivna imerzija in je torej $g(\mathbb{R})$ imerzirana podmnogoterost v T^2. Ta imerzirana podmnogoterost ni vložena.

Če je r racionalno število, potem ima $g(\mathbb{R})$ strukturo gladke mnogoterosti, določeno s pogojem, da je $g : \mathbb{R} \to g(\mathbb{R})$ lokalni difeomorfizem. V tem primeru je $g(\mathbb{R})$ zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti T^2, ki je difeomorfna S^1.

(3) Vsaka odprta podmnožica mnogoterosti je vložena podmnogoterost.

Vaja 1.29. Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima, naj bo L imerzirana podmnogoterost mnogoterosti M, naj bo Q imerzirana podmnogoterost mnogoterosti N in naj velja $g(Q) \subset L$. Če je preslikava $g|_Q : Q \to L$ zvezna kot preslikava v mnogoterost L, potem je preslikava $g|_Q : Q \to L$ gladka. Če je L vložena podmnogoterost mnogoterosti M, potem je preslikava $g|_Q : Q \to L$ gladka.

Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima. Točka $p \in M$ je *regularna vrednost* preslikave g, če je g submerzija v vsaki točki $q \in g^{-1}(\{p\})$. Točke iz M, ki niso regularne vrednosti preslikave g, imenujemo *kritične vrednosti* preslikave g.

Iz normalne forme za submerzijo sledi:

TRDITEV 1.30. *Naj bo $p \in M$ regularna vrednost gladke preslikave $g : N \to M$ med mnogoterostima. Tedaj ima vlakno*

$$N_p = g^{-1}(\{p\}) \subset N$$

naravno strukturo zaprte vložene podmnogoterosti mnogoterosti N, pri čemer je $\dim N_p = \dim N - \dim M$.

1.2.7. Tangentni sveženj in vektorska polja. Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m. *Vektorski sveženj* ranga k nad M je surjektivna gladka preslikava $\pi : E \to M$ med mnogoterostima, pri kateri je vsako vlakno $\pi^{-1}(\{p\})$ nad poljubno točko $p \in M$ opremljeno s strukturo realnega vektorskega prostora dimenzije k, tako da za vsako točko $q \in M$ obstaja odprta okolica U točke q v M ter difeomorfizem

$$\eta : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$

za katerega velja:

(i) $\mathrm{pr}_1 \circ \eta = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, in
(ii) preslikava $\eta|_{\pi^{-1}(\{p\})} : \pi^{-1}(\{p\}) \to \{p\} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$ je linearna za vsak $p \in U$.

Vektorski sveženj $\pi : E \to M$ običajno na kratko označimo z E, njegovo vlakno $\pi^{-1}(\{p\})$ nad točko $p \in M$ pa z E_p. Iz definicije vektorskega svežnja direktno sledi, da je preslikava π submerzija in da je preslikava $\eta_p = \eta|_{E_p} : E_p \to \mathbb{R}^k$ izomorfizem vektorskih prostorov. Preslikavo η imenujemo *sveženjska karta* na E.

KOMENTAR 1.31. V resnici smo pravkar definirali *realne* vektorske svežnje. Povsem analogno bi lahko definirali tudi kompleksne vektorske svežnje.

Naj bo $\pi_E : E \to M$ vektorski sveženj nad M ter $\pi_F : F \to N$ vektorski sveženj nad N. Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava. *Morfizem vektorskih svežnjev* nad g iz F v E je takšna gladka preslikava $\xi : F \to E$, da je $g \circ \pi_F = \pi_E \circ \xi$ in da je zožitev $\xi_q = \xi|_{F_q}$ linearna preslikava iz vlakna F_q v vlakno $E_{g(q)}$, za vsak $q \in N$. Takšen morfizem je *izomorfizem vektorskih svežnjev*, če sta g in ξ difeomorfizma. Morfizmom (oziroma izomorfizmom) vektorskih svežnjev nad id_M pravimo tudi morfizmi (oziroma izomorfizmi) vektorskih svežnjev nad M.

Primer vektorskega svežnja ranga k nad M je seveda projekcija $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^k \to M$. Vektorski sveženj E ranga k nad M je *trivialen*, če obstaja izomorfizem svežnjev nad M med E in $M \times \mathbb{R}^k$.

Za vektorski sveženj $\pi : E \to M$ in odprto podmnožico $U \subset M$ označimo $E|_U = \pi^{-1}(U)$. Pri tem je $\pi|_{(E|_U)} : E|_U \to U$ spet vektorski sveženj, ki ima enak rang kot vektorski sveženj E. Inkluzija $E|_U \to E$ je primer morfizma svežnjev nad inkluzijo $U \to M$. Iz definicije vektorskega svežnja sledi, da ima vsaka točka $p \in M$ takšno odprto okolico v M, da je vektorski sveženj $E|_U$ trivialen; izomorfizem s trivialnim svežnjem je dan s sveženjsko karto. Tej lastnosti pravimo *lokalna trivialnost* vektorskih svežnjev.

Gladek prerez vektorskega svežnja $\pi : E \to M$ je gladka preslikava $\sigma : M \to E$, za katero je $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Množica $\Gamma^\infty(E)$ vseh takšnih prerezov je realen vektorski prostor za operaciji $(\sigma+\tau)(p)=\sigma(p)+\tau(p)$ in $(r\sigma)(p)=r\sigma(p)$ za $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(E)$ in $r\in\mathbb{R}$. Poleg tega je za $f\in C^\infty(M)$ definiran tudi produkt $f\sigma\in\Gamma^\infty(E)$ s predpisom $(f\sigma)(p)=f(p)\sigma(p)$. Ker za vse $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(E)$ in $f,g\in C^\infty(M)$ velja $f(\sigma+\tau)=f\sigma+f\tau$, $(f+g)\sigma=f\sigma+g\sigma$, $(fg)\sigma=f(g\sigma)$ in $1\sigma=\sigma$, je vektorski prostor $\Gamma^\infty(E)$ *(levi) modul* nad $C^\infty(M)$.

Ogrodje vektorskega svežnja E nad M ranga k je takšna urejena k-terica gladkih prerezov $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ svežnja E, da je $(\sigma_1(p),\dots,\sigma_k(p))$ baza vektorskega prostora E_p za vsak $p\in M$. Takšno ogrodje določi izomorfizem vektorskih svežnjev $\eta:E\to M\times\mathbb{R}^k$ nad M, tako da je

$$\eta^{-1}(p,(r_1,\dots,r_k))=r_1\sigma_1(p)+\cdots+r_k\sigma_k(p).$$

Sveženj E ima torej kakšno ogrodje če, in samo če, je trivialen.

Komentar 1.32. Vektorski sveženj E nad M ima vedno lokalna ogrodja, torej ogrodja svežnja $E|_U$, kadar je U takšna odprta podmnožica mnogoterosti M, da je $E|_U$ trivialen. Če je $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ ogrodje gladkih prerezov svežnja $E|_U$, potem lahko poljuben gladek prerez σ svežnja $E|_U$ na en sam zapišemo kot

$$\sigma=\sum_{i=1}^k f_i\sigma_i,$$

kjer so $f_1,\dots,f_k\in C^\infty(U)$.

Oglejmo si zdaj za nas najpomembnejši zgled vektorskega svežnja, tangentni sveženj mnogoterosti M. Dobimo ga kot disjunktno unijo vseh tangentnih prostorov dane mnogoterosti M, torej

$$TM=\coprod_{p\in M}T_pM=\bigcup_{p\in M}\big(\{p\}\times T_pM\big).$$

Preslikavo $\pi:TM\to M$ definiramo s predpisom

$$\pi(p,v)=p.$$

Ker za različni točki $p,q\in M$ velja $T_pM\cap T_qM=\{0\}$, bomo poljuben element $(p,v)\in TM$ pogosto označili kar z v. Vlakno $\pi^{-1}(p)=\{p\}\times T_pM$ tako identificiramo s tangentnim prostorom T_pM, zato so vlakna preslikave π realni vektorski prostori dimenzije $m=\dim M$. Na množici TM pa definiramo tudi gladko strukturo na naslednji način: Za atlas $\{\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^m\mid\alpha\in A\}$ na M definiramo

$$\vartheta_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$$

s predpisom

$$\vartheta_\alpha(p,v)=(\varphi_\alpha(p),(d\varphi_\alpha)_p(v)).$$

S tem dobimo gladek atlas $\{\vartheta_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\mid\alpha\in A\}$ na TM, za katerega so prehodne preslikave podane s predpisom

$$\vartheta_{\beta\alpha}(a,b)=(\varphi_{\beta\alpha}(a),(d\varphi_{\beta\alpha})_a(b))$$

in so zato res gladke. S tem atlasom postane TM gladka mnogoterost dimenzije $2m$ in $\pi:TM\to M$ vektorski sveženj, saj imamo nad U_α sveženjsko karto

$$\eta_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^m,\qquad(p,v)\mapsto(p,(d\varphi_\alpha)_p(v)).$$

Tako dobljen vektorski sveženj $\pi:TM\to M$ nad M ranga m imenujemo *tangentni sveženj* mnogoterosti M.

Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima. Definiramo preslikavo $dg = Tg : TN \to TM$ s predpisom

$$dg(q, w) = dg(w) = (dg)_q(w)$$

za vsak $q \in N$ in $w \in T_qN$. Preslikavo dg imenujemo *odvod* preslikave g. Ni težko preveriti, da je dg gladka preslikava in morfizem vektorskih svežnjev nad g iz TN v TM.

Gladek prerez tangentnega svežnja TM mnogoterosti M imenujemo *(gladko) vektorsko polje* na M. Vektorsko polje X na M je torej gladka preslikava $M \to TM$, $p \mapsto (p, X_p)$, ki vsaki točki $p \in M$ priredi tangentni vektor $X_p \in T_pM$. Vektorski prostor vseh vektorskih polj na M označimo

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM).$$

Produkt vektorskega polja $X \in \mathfrak{X}(M)$ s funkcijo $f \in C^\infty(M)$, ki vektorskemu prostoru $\mathfrak{X}(M)$ da strukturo modula nad $C^\infty(M)$, je dan s predpisom

$$(fX)_p = f(p)X_p$$

za vsak $p \in M$. Vendar pa funkcijo f lahko tudi odvajamo v smeri vektorskega polja X: dobimo novo gladko funkcijo $X(f) \in C^\infty(M)$,

$$X(f)(p) = X_p(f) = (df)_p(X_p).$$

Tako je $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto X(f)$, *derivacija* na $C^\infty(M)$, torej linearna preslikava, ki zadošča Leibnizovemu pravilu

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

za vse $f, g \in C^\infty(M)$. Obratno, vsaka derivacija na $C^\infty(M)$ predstavlja natanko določeno vektorsko polje na M. Opazimo lahko, da velja $(gX)(f) = gX(f)$.

Zgled 1.33. Naj bo $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m) : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na mnogoterosti M. Za vsak $i = 1, \ldots, m$ je tedaj $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vektorsko polje na U_α, ki vsaki točki $p \in U_\alpha$ priredi tangentni vektor $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pU_\alpha = T_pM$. Ob tem velja

$$\eta_\alpha\Big(p, \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big) = (p, e_i),$$

kjer je e_i i-ti standardni bazni vektor prostora $\mathbb{R}^m$. Vektorska polja

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

sestavljajo ogrodje svežnja $TM|_{U_\alpha}$. Za vsak $X \in \mathfrak{X}(M)$ lahko na en sam način zapišemo

$$X|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

kjer so $a_1, \ldots, a_m \in C^\infty(U_\alpha)$. Za poljubno gladko funkcijo $f \in C^\infty(M)$ velja

$$(fX)|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m f a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ter

$$X(f)|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

1.2.8. Liejev oklepaj vektorskih polj. Imamo pa še eno pomembno operacijo na $\mathfrak{X}(M)$. Dve vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ kot derivaciji lahko komponiramo in s tem dobimo linearno preslikavo $XY : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, ki v splošnem ni derivacija. Izkaže pa se, da s komutatorjem $[X, Y] = XY - YX$ dobimo novo derivacijo na $C^\infty(M)$. To pomeni, da je komutator $[X, Y]$ spet vektorsko polje na M. Vektorsko polje $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ imenujemo *Liejev oklepaj* vektorskih polj X in Y. Za poljubno funkcijo $f \in C^\infty(M)$ je torej

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

oziroma

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

za vsak $p \in M$. Vektorski polji X in Y *komutirata*, če je $[X, Y] = 0$.

KOMENTAR 1.34. To, da je $[X, Y]$ derivacija, vidimo iz enakosti

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\
&= X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) \\
&\quad - Y(X(f))g - X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - fY(X(g)) \\
&= [X, Y](f)g + f[X, Y](g),
\end{aligned}$$

ki velja za vse $f, g \in C^\infty(M)$.

Direktno iz definicije izpeljemo še nekaj pomembnih lastnosti Liejevega oklepaja na $\mathfrak{X}(M)$: Liejev oklepaj je antisimetričen, torej

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

je bilinearen nad $\mathbb{R}$, torej

$$[rX + sZ, Y] = r[X, Y] + s[Z, Y]$$

ter

$$[X, rY + sZ] = r[X, Y] + s[X, Z],$$

in zadošča *Jacobijevi identiteti*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

za vse $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ in $r, s \in \mathbb{R}$. Zaradi teh lastnosti pravimo, da je $\mathfrak{X}(M)$ *Liejeva algebra* nad $\mathbb{R}$.

Poleg tega velja tudi *Leibnizova identiteta*

$$[X, hY] = h[X, Y] + X(h)Y$$

za vse $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ in $h \in C^\infty(M)$.

KOMENTAR 1.35. Leibnizovo identiteto izpeljemo spet direktno iz definicije:

$$\begin{aligned}
[X, hY](f) &= X(hY(f)) - hY(X(f)) \\
&= X(h)Y(f) + hX(Y(f)) - hY(X(f)) \\
&= h[X, Y](f) + X(h)Y(f).
\end{aligned}$$

Z uporabo Liebnizove identitete ter antisimetričnosti lahko takoj izpeljemo tudi enakost

$$[gX, hY] = gh[X, Y] + gX(h)Y - hY(g)X,$$

ki velja za vse $g, h \in C^\infty(M)$ in vse $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

VAJA 1.36. Naj bo $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima. Njen odvod $dg : TN \to TM$ je morfizem vektorskih svežnjev nad g. Vektorski polji $X \in \mathfrak{X}(M)$ in $Y \in \mathfrak{X}(N)$ sta v *g-relaciji*, če velja $(dg) \circ Y = X \circ g$.

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r, "dg"] \arrow[d, shift left] & TM \arrow[d, shift right] \\ N \arrow[r, "g"] \arrow[u, shift left, "Y"] & M \arrow[u, shift right, "X"'] \end{tikzcd}$$

Če je $X \in \mathfrak{X}(M)$ v g-relaciji z $Y \in \mathfrak{X}(N)$ in $Z \in \mathfrak{X}(M)$ v g-relaciji z $W \in \mathfrak{X}(N)$, potem je $[X, Z]$ v g-relaciji z $[Y, W]$.

Naj bo $g : N \to M$ difeomorfizem med mnogoterostima. Tedaj g inducira linearno preslikavo

$$g_* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$$

s predpisom $g_*(Y) = g_*Y = (dg) \circ Y \circ g^{-1}$, oziroma

$$(g_*Y)_p = (dg)(Y_{g^{-1}(p)})$$

za vsak $p \in M$. Iz vaje 1.36 sledi, da za poljubna $Y, W \in \mathfrak{X}(N)$ velja

$$g_*[Y, W] = [g_*Y, g_*W].$$

Zaradi teh lastnosti je g_* *izomorfizem Liejevih algeber*.

Če je $g : V \to M$ gladka preslikava, definirana na odprti podmnožici V mnogoterosti N, tako da je slika $g(V)$ odprta podmnožica mnogoterosti M in je $g : V \to g(V)$ difeomorfizem, potem dobimo izomorfizem $g_* : \mathfrak{X}(V) \to \mathfrak{X}(g(V))$. V tem primeru za vsak $Y \in \mathfrak{X}(N)$ na kratko označimo $g_*Y = g_*(Y|_V) \in \mathfrak{X}(g(V))$.

Naj bo $g : V \to U$ difeomorfizem med odprtima podmnožicama mnogoterosti M. Vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(M)$ je *g-invariantno*, če velja $(g_*X)_p = X_p$ za vsak $p \in U$.

ZGLED 1.37. (1) Naj bo $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m) : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ lokalna karta na mnogoterosti M. Poljubni vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ v koordinatah zapišemo na en sam način kot

$$X|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

in

$$Y|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

kjer so $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in C^\infty(U_\alpha)$. Najprej opazimo, da vektorska polja $\frac{\partial}{\partial x_i}$ paroma komutirajo, kar je posledica dejstva, da vrstni red parcialnega odvajanja gladkih funkcij ni pomemben. Iz Leibnizovega pravila nato sledi:

$$[X, Y]|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m \big(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \big) \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(2) Označimo z (x, y) standardne koordinate na $\mathbb{R}^2$ in definirajmo vektorsko polje X na $\mathbb{R}^2$ s predpisom

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Eksplicitno lahko izračunamo:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, X] = \frac{\partial}{\partial y}$$
$$[\frac{\partial}{\partial y}, X] = -\frac{\partial}{\partial x}$$

Glede na identifikacijo $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ si X lahko predstavimo z gladko vektorsko funkcijo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $X(x,y) = (-y,x)$. Zanimajo nas krivulje $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ v ravnini, katerih hitrost v poljubni točki je enaka vrednosti vektorskega polja X v tej točki, torej zadoščajo sistemu diferencialnih enačb:

$$\dot{x}(t) = -y(t)$$
$$\dot{y}(t) = x(t)$$

Brez težav lahko izračunamo, da rešitve tega sistema obstajajo kot funkcije, ki so definirane za vsak t, in so poti po krožnicah:

$$x(t) = x(0)\cos(t) - y(0)\sin(t)$$
$$y(t) = x(0)\sin(t) + y(0)\cos(t)$$

Zgornji sistem diferencialnih enačb bi lahko zapisali v vektorski obliki

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t),$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitve tudi lahko napišemo v vektorski obliki

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{tA}\gamma(0),$$

kjer je

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

S predpisom $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ je dana preslikava $\zeta : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Ker velja $\zeta(0) = I$ in $\zeta(s+t) = \zeta(s)\zeta(t)$, je ζ homomorfizem grup. Vektorski prostor $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ vseh realnih matrik dimenzije 2×2 je gladka mnogoterost dimenzije 4. Grupa $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ je odprta podmnožica vektorskega prostora $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ in zato tudi gladka mnogoterost dimenzije 4, tangentni prostor mnogoterosti $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ v poljubni točki pa lahko naravno identificiramo z vektorskim prostorom $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Preslikava ζ je očitno gladka krivulja v $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, za katero velja $\dot{\zeta}(0) = A$.

1.2.9. Tok vektorskega polja. Naj bo X vektorsko polje na mnogoterosti M. Gladka krivulja $\gamma : J \to M$, definirana na odprtem intervalu $J \subset \mathbb{R}$, je *integralna krivulja* vektorskega polja X, če zanjo velja

$$\dot{\gamma}(s) = X_{\gamma(s)}$$

za vsak $s \in J$. Eksistenčni izrek za sisteme diferencialnih enačb nam zagotovi obstoj in enoličnost maksimalnih integralnih krivulj oziroma *tokovnic* vektorskega polja X:

TRDITEV 1.38. *Naj bo X vektorsko polje na mnogoterosti X. Za vsak $p \in M$ obstaja gladka krivulja*

$$\gamma_p^X : J_p^X \to M,$$

definirana na odprtem intervalu $J_p^X \subset \mathbb{R}$, za katero velja:

(i) $0 \in J_p^X$ *in* $\gamma_p^X(0) = p$,
(ii) γ_p^X *je integralna krivulja vektorskega polja X, in*
(iii) *če je $\zeta : J \to M$ poljubna integralna krivulja vektorskega polja X, definirana na odprtem intervalu $J \subset \mathbb{R}$, tako da je $0 \in J$ in $\zeta(0) = p$, potem velja $J \subset J_p^X$ in $\zeta = \gamma_p^X|_J$.*

KOMENTAR 1.39. Iz eksistenčnega izreka dobimo še nekoliko več: Označimo $D^X = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid p \in M,\ t \in J_p^X\} \subset \mathbb{R} \times M$ in definirajmo $\Phi^X : D^X \to M$ s predpisom

$$\Phi^X(t, p) = \gamma_p^X(t).$$

Za vsak $t \in \mathbb{R}$ označimo še $D_t^X = \{p \in M \mid t \in J_p^X\} \subset M$ in $\Phi_t^X : D_t^X \to M$, $\Phi_t^X(p) = \Phi^X(t, p)$. Tedaj velja:

(1) $\{0\} \times M \subset D^X$ in D^X je odprta podmnožica v $\mathbb{R} \times M$. Posebej za vsak $p \in M$ obstaja takšna odprta okolica U točke p v M in tako majhen $\varepsilon > 0$, da je $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subset D^X$.
(2) $\Phi^X : D^X \to M$ je gladka preslikava.
(3) D_t^X je odprta v M, za vsak $t \in \mathbb{R}$.
(4) $\Phi_t^X(D_t^X) = D_{-t}^X$ in $\Phi_t^X : D_t^X \to D_{-t}^X$ je difeomorfizem z inverzom Φ_{-t}^X, za vsak $t \in \mathbb{R}$.
(5) $\Phi_0^X = \mathrm{id}_M$.
(6) $\Phi_s^X(\Phi_t^X(p)) = \Phi_{s+t}^X(p)$ za vse $s, t \in \mathbb{R}$ in za vse $p \in M$, za katere je kompozicija $\Phi_s^X(\Phi_t^X(p))$ definirana. Če sta s in t istega predznaka, potem je ta kompozicije definirana za vse točke $p \in D_{s+t}^X$.

Preslikavi Φ^X oziroma družini difeomorfizmov (Φ_t^X) pravimo tudi *tok* vektorskega polja X. Vektorsko polje X je določeno s svojim tokom z enačbo

$$X_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^X(p).$$

Vektorsko polje X je *kompletno*, če je $D^X = \mathbb{R} \times M$. V tem primeru velja tudi $D_t^X = M$, difeomorfizmi $\Phi_t^X : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$, pa sestavljajo grupo za kompozicijo. Preslikavi $\Phi^X : \mathbb{R} \times M \to M$ tedaj pravimo *enoparametrična grupa difeomorfizmov* mnogoterosti M.

TRDITEV 1.40. *Vsako vektorsko polje na kompaktni mnogoterosti je kompletno.*

VAJA 1.41. (1) Vsako vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(M)$ na gladki mnogoterosti M je Φ_t^X-invariantno, za vsak $t \in \mathbb{R}$.

(2) Za poljuben difeomorfizem $g : N \to M$ med mnogoterostima in za vsak $Y \in \mathfrak{X}(N)$ velja $g(D_t^Y) = D_t^{g_*Y}$ in $g \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^{g_*Y} \circ g|_{D_t^Y}$, za vse $t \in \mathbb{R}$.

(3) Naj bo U odprta podmnožica mnogoterosti M in naj bo $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ zožitev vektorskega polja $X \in \mathfrak{X}(M)$ na U. Tedaj je $D^{X|_U} \subset D^X \cap (\mathbb{R} \times U)$ in velja $\Phi^{X|_U} = \Phi^X|_{D^{X|_U}}$. Če primerno izberemo U, se lahko zgodi, da $D^{X|_U} \neq D^X \cap (\mathbb{R} \times U)$.

Z uporabo zgornje vaje (2) direktno dobimo naslednjo karakterizacijo invariantnosti vektorskega polja s pomočjo toka tega polja:

Trditev 1.42. *Naj bo $g : V \to U$ difeomorfizem med odprtima podmnožicama mnogoterosti M in naj bo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Vektorsko polje X je g-invariantno če, in samo če, za vsak $p \in V$ obstaja odprta okolica $W \subset V$ točke p in tako majhen $\varepsilon > 0$, da sta kompoziciji $g(\Phi_t^X(q))$ in $\Phi_t^X(g(q))$ definirani in enaki za vse $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ in vse $q \in W$.*

Komentar 1.43. Če je v zgornji trditvi $U = V = M$ in je X kompletno g-invariantno vektorsko polje, potem v resnici velja enakost $g \circ \Phi_t^X = \Phi_t^X \circ g$ na celi mnogoterosti M in za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Za poljubno vektorsko polje X na mnogoterosti M lahko smerni odvod $X_p(f)$ funkcije $f \in C^\infty(M)$ v točki $p \in M$ izračunamo kot odvod funkcije f vzdolž integralne krivulje vektorskega polja X,

$$X_p(f) = (df)(X_p) = (df)\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^X(p)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\Phi_t^X(p)).$$

Podobno pa lahko Liejev oklepaj vektorskih polj Y in X izračunamo kot odvod vektorskega polja Y vzdolž integralne krivulje vektorskega polja X:

Trditev 1.44. *Naj bo M gladka mnogoterost in $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Tedaj za vsak $p \in M$ velja*

$$[X,Y]_p = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\Phi_t^X)_* Y\big)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_p - ((\Phi_t^X)_* Y)_p\Big).$$

Komentar 1.45. Enakost pokažemo tako, da za izbrano funkcijo $f \in C^\infty(M)$ najdemo majhno okolico W točke p v M, majhen $\varepsilon > 0$ in takšno gladko funkcijo $g \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times W)$, da za vse $q \in W$ in $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$f(\Phi_t^X(q)) = f(q) + tg(t, q)$$

in da je $g(0, q) = X_q(f)$ (ta razvoj je analogen tistemu iz vaje 1.20(2)). Označimo $g_t(q) = g(t, q)$ in izračunamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_p - ((\Phi_t^X)_* Y)_p\Big)(f) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_p(f) - ((\Phi_t^X)_* Y)_p(f)\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_p(f) - Y_{\Phi_{-t}^X(p)}(f \circ \Phi_t^X)\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_p(f) - Y_{\Phi_{-t}^X(p)}(f)\Big) - \lim_{t\to 0} Y_{\Phi_{-t}^X(p)}(g_t)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y(f)(p) - Y(f)(\Phi_{-t}^X(p))\Big) - Y_p(g_0)\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Y(f)(\Phi_s^X(p)) - Y_p(X(f))\\
&= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))
\end{aligned}$$

S substitucijo $s = -t$ dobimo še eno obliko enačbe iz trditve:

$$[X,Y]_p = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\big((\Phi_{-s}^X)_* Y\big)_p = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big(((\Phi_{-s}^X)_* Y)_p - Y_p\Big).$$

Posledica 1.46. *Naj bo M gladka mnogoterost in $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Tedaj je $[X, Y] = 0$ če, in samo če, za vsak $p \in M$ obstaja odprta okolica $W \subset M$ točke p in tako majhen $\varepsilon > 0$, da sta kompoziciji $\Phi_t^X(\Phi_s^Y(q))$ in $\Phi_s^Y(\Phi_t^X(q))$ definirani in enaki za vse $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ in vse $q \in W$.*

Komentar 1.47. Lokalno komutiranje tokov vektorskih polj sledi iz naslednje enakosti, ki velja za poljubno točko $p \in M$ in poljuben $r \in J_p^X$:

$$\begin{aligned}((\Phi_r^X)_*[X,Y])_p &= [(\Phi_r^X)_*X,(\Phi_r^X)_*Y]_p \\ &= [X,(\Phi_r^X)_*Y]_p \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\Phi_t^X)_*(\Phi_r^X)_*Y\big)_p \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\Phi_{t+r}^X)_*Y\big)_p\end{aligned}$$

Če je $[X,Y]=0$, zgornja enakost pove, da je krivulja $r \mapsto ((\Phi_r^X)_*Y)_p$ konstantna, zato velja $((\Phi_r^X)_*Y)_p = Y_p$. Prva implikacija iz trditve zdaj sledi po trditvi 1.42. Obratna implikacija v posledici sledi direktno iz trditve 1.42 in trditve 1.44.

Če sta v zgornji trditvi X in Y kompletni vektorski polji, ki komutirata, potem v resnici velja enakost $\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X$ na celi mnogoterosti M in za vse $s,t \in \mathbb{R}$.

1.2.10. Frobeniusov izrek. Naj bo $\pi : E \to M$ vektorski svežen ranga k nad mnogoterostjo M in naj bo F podmnožica mnogoterosti E, za katero je presek $F_p = F \cap E_p$ podprostor vektorskega prostora E_p, za vsak $p \in M$. Takšna podmnožica F je *podsveženj* ranga n vektorskega svežnja E, če za vsak $p \in M$ obstaja odprta okolica U točke p v M in takšni gladki prerezi $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ svežnja $E|_U$, da je $(\sigma_1(q),\ldots,\sigma_n(q))$ baza prostora F_q, za vsak $q \in U$. Posebej je torej $n \leq k$ in $\dim F_p = n$ za vsak $p \in M$.

Takšen podsveženj F je sam zase vektorski sveženj ranga n nad M: preslikava $\pi_F : F \to M$ je zožitev preslikave π na F, lokalni prerezi $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ pa nam definirajo homeomorfizem

$$\eta : \pi_F^{-1}(U) = F \cap E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$$

s predpisom

$$\eta^{-1}(q,(r_1,\ldots,r_n)) = r_1\sigma_1(q) + \cdots + r_n\sigma_n(q).$$

Podmnožica F ima naravno strukturo gladke mnogoterosti dimenzije $m+n$, za katero so vse tako dobljene preslikave η difeomorfizmi, ti difeomorfizmi pa so tudi sveženjske karte vektorskega svežnja F. Mnogoterost F je zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti E.

Zgled 1.48. Naj bo $f : M \to Q$ submerzija med mnogoterostima. Označimo $m = \dim M$, $k = \dim Q$ ter $n = m-k$, in naj bo

$$F = \ker(df) = \{v \in TM \mid (df)(v) = 0\}.$$

Ker je f submerzija, je $F_p = \ker(df)_p$ podprostor dimenzije n prostora T_pM, za vsak $p \in M$. Normalna forma submerzije nam da lokalno karto $\varphi = (x_1,\ldots,x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ na odprti okolici U točke p, za katero vektorska polja

$$\frac{\partial}{\partial x_{k+1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}$$

v vsaki točki $q \in U$ sestavljajo bazo vektorskega prostora $\ker(df)_q$. To pomeni, da je F vektorski podsveženj ranga n tangentnega svežnja TM.

Za vsak podsveženj F tangentnega svežnja TM je vektorski prostor $\Gamma^\infty(F)$ podprostor vektorskega prostora $\mathfrak{X}(M)$ vseh vektorskih polj na M. Prav tako je

$\Gamma^\infty(F)$ podmodul modula $\mathfrak{X}(M)$ nad $C^\infty(M)$: če je $f \in C^\infty(M)$ in $X \in \Gamma^\infty(F)$, je tudi $fX \in \Gamma^\infty(F)$.

Podsveženj F je *involutiven*, če za poljubna $X, Y \in \Gamma^\infty(F)$ velja $[X, Y] \in \Gamma^\infty(F)$. V tem primeru je $\Gamma^\infty(F)$ tudi *Liejeva podalgebra* Liejeve algebre $\mathfrak{X}(M)$.

ZGLED 1.49. (1) Naj bo $f : M \to Q$ submerzija med mnogoterostima. Vemo že, da je $\ker(df)$ podsveženj tangentnega svežnja TM. Ta podsveženj pa je tudi involutiven: poljubni vektorski polji $X, Y \in \Gamma^\infty(\ker(df))$ sta v f-relaciji z ničelnim vektorskim poljem na Q. Iz vaje 1.36 sledi, da je potem tudi $[X, Y]$ v f-relaciji z ničelnim vektorskim poljem na Q, to pa pomeni, da je $[X, Y] \in \Gamma^\infty(\ker(df))$.

(2) Ker je Liejev oklepaj lokalna operacija, je tudi involutivnost lokalna lastnost. S tem mislimo naslednje: za $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ očitno velja $[X|_U, Y|_U] = [X, Y]|_U$ za vsako odprto podmnožico U mnogoterosti M, zato je Liejev oklepaj lokalna operacija. Odtod sledi, da je podsveženj involutiven če, in samo če, ima vsaka točka $p \in M$ takšno odprto okolico U v M, da je podsveženj $F|_U$ tangentnega svežnja $TU = TM|_U$ involutiven.

(3) Vsak podsveženj ranga 1 tangentnega svežnja mnogoterosti je involutiven.

Naj bo M mnogoterost dimenzije m. Pravimo, da je podsveženj F ranga n tangentnega svežnja TM *integrabilen*, če za vsako točko $p \in M$ obstaja odprta okolica U točke p v M in takšna submerzija $f : U \to \mathbb{R}^{m-n}$, da je $F|_U = \ker(df)$. Očitno je vsak integrabilen podsveženj involutiven. Frobeniusov izrek pa pove, da velja tudi obratno:

TRDITEV 1.50 (Frobeniusov izrek). *Podsveženj tangentnega svežnja mnogoterosti je involutiven če, in samo če, je integrabilen.*

KOMENTAR 1.51. Integrabilnost podsvežnja F tangentnega svežnja TM lahko ekvivalentno izrazimo tudi v globalni obliki: Imerzirana podmnogoterost N mnogoterosti M je *integralna mnogoterost* podsvežnja F, če velja $T_qN = F_q$ za vsak $q \in N$. Naj bo $F \subset TM$ integrabilen podsveženj. Ni težko pokazati, da tedaj za vsako točko $p \in M$ obstaja natanko ena imerzirana podmnogoterost L_p^F mnogoterosti M, za katero velja:

(i) $p \in L_p^F$,
(ii) L_p^F je povezana integralna mnogoterost podsvežnja F, in
(iii) če je L poljubna povezana integralna mnogoterost podsvežnja F, za katero je $p \in L$, potem je L odprta podmnogoterost mnogoterosti L_p^F.

Imerzirana podmnogoterost L_p^F je torej maksimalna povezana integralna mnogoterost podsvežnja F, ki vsebuje točko p. Za različne točke $p, q \in M$ sta L_p^F in L_q^F bodisi disjunktni ali pa enaki, torej je $\mathcal{F} = \{L_p^F \mid p \in M\}$ dekompozicija mnogoterosti M na podmnogoterosti dimenzije n. Takšni dekompoziciji $\mathcal{F}$, prirejeni nekemu integrabilnemu podsvežnju $F \subset TM$, pravimo tudi *foliacija* mnogoterosti M. Podsvežnju F pravimo *tangentni sveženj* foliacije $\mathcal{F}$, maksimalnim povezanim integralnim mnogoterostim podsvežnja F pa pravimo tudi *listi* foliacije $\mathcal{F}$. Po definiciji integrabilnosti svežnja F in z uporabo izreka o normalni formi submerzije lahko najdemo altas

$$\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \mid \alpha \in A\}$$

na mnogoterosti M, ki je sestavljen iz surjektivnih lokalnih kart in za katerega je $F|_{U_\alpha} = \ker(d(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha))$. Pri tem smo s pr_2 označili projekcijo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^{m-n}$.

Za vsak $\alpha \in A$ in za vsak $b \in \mathbb{R}^{m-n}$ je tedaj

$$U_\alpha^b = \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{b\})$$

odprta podmnožica nekega lista L foliacije $\mathcal{F}$ in domena lokalne karte $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha|_{U_\alpha^b}$ na mnogoterosti L. Za poljuben list L foliacije $\mathcal{F}$ je $L \cap U_\alpha = \bigcup_{b\in B} U_\alpha^b$ za neko števno podmnožico $B \subset \mathbb{R}^{m-n}$, ki je seveda odvisna od L in od α. Dve točki $p, q \in M$ ležita na istem listu foliacije $\mathcal{F}$ če, in samo če, obstajajo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^{m-n}$ in poti $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ v M, za katere velja

(i) $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_k(1) = q$,
(ii) $\gamma_{j+1}(0) = \gamma_j(1)$ za vse $j = 1, \ldots, k-1$, in
(iii) $\gamma_j([0,1]) \subset U_{\alpha_j}^{b_j}$ za vse $j = 1, \ldots, k$.

Zgled 1.52. (1) Naj bo X vektorsko polje na mnogoterosti M in naj bo Z množica ničel vektorskega polja X. Množica $N = M \setminus Z$ je odprta v M in za vsak $p \in N$ je $\mathbb{R}X_p$ podprostor dimenzije 1 tangentnega prostora T_pM. Definirajmo podsveženj $F \subset TN$ ranga 1 s predpisom $F_p = \mathbb{R}X_p$. Vektorsko polje $X|_N$ je ogrodje podsvežnja F. Podsveženj F je involutiven in zato tudi integrabilen. Listi podsvežnja F so parametrizirani s tokovnicami vektorskega polja X.

(2) Preslikava $\phi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ naj bo dana s predpisom $\phi(x,y) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y})$. Ta preslikava je lokalni difeomorfizem in epimorfizem grup z jedrom $\mathbb{Z}^2$. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ surjektivna submerzija, $f(x,y) = -rx + y$, za neko realno konstanto r. Tedaj je $\ker(df)$ podsveženj tangentnega svežnja mnogoterosti $\mathbb{R}^2$. Ogrodje podsvežnja $\ker(df)$ je dano z brezničelnim vektorskim poljem $X = \frac{\partial}{\partial x} + r\frac{\partial}{\partial y}$. Izračunamo lahko, da je

$$\gamma_{(a,b)}^X(t) = (t, rt) + (a,b).$$

Vektorsko polje X je v ϕ-relaciji z natanko enim vektorskim poljem Y na T^2, ki je določeno s predpisom

$$(d\phi)(X_{(x,y)}) = Y_{\phi(x,y)}$$

za poljuben par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tudi vektorsko polje Y je brez ničel in je torej ogrodje nekega involutivnega podsvežnja F ranga 1 tangentnega svežnja mnogoterosti T^2. Opazimo, da je

$$\gamma_{\phi(a,b)}^Y(t) = \phi(\gamma_{(a,b)}^X(t)) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(t+a)}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(rt+b)}).$$

Listi foliacije, dane s podsvežnjem F, so enodimenzionalne imerzirane podmnogoterosti torusa T^2. Če r ni racionalen, je vsak list difeomorfen $\mathbb{R}$ in gost v T^2, kar pomeni, da seka vsako neprazno odprto podmnožico mnogoterosti T^2. To med drugim tudi pomeni, da v tem primeru F ni jedro odvoda nobene globalne submerzije $T^2 \to Q$, saj so vlakna vsake takšne submerzije zaprte vložene podmnogoterosti.

Poglavje 2

Liejeve grupe

V tem poglavju bomo predstavili osnove teorije Liejevih grup, nekatere pomembne konstrukcije ter primere Liejevih grup. Več zgledov in nadaljnje rezultate lahko študent najde v knjigah [**4, 1, 2**].

2.1. Definicija in prvi zgledi

Definicija 2.1. *Liejeva grupa* je gladka mnogoterost G, opremljena s strukturo grupe, za katero sta množenje $\mu : G \times G \to G$ in invertiranje $\iota : G \to G$ gladki preslikavi.

Komentar 2.2. Za poljubno Liejevo grupo G je invertiranje $\iota : G \to G$ difeomorfizem, saj je samo sebi inverz. Prav tako so leva translacija $\mathrm{L}_x : G \to G$, desna translacija $\mathrm{R}_x : G \to G$ in konjugiranje $\mathrm{C}_x : G \to G$ difeomorfizmi, za vsak $x \in G$.

Definicija 2.3. Liejeva grupa H je *Liejeva podgrupa* Liejeve grupe G, če je podgrupa grupe G in tudi imerzirana podmnogoterost Liejeve grupe G.

Komentar 2.4. Če je H podmnožica Liejeve grupe G, ki je podgrupa grupe G in hkrati tudi vložena podmnogoterost Liejeve grupe G, potem je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. Res, ker je H podmnogoterost mnogoterosti G, je tudi $H \times H$ podmnogoterost mnogoterosti $G \times G$, zožitev $\mu_G|_{H\times H} : H \times H \to G$ pa je gladka preslikava. Ker je $\mu_G(H \times H) \subset H$ in je H vložena podmnogoterost mnogoterosti G, je tudi množenje na H, torej $\mu_H = \mu_G|_{H\times H} : H \times H \to H$, gladka preslikava. Podobno je invertiranje ι_H na H zožitev invertiranja ι_G na vloženo podmnogoterost H mnogoterosti G in je zato gladka preslikava $\iota_H : H \to H$.

Zgled 2.5. (1) Za seštevanje je $\mathbb{R}^n$ Liejeva grupa dimenzije n. Prostor $\mathbb{C}^n$ je Liejeva grupa (realne) dimenzije $2n$, saj $\mathbb{C}^n$ kot grupo in kot gladko mnogoterost lahko identificiramo z $(\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$. Splošneje, vsak realen ali kompleksen vektorski prostor končne dimenzije je Liejeva grupa za seštevanje.

(2) Grupa $\mathbb{Z}^n$ je (diskretna) Liejeva grupa dimenzije 0. Splošneje, poljubno (števno) grupo G lahko gledamo kot Liejevo grupo dimenzije 0.

(3) Grupi $\mathbb{R}^\times$ in $\mathbb{C}^\times$ sta Liejevi grupi dimenzije 1 za množenje. Podgrupa $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^\times$ vseh pozitivnih realnih števil je prav tako Liejeva grupa dimenzije 1.

(4) Produkt $G \times H$ dveh Liejevih grup G in H je Liejeva grupa. Res, produkt $G\times H$ je grupa in gladka mnogoterost, da pa sta množenje in invertiranje na $G\times H$ gladki preslikavi vidimo iz enakosti $\mu_{G\times H}((x, y),(z, w)) = (\mu_G(x, z), \mu_H(y, w))$ in $\iota_{G\times H}(x, y) = (\iota_G(x), \iota_H(y))$.

(5) Krožnica S^1 je zaprta vložena podmnogoterost in podgrupa Liejeve grupe $\mathbb{C}^\times$, zato je S^1 Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathbb{C}^\times$.

(6) Torus T^n dimenzije n je produkt Liejevih grup $S^1 \times \cdots \times S^1$ in je zato tudi Liejeva grupa.

DEFINICIJA 2.6. Preslikava $\phi : H \to G$ med Liejevima grupama je *homomorfizem Liejevih grup*, če je homomorfizem grup in gladka preslikava. Preslikava $\phi : H \to G$ je *izomorfizem* Liejevih grup, če je izomorfizem grup in difeomorfizem. Dve Liejevi grupi sta *izomorfni*, če obstaja kakšen izomorfizem Liejevih grup med njima.

KOMENTAR 2.7. Kompozicija homomorfizmov Liejevih grup je spet homomorfizem Liejevih grup, in kompozicija izomorfizmov Liejevih grup je spet izomorfizem Liejevih grup. Monomorfizem (oziroma epimorfizem, oziroma endomorfizem) Liejevih grup je homomorfizem Liejevih grup, ki je hkrati monomorfizem (oziroma epimorfizem, oziroma endomorfizem) grup. Avtomorfizem Liejeve grupe G je avtomorfizem grupe G, ki je hkrati difeomorfizem. Množica $\mathrm{Aut}(G)$ vseh avtomorfizmov Liejeve grupe G je grupa za kompozicijo.

Če je $\phi : H \to G$ homomorfizem med Liejevima grupama, ki je tudi submerzija, potem je jedro $\ker \phi$ zaprta vložena Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe H.

2.1.1. Grupa komponent in komponenta nevtralnega elementa. Naj bo G Liejeva grupa. Kot mnogoterost G ni nujno povezana, vemo pa, da ima števno mnogo komponent za povezanost, ki so odprte podmnogoterosti v M in tvorijo dekompozicijo

$$\pi_0(G)$$

mnogoterosti G. Množico komponent $\pi_0(G)$ opremimo s strukturo mnogoterosti dimenzije 0. Mnogoterost $\pi_0(G)$ ima torej diskretno topologijo, v kateri so vse podmnožice odprte. Tako je naravna preslikava $G \to \pi_0(G)$ zvezna in gladka. Označimo z

$$G^\circ$$

tisto komponento mnogoterosti G, ki vsebuje nevtralni element e grupe G.

TRDITEV 2.8. *Naj bo G Liejeva grupa. Tedaj je G° povezana odprta Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe G in $\pi_0(G) = G/G^\circ$. Množica komponent $\pi_0(G)$ grupe G ima strukturo Liejeve grupe dimenzije 0, tako da je naravna projekcija $G \to \pi_0(G)$ epimorfizem Liejevih grup.*

DOKAZ. Najprej se prepričajmo, da je G° podgrupa grupe G. Naj bosta $x, y \in G^\circ$ in izberimo pot γ v G° od e do x ter pot ζ v G° od e do y. Tedaj je $t \mapsto \gamma(t)\zeta(t)$ pot v G od e do xy, zato je $xy \in G^\circ$. Poleg tega je $t \mapsto \gamma(t)^{-1}$ pot v G od e do x^{-1}, torej je tudi $x^{-1} \in G^\circ$. Komponenta G° je torej podgrupa grupe G.

Za vsak $z \in G$ je kompozicija $\mathrm{C}_z \circ \gamma$ pot v G od e do $\mathrm{C}_z(x)$, zato je tudi $\mathrm{C}_z(x) \in G^\circ$. To pomeni, da je G° podgrupa edinka grupe G. Ker je G° odprta v G, je tudi Liejeva podgrupa Liejeve grupe G.

Ostane nam še, da preverimo, da so komponente grupe G ravno (levi) odseki po podgrupi edinki G°. Dve točki $z, w \in G$ sta v isti komponenti za povezanost če, in samo če, obstaja pot κ v G od z do w. Če takšna pot κ obstaja, je $\mathrm{L}_{z^{-1}} \circ \kappa$ pot v G od e do $z^{-1}w$ in je zato $z^{-1}w \in G^\circ$. Obratno, če je $z^{-1}w \in G^\circ$, obstaja pot od e do $z^{-1}w$, kompozicija te poti s translacijo L_z pa je pot od z do w. $\square$

2.1.2. Splošna in specialna linearna grupa. Naj bo $\mathbb{F}$ bodisi $\mathbb{R}$ ali pa $\mathbb{C}$. Za poljubno naravno število n je množica $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ matrik dimenzije $n \times n$ s komponentami v $\mathbb{F}$ vektorski prostor končne dimenzije in zato mnogoterost. Splošna linearna grupa stopnje n nad $\mathbb{F}$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

je odprta podmnožica mnogoterosti $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Res, determinanta matrike A je polinomska in torej gladka funkcija komponent matrike A, grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ pa je enaka množici $\det^{-1}(\mathbb{F}^\times)$, torej prasliki odprte množice glede na gladko preslikavo $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$. To pomeni, da je $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ odprta podmnogoterost mnogoterosti $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Ker so komponente produkta dveh matrik polinomska funkcija komponent teh dveh matrik, je množenje v grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ gladka preslikava. Prav tako so po Cramerjevem pravilu komponente inverza matrike A racionalne funkcije komponent matrike A, zato je tudi invertiranje v $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ gladka preslikava. Zaključimo lahko, da je splošna linearna grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ Liejeva grupa. Pri tem je $\dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = n^2$ in $\dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$.

Naj bo zdaj V poljuben vektorski prostor končne dimenzije nad $\mathbb{F}$. Vektorski prostor vseh $\mathbb{F}$-linearnih endomorfizmov prostora V označimo z $\mathrm{End}(\mathsf{V}) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})$, grupo $\mathbb{F}$-linearnih avtomorfizmov prostora V pa z $\mathrm{GL}(\mathsf{V}) = \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})$. Izbira baze prostora V nam določi $\mathbb{F}$-linearna izomorfizma $\mathsf{V} \cong \mathbb{F}^n$ in $\mathrm{End}(\mathsf{V}) \cong \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Zadnji izomorfizem preslika grupo $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ na grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Posebej to pomeni, da je

$$\mathrm{GL}(\mathsf{V}) = \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})$$

Liejeva grupa, ki jo imenujemo *splošna linearna grupa* na vektorskem prostoru V. Ta Liejeva grupa je torej izomorfna Liejevi grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, vendar pa je izomorfizem odvisen od izbire baze oziroma linearnih koordinat.

Opazimo lahko, da je leva translacija L_x na Liejevi grupi $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ zožitev translacije $\mathrm{End}(\mathsf{V}) \to \mathrm{End}(\mathsf{V})$, $A \mapsto xA$, ki je linearna preslikava, za vsak $x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$. Posebej to pomeni, da je $d(\mathrm{L}_x)_y(A) = xA$ za poljubna $y \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ in $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$. Podobno velja $d(\mathrm{R}_x)_y(A) = Ax$ in $d(\mathrm{C}_x)_y(A) = xAx^{-1}$.

Determinanta $\det : \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}^\times$ je homomorfizem Liejevih grup. Ker je $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ odprta podmnožica vektorskega prostora $\mathrm{End}(\mathsf{V})$, je $T_x \mathrm{GL}(\mathsf{V}) = \mathrm{End}(\mathsf{V})$ za vsak $x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$. Odvod determinante v točki x je torej linearna preslikava

$$d(\det)_x : \mathrm{End}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}.$$

Za poljuben $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ izračunamo

$$\begin{aligned} d(\det)_{\mathrm{id}}(A) &= d(\det)_{\mathrm{id}}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mathrm{id} + tA)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(\mathrm{id} + tA) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(1 + t\,\mathrm{tr}(A) + \cdots + t^n \det(A)) = \mathrm{tr}(A). \end{aligned}$$

Splošneje, ker je determinanta homomorfizem grup, velja enakost $\det(x)^{-1} \det = \det \circ \mathrm{L}_{x^{-1}}$. Ko to enakost odvajamo v točki x, dobimo $\det(x)^{-1} d(\det)_x(A) = d(\det)_{\mathrm{id}}((d\,\mathrm{L}_{x^{-1}})_x(A)) = d(\det)_{\mathrm{id}}(x^{-1}A)$ in zato

$$d(\det)_x(A) = \det(x)\,\mathrm{tr}(x^{-1}A)$$

za vsak $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$. To posebej pomeni, da je linearna preslikava $d(\det)_x$ surjektivna za vsak x, zato je homomorfizem Liejevih grup

$$\det : \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}^\times$$

submerzija. Odtod sledi, da je jedro tega homomorfizma

$$\mathrm{SL}(\mathsf{V}) = \mathrm{SL}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V}) = \{x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \mid \det(x) = 1\}$$

zaprta vložena Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$. Liejevo grupo $\mathrm{SL}(\mathsf{V})$ imenujemo *specialna linearna grupa* na vektorskem prostoru V. Če je V realen vektorski prostor dimenzije n, je $\dim \mathrm{SL}(\mathsf{V}) = n^2 - 1$. Če je V kompleksen vektorski prostor kompleksne dimenzije n, je $\dim \mathrm{SL}(\mathsf{V}) = 2(n^2-1)$. Posebej označimo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$.

2.1.3. Ortogonalna grupa. Ortogonalne matrike dimenzije $n\times n$ sestavljajo podgrupo grupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,

$$\mathrm{O}(n) = \{x \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid x^T x = I\} < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

Označimo z $\mathcal{S}$ vektorski prostor vseh simetričnih realnih metrik dimenzije $n\times n$. Posebej je $\mathcal{S}$ mnogoterost dimenzije $n(n{+}1)/2$. Naj bo $\phi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}$ preslikava, dana s predpisom

$$\phi(x) = x^T x.$$

To je očitno gladka preslikava, njen odvod v poljubni točki $x\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ pa je linearna preslikava $(d\phi)_x : \mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}$. Za poljuben $A \in \mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$ velja

$$\begin{aligned}(d\phi)_x(A) &= (d\phi)_x\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x+tA)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi(x+tA)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x+tA)^T(x+tA)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x^Tx + tx^TA + tA^Tx + t^2A^TA)\\ &= x^TA + A^Tx.\end{aligned}$$

Odtod med drugim sledi, da je $(d\phi)_x$ surjektivna preslikava, saj za poljubno simetrično matriko $S\in\mathcal{S}$ velja

$$2S = S + S^T = x^T\big((x^T)^{-1}S\big) + \big((x^T)^{-1}S\big)^T x,$$

torej je $S = (d\phi)_x\big(\frac{1}{2}(x^T)^{-1}S\big)$. Preslikava ϕ je torej submerzija, zato je $\mathrm{O}(n) = \phi^{-1}(I)$ zaprta vložena podmnogoterost v $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Zaključimo lahko, da je $\mathrm{O}(n)$ res Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, ki jo imenujemo *ortogonalna grupa* stopnje n. Liejeva grupa $\mathrm{O}(n)$ je kompaktna, njena dimenzija je $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Determinanta poljubne ortogonalne matrike je 1 ali -1. To pomeni, da jedro homomorfizma $\det : \mathrm{O}(n) \to \{-1,1\} < \mathbb{R}^\times$ odprta in zaprta Liejeva podgrupa edinka grupe $\mathrm{O}(n)$, ki jo označimo z

$$\mathrm{SO}(n) = \{x\in \mathrm{O}(n) \mid \det(x) = 1\}$$

in imenujemo *specialna ortogonalna grupa* stopnje n.

Vaja 2.9. (1) Za poljuben $x\in \mathrm{SO}(n)$ lahko najdemo takšni matriki $p,y\in \mathrm{SO}(n)$, da je $x = pyp^T$ in da je y bločno diagonalna matrika

$$y = \mathrm{diag}(R(\theta_1),\dots,R(\theta_k),1,\dots,1),$$

kjer smo z $R(\theta)\in \mathrm{SO}(2)$ označili matriko rotacije v ravnini za kot θ. Za vsak $t\in[0,1]$ naj bo

$$\gamma(t) = \mathrm{diag}(R(t\theta_1),\dots,R(t\theta_k),1,\dots,1).$$

Preverimo lahko, da je tako definirana preslikava γ zvezna pot v Liejevi grupi $\mathrm{SO}(n)$ od identitete I do y, medtem ko je s predpisom $t\mapsto p\gamma(t)p^T$ dana pot Liejevi grupi $\mathrm{SO}(n)$ od I do x. Odtod sledi, da je Liejeva grupa $\mathrm{SO}(n)$ povezana in je komponenta identitete ortogonalne grupe $\mathrm{O}(n)$. Ortogonalna grupa ima dve komponenti za povezanost, torej $\pi_0(\mathrm{O}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Vsako matriko $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ lahko na en sam način zapišemo kot produkt $x = yS$, kjer je $y \in \mathrm{O}(n)$ in kjer je S pozitivno definitna simetrična matrika. Res, vzeti moramo $S = (x^T x)^{1/2}$ in $y = xS^{-1}$. Matriko S lahko zapišemo v obliki $S = pDp^T$, kjer je $p \in \mathrm{SO}(n)$ in D diagonalna matrika s pozitivnimi diagonalnimi elementi. Zdaj je

$$\gamma(t) = p(tD + (1-t)I)p^T$$

pozitivno definitna simetrična matrika, za vsak $t \in [0, 1]$, s predpisom $\zeta(t) = y\gamma(t)$ pa je definirana pot v Liejevi grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ od y do x. Odtod sledi, da ima $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ enako število komponent za povezanost kot $\mathrm{O}(n)$, torej dve. Komponenta identitete Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ je Liejeva grupa matrik s pozitivno determinanto, $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Če je $x \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, je s predpisom $t \mapsto \mathrm{diag}(\det(\zeta(t))^{-1}, 1, \ldots, 1)\zeta(t)$ dana pot v $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ od $y \in \mathrm{SO}(n)$ do x. Ker je Liejeva grupa $\mathrm{SO}(n)$ povezana, je torej povezana tudi Liejeva grupa $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Povezanost Liejevih grup $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ lahko pokažemo tudi s pomočjo Gram-Schmidtovega algoritma, ki ga zvezno uporabimo na stolpcih matrike x.

Ortogonalne grupe lahko posplošimo na naslednji način: Naj bosta p in q poljubni takšni naravni števili, da je $n = p + q$, in naj bo $I_{(p,q)}$ bločno diagonalna matrika

$$I_{(p,q)} = \mathrm{diag}(I_p, -I_q),$$

ki smo z I_p oziroma I_q označili matriko identitete dimenzije $p \times p$ oziroma $q \times q$. Naj bo $\xi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}$ preslikava, dana s predpisom

$$\xi(x) = x^T I_{(p,q)} x.$$

Preslikavo ξ odvajamo podobno, kot smo odvajali preslikavo ϕ, in vidimo, da je tudi preslikava ξ submerzija, njen odvod pa je dan s predpisom

$$(d\xi)_x(A) = x^T I_{(p,q)} A + A^T I_{(p,q)} x$$

za vsako matriko $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Vlakno preslikave ξ nad $I_{(p,q)}$ je zaprta vložena Liejeva podgrupa

$$\mathrm{O}(p, q) = \{x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid x^T I_{(p,q)} x = I_{(p,q)}\}$$

Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Liejevo grupo $\mathrm{O}(p, q)$ imenujemo *nedefinitna ortogonalna grupa* stopnje (p, q). Njena dimenzija je $n(n-1)/2$. Liejeva grupa $\mathrm{O}(1, 3)$ je *Lorentzova grupa*, ki je pomembna v fiziki kot grupa Lorentzovih transformacij prostora Minkovskega.

Za poljuben $x \in \mathrm{O}(p, q)$ je $\det(x) = \pm 1$. Grupa

$$\mathrm{SO}(p, q) = \{x \in \mathrm{O}(p, q) \mid \det(x) = 1\}$$

je odprta Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe $\mathrm{O}(p, q)$, a ni povezana: $\mathrm{SO}(p, q)$ ima dve, $\mathrm{O}(p, q)$ pa štiri komponente. Komponento identitete Liejeve grupe $\mathrm{SO}(p, q)$ oziroma $\mathrm{O}(p, q)$ včasih označimo z $\mathrm{SO}^+(p, q)$.

2.1.4. Unitarna grupa. Unitarne matrike dimenzije $n \times n$ sestavljajo podgrupo grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$,

$$\mathrm{U}(n) = \{x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid x^H x = I\} < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Označimo s $\mathcal{H}$ realen vektorski prostor vseh hermitskih kompleksnih matrik dimenzije $n \times n$. Posebej je $\mathcal{H}$ mnogoterost dimenzije n^2. Naj bo $\psi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}$ preslikava, dana s predpisom

$$\psi(x) = x^H x.$$

Izračun, podoben tistemu iz prejšnjega podrazdelka za preslikavo ϕ, nam pokaže, da je tudi preslikava ψ submerzija, katere odvod je dan s predpisom

$$(d\psi)_x(A) = x^H A + A^H x$$

za vsako matriko $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Grupa $\mathrm{U}(n)$ je torej Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ki jo imenujemo *unitarna grupa* stopnje n. Liejeva grupa $\mathrm{U}(n)$ je kompaktna in ima dimenzijo $2n^2 - n^2 = n^2$.

Determinanta unitarne matrike je kompleksno število z absolutno vrednostjo 1, in imamo homomorfizem Liejevih grup

$$\det : \mathrm{U}(n) \to S^1 < \mathbb{C}^\times.$$

Tudi ta preslikava je submerzija. Res, za poljuben $x \in \mathrm{U}(n)$ je $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} x \in \mathrm{U}(n)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, ob tem pa je $\gamma(0) = x$ in

$$d(\det)_x(\dot\gamma(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \det(x) = \mathrm{i}n \det(x) \neq 0.$$

Jedro submerzije $\det : \mathrm{U}(n) \to S^1$ je torej zaprta vložena Liejeva podgrupa edinka

$$\mathrm{SU}(n) = \{x \in \mathrm{U}(n) \mid \det(x) = 1\}$$

Liejeve grupe $\mathrm{U}(n)$, ki jo imenujemo *specialna unitarna grupa* stopnje n. Njena dimenzija je $n^2 - 1$.

Vaja 2.10. (1) Za poljuben $x \in \mathrm{U}(n)$ lahko najdemo takšni matriki $p, y \in \mathrm{U}(n)$, da je $x = pyp^H$ in da je y diagonalna matrika

$$y = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}),$$

za $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Za vsak $t \in [0, 1]$ naj bo

$$\gamma(t) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta_n})$$

in $\zeta(t) = p\gamma(t)p^H$. Tako definirana preslikava ζ je zvezna pot v Liejevi grupi $\mathrm{U}(n)$ od identitete I do x. Odtod sledi, da je Liejeva grupa $\mathrm{U}(n)$ povezana.

Če je $x \in \mathrm{SU}(n)$, potem je s predpisom $t \mapsto \mathrm{diag}(\det(\zeta(t))^{-1}, 1, \ldots, 1)\zeta(t)$ podana pot v Liejevi grupi $\mathrm{SU}(n)$ od identitete I do x. To pomeni, da je tudi Liejeva grupa $\mathrm{SU}(n)$ povezana.

(2) Poljubno matriko $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ lahko na en sam način zapišemo kot produkt $x = yS$, kjer je $y \in \mathrm{U}(n)$ in kjer je S pozitivno definitna hermitska matrika. Podobno kot v vaji 2.9(2) lahko odtod vidimo, da sta grupi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ povezani.

2.1.5. Simplektična grupa. Naj bo Ω realna matrika dimenzije $2n \times 2n$ bločne oblike

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je I_n matrika identitete dimenzije $n \times n$. Posebej je matrika Ω torej antisimetrična, obrnljiva in $\Omega^2 = -I_{2n}$. *Simplektična grupa* stopnje $2n$ nad $\mathbb{F}$ je podgrupa

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}) = \{x \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F}) \mid x^T \Omega x = \Omega\}$$

splošne linearne grupe $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{F})$. Grupo $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ dobimo kot vlakno nad Ω gladke preslikave $\phi_\Omega : \mathrm{GL}(2n, \mathbb{F}) \to \mathcal{A}$, ki slika v vektorski prostor $\mathcal{A} \subset \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{F})$ vseh antisimetričnih matrik z elementi iz $\mathbb{F}$ dimenzije $2n \times 2n$ in je dana s predpisom

$$\phi_\Omega(x) = x^T \Omega x.$$

Preslikava ψ je submerzija, saj je njen odvod dan s predpisom

$$(d\phi_\Omega)_x(A) = x^T \Omega A + A^T \Omega x$$

za vsako matriko $A \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{F})$, za poljubno antisimetrično matriko $S \in \mathcal{A}$ pa je

$$2S = S - S^T = x^T \Omega\big(-\Omega(x^T)^{-1} S\big) + \big(-\Omega(x^T)^{-1} S\big)^T \Omega x,$$

torej $S = (d\phi_\Omega)_x\big(-\frac{1}{2}\Omega(x^T)^{-1} S\big)$. To pomeni, da je $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ Liejeva grupa. Dimenzija grupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je $(2n)^2 - 2n(2n-1)/2 = n(2n+1)$, dimenzija grupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ pa je enaka $2(2n^2) - 2(2n)(2n-1)/2 = 2n(2n+1)$. Z nekoliko več dela se da pokazati, da je v resnici $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}) < \mathrm{SL}(2n, \mathbb{F})$.

Kompaktna simplektična grupa stopnje n je grupa

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}).$$

Kasneje bomo videli, da je vsaka zaprta podgrupa Liejeve grupe vložena Liejeva podgrupa, zato je tudi $\mathrm{Sp}(n)$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$.

2.2. Liejeva algebra Liejeve grupe

DEFINICIJA 2.11. *Liejeva algebra* nad $\mathbb{F}$ je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$, opremljen z $\mathbb{F}$-bilinearno operacijo $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, za katero velja

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ in
(ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

za vse $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

KOMENTAR 2.12. Spomnimo se, da je za nas obseg $\mathbb{F}$ lahko $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Praviloma bodo naše Liejeve algebre realne, torej $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, razen če ne bomo posebej poudarili nasprotno. Operacijo v Liejevi algebri imenujemo *oklepaj*, lastnost (i) je *antisimetričnost* oklepaja, enakost (ii) pa je *Jacobijeva identiteta*. Antisimetričnost bilinearnega oklepaja je ekvivalentna pogoju, da je $[X, X] = 0$ za vse $X \in \mathfrak{g}$, saj v našem primeru karakteristika obsega $\mathbb{F}$ ni enaka 2.

DEFINICIJA 2.13. Naj bosta $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ Liejevi algebri nad $\mathbb{F}$. Preslikava $\Phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ je *homomorfizem Liejevih algeber*, če je $\mathbb{F}$-linearna in velja $\Phi[X, Y] = [\Phi(X), \Phi(Y)]$ za vse $X, Y \in \mathfrak{h}$. Preslikava $\Phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ je *izomorfizem Liejevih algeber*, če je homomorfizem Liejevih algeber in bijekcija. Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ sta *izomorfni*, če obstaja kakšen izomorfizem Liejevih algeber med njima.

Komentar 2.14. Kompozicija homomorfizmov Liejevih algeber je spet homomorfizem Liejevih algeber, in kompozicija izomorfizmov Liejevih algeber je spet izomorfizem Liejevih algeber. Homomorfizem Liejevih algeber je monomorfizem oziroma epimorfizem, če je injektiven oziroma surjektiven. Avtomorfizem Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je izomorfizem Liejevih algeber $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Množica $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ vseh avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je grupa za kompozicijo.

Definicija 2.15. Podmnožica $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$ je *Liejeva podalgebra* Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, če je $\mathfrak{h}$ vektorski podprostor vektorskega prostora $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$ in je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ za vse $X, Y \in \mathfrak{h}$. Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je *ideal* v $\mathfrak{g}$, če je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ za vse $X \in \mathfrak{g}$ in $Y \in \mathfrak{h}$.

Komentar 2.16. Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$ je seveda tudi sama zase Liejeva algebra nad $\mathcal{F}$, inkluzija $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ pa je homomorfizem Liejevih algeber.

Zgled 2.17. (1) Vsak vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ je z oklepajem, ki je identično enak 0, Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$. Takšni Liejevi algebri pravimo *komutativna* Liejeva algebra.

(2) Evklidski prostor $\mathbb{R}^3$ z operacijo vektorskega produkta je realna Liejeva algebra.

(3) Vektorski prostor $\mathfrak{X}(M)$ vseh vektorskih polj na mnogoterosti M je realna Liejeva algebra.

(4) Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Na vektorskem prostoru $\mathbb{F}$-linearnih endomorfizmov $\mathrm{End}(\mathsf{V})$ vektorskega prostora V definiramo oklepaj kot komutator, torej

$$[A, B] = AB - BA$$

za vse $A, B \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$. S tem oklepajem postane $\mathrm{End}(\mathsf{V})$ Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$. Če je vektorski prostor V končno dimenzionalen, Liejevo algebro $\mathrm{End}(\mathsf{V})$ označimo tudi z

$$\mathfrak{gl}(\mathsf{V}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(\mathsf{V})$$

in jo imenujemo *splošna linearna Liejeva algebra* na vektorskem prostoru V. Posebej definiramo splošno linearno Liejevo algebro stopnje n nad $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

in splošno linearno Liejevo algebro stopnje n nad $\mathbb{C}$

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}).$$

(5) Za poljubni Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ je kartezični produkt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ Liejeva algebra za oklepaj

$$[(X, Z), (Y, W)]_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}} = ([X, Y]_{\mathfrak{g}}, [Z, W]_{\mathfrak{h}}),$$

kjer so $X, Y \in \mathfrak{g}$ in $Z, W \in \mathfrak{h}$. Liejevo algebro $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ označimo tudi kot vsoto $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

(6) Če je $\Phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ homomorfizem Liejevih algeber, je njegovo jedro $\ker \Phi$ ideal v Liejevi algebri $\mathfrak{h}$.

2.2.1. Levo invariantna vektorska polja.

Definicija 2.18. Naj bo G Liejeva grupa. Vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(G)$ je *levo invariantno*, če je L_x-invariantno za vsak $x \in G$. Vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(G)$ je *desno invariantno*, če je R_x-invariantno za vsak $x \in G$. Označimo z $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ množico vseh levo invariantnih vektorskih polj na G in z $\mathfrak{X}^{\mathrm{R}}(G)$ množico vseh desno invariantnih vektorskih polj na G.

KOMENTAR 2.19. Vektorsko polje X na G je torej levo invariantno, če velja $(\mathrm{L}_x)_*X = X$ za vsak $x \in G$, torej $(d\,\mathrm{L}_x)_y(X_y) = X_{xy}$ za vse $x, y \in G$. Vektorsko polje X na G je desno invariantno, če je $(\mathrm{R}_x)_*X = X$ za vsak $x \in G$, torej $(d\,\mathrm{R}_x)_y(X_y) = X_{yx}$ za vse $x, y \in G$.

TRDITEV 2.20. *Naj bo G Liejeva grupa. Vsako levo invariantno vektorsko polje X na G je kompletno in*

$$\Phi_t^X = \mathrm{R}_{\Phi_t^X(e)}$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Vsako desno invariantno vektorsko polje Y na G je kompletno in

$$\Phi_t^Y = \mathrm{L}_{\Phi_t^Y(e)}$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$.

DOKAZ. Za poljuben $x \in G$ naj bo $\gamma_x^X : J_x^X \to G$ maksimalna integralna krivulja levo invariantnega vektorskega polja X na G, za katero je $\gamma_x^X(0) = x$. Za vsak $y \in G$ je kompozicija $L_y \circ \gamma_x^X$ integralna krivulja vektorskega polja X, saj velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} L_y(\gamma_x^X(t)) &= (dL_y)_{\gamma_x^X(s)}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\gamma_x^X(t)\Big) \\ &= (dL_y)_{\gamma_x^X(s)}(X_{\gamma_x^X(s)}) = X_{L_y(\gamma_x^X(s))}. \end{aligned}$$

Integralna krivulja $L_y \circ \gamma_x^X$ je definirana na intervalu J_x^X, njena vrednost v točki 0 pa je yx. Zaradi maksimalnosti integralne krivulje $\gamma_{yx}^X : J_{yx}^X \to G$ mora zato veljati

$$J_x^X \subset J_{yx}^X.$$

Ker to velja za vse $x, y \in G$, mora biti $J_x^X = J_e^X$ za vsak $x \in G$. Vse maksimalne integralne krivulje so torej definirane na istem odprtem intervalu $J = J_e^X$.

Za poljuben $s \in J$ je tudi preslikava $\zeta : (J - s) \to G$, dana s predpisom

$$\zeta(t) = \gamma_e^X(t + s),$$

integralna krivulja vektorskega polja X, za katero je $\zeta(0) = \gamma_e^X(s)$. Iz maksimalnosti integralne krivulje $\gamma_{\zeta(0)}^X : J \to G$ sledi, da je $J - s \subset J$ za vsak $s \in J$, to pa je mogoče le, če je $J = \mathbb{R}$.

Ugotovili smo že, da je preslikava $L_x \circ \gamma_e^X : \mathbb{R} \to G$ integralna krivulja vektorskega polja X z vrednostjo x v točki 0, za vsak $x \in G$. To pomeni, da je tok vektorskega polja X za vsak $t \in \mathbb{R}$ dan s predpisom

$$\Phi_t^X(x) = \mathrm{L}_x(\gamma_e^X(t)) = x\gamma_e^X(t) = x\Phi_t^X(e) = \mathrm{R}_{\Phi_t^X(e)}(x),$$

torej res velja $\Phi_t^X = \mathrm{R}_{\Phi_t^X(e)}$. Dokaz trditve za desno invariantna vektorska polja je podoben. □

TRDITEV 2.21. *Naj bo G Liejeva grupa, $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ in $Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{R}}(G)$. Tedaj je*

(i) $(\Phi_t^X)_*Y = Y$ *za vsak* $t \in \mathbb{R}$,
(ii) $[X, Y] = 0$, *in*
(iii) *če je $X_x = Y_x$ za nek $x \in G$, potem je $X_{\Phi_t^X(x)} = Y_{\Phi_t^X(x)}$ in $\Phi_t^X(x) = \Phi_t^Y(x)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.*

DOKAZ. (i) Iz trditve 2.20 in zaradi desne invariantnosti vektorskega polja Y velja $(\Phi_t^X)_*Y = (\mathrm{R}_{\Phi_t^X(e)})_*Y = Y$.

(ii) Iz točke (i) sledi $[X, Y]_x = -\frac{d}{dt}\big|_{t=0}((\Phi_t^X)_*Y)_x = -\frac{d}{dt}\big|_{t=0}Y_x = 0$ za vsak $x \in G$.

(iii) Vektorsko polje X je seveda Φ_t^X-invariantno po trditvi 1.42. Odtod in iz točke (i) dobimo

$$\begin{aligned} X_{\Phi_t^X(x)} &= ((\Phi_t^X)_* X)_{\Phi_t^X(x)} = d(\Phi_t^X)_x(X_x) \\ &= d(\Phi_t^X)_x(Y_x) = ((\Phi_t^X)_* Y)_{\Phi_t^X(x)} = Y_{\Phi_t^X(x)}. \end{aligned}$$

To pomeni, da je γ_x^X integralna krivulja tudi za vektorsko polje Y, zato mora biti $\Phi_t^X(x) = \gamma_x^X(t) = \gamma_x^Y(t) = \Phi_t^Y(x)$. □

TRDITEV 2.22. *Naj bo G Liejeva grupa. Množici $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ in $\mathfrak{X}^{\mathrm{R}}(G)$ sta Liejevi podalgebri Liejeve algebre $\mathfrak{X}(G)$.*

DOKAZ. Očitno je $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ vektorski podprostor v $\mathfrak{X}(G)$. Za levo invariantni vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ velja

$$(\mathrm{L}_x)_*[X, Y] = [(\mathrm{L}_x)_* X, (\mathrm{L}_x)_* Y] = [X, Y]$$

za vsak $x \in G$, zato je torej tudi vektorsko polje $[X, Y]$ levo invariantno. Za desno invariantna polja je dokaz podoben. □

KOMENTAR 2.23. Liejevo algebro $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ imenujemo *Liejeva algebra Liejeve grupe* G. Običaj je tudi, da Liejevo algebro Liejeve grupe G označimo z $\mathfrak{g}$, Liejevo algebro Liejeve grupe H s $\mathfrak{h}$, etc.

TRDITEV 2.24. *Naj bo G Liejeva grupa. Preslikava $\mathrm{ev}_e : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_eG$, ki poljubnemu levo invariantnemu vektorskemu polju $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ priredi njegovo vrednost $X_e \in T_eG$ v nevtralnem elementu e grupe G, je izomorfizem vektorskih prostorov. Vektorski prostor $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ je končno dimenzionalen in $\dim \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) = \dim G$.*

DOKAZ. Preslikava $\mathrm{ev}_e : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_eG$, $X \mapsto X_e$, je očitno linearna. Vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ je enolično določen z vrednostjo X_e, saj je $X_x = (d\,\mathrm{L}_x)_e(X_e)$ za vsak $x \in G$. To pomeni, da je preslikava ev_e injektivna. Da bi dokazali še surjektivnost te preslikave, vzemimo poljuben $v \in T_eG$ in definirajmo preslikavo $\sigma : G \to TG$ s predpisom

$$\sigma(x) = (d\,\mathrm{L}_x)_e(v).$$

Pokazali bomo, da je σ levo invariantno vektorsko polje na G in da je $\mathrm{ev}_e(\sigma) = v$. Jasno je, da je $\sigma(x) \in T_xG$, da je $\sigma(e) = v$ in da velja

$$(d\,\mathrm{L}_x)_y(\sigma(y)) = (d\,\mathrm{L}_x)_y((d\,\mathrm{L}_y)_e(v)) = (d\,\mathrm{L}_{xy})_e(v) = \sigma(xy).$$

Dokazati moramo še, da je preslikava $\sigma : G \to TG$ gladka.

V ta namen si oglejmo množenje μ na Liejevi grupi G. Odvod tega množenja je gladka preslikava

$$d\mu : T(G \times G) \to TG.$$

Gladka je tudi preslikava $\tau : G \to T(G \times G)$, dana s predpisom

$$\tau(x) = (0, v) \in T_xG \times T_eG = T_{(x,e)}(G \times G),$$

zato je gladka tudi kompozicija $d\mu \circ \tau : G \to TG$. Za vsak $x \in G$ izberemo gladko krivuljo $\gamma : \mathbb{R} \to G$, za katero je $\gamma(0) = e$ in $\dot\gamma(0) = v$, in izračunamo

$$\begin{aligned}(d\mu \circ \tau)(x) &= d\mu_{(x,e)}(0, v) = d\mu_{(x,e)}\Big(0, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t)\Big)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(x,\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{L}_x(\gamma(t))\\ &= (d\,\mathrm{L}_x)_e\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t)\Big) = (d\,\mathrm{L}_x)_e(v) = \sigma(x).\end{aligned}$$

Velja torej $d\mu \circ \tau = \sigma$, torej je preslikava σ gladka. □

KOMENTAR 2.25. Podobna trditev velja seveda tudi za desno invariantna vektorska polja na G. Za poljuben $v \in T_eG$ bomo z v^{L} označili tisto levo invariantno vektorsko polje na G, za katerega je

$$(v^{\mathrm{L}})_e = v.$$

Podobno bomo z v^{R} označili tisto desno invariantno vektorsko polje na G, za katerega je

$$(v^{\mathrm{R}})_e = v.$$

Krajše bomo zapisali $(v^{\mathrm{L}})_x = v^{\mathrm{L}}_x$ oziroma $(v^{\mathrm{R}})_x = v^{\mathrm{R}}_x$, za vsak $x \in G$. Definirajmo še preslikavo $\mathrm{ev}_x : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_xG$, $X \mapsto X_x$. Ker velja $\mathrm{ev}_x = (d\,\mathrm{L}_x)_e \circ \mathrm{ev}_e$, je tudi $\mathrm{ev}_x : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_xG$ izomorfizem vektorskih prostorov. To med drugim pomeni, da za izbrano bazo $v_1, \ldots, v_n$ tangentnega prostora T_eG levo invariantna vektorska polja $(v_1)^{\mathrm{L}}, \ldots, (v_n)^{\mathrm{L}}$ sestavljajo ogrodje tangentnega svežnja TG.

POSLEDICA 2.26. *Naj bo G Liejeva grupa. Tangentni prostor T_eG ima naravno strukturo Liejeve algebre, v kateri je oklepaj dan s predpisom*

$$[v, w] = [v^{\mathrm{L}}, w^{\mathrm{L}}]_e$$

za vse $v, w \in T_eG$. Preslikava $\mathrm{ev}_e : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_eG$ je izomorfizem Liejevih algeber.

DOKAZ. Ker je $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ Liejeva algebra glede na Liejev oklepaj vektorskih polj in ker je $\mathrm{ev}_e : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_eG$ izomorfizem vektorskih prostorov, lahko na T_eG na en sam način definiramo Liejev oklepaj tako, da je ev_e izomorfizem Liejevih algeber. □

TRDITEV 2.27. *Naj bo $\phi : H \to G$ homomorfizem Liejevih grup. Tedaj je odvod $(d\phi)_e : T_eH \to T_eG$ homomorfizem Liejevih algeber.*

DOKAZ. Naj bosta v, w tangentna vektorja v T_eH. Vektorsko polje v^{L} je v ϕ-relaciji z vektorskim poljem $((d\phi)_e(v))^{\mathrm{L}}$, saj za vsak $y \in H$ velja

$$\begin{aligned}(d\phi)_y(v^{\mathrm{L}}_y) &= (d\phi)_y((d\,\mathrm{L}_y)_e(v)) = d(\phi \circ \mathrm{L}_y)_e(v)\\ &= d(\mathrm{L}_{\phi(y)} \circ \phi)_e(v) = (d\,\mathrm{L}_{\phi(y)})_e((d\phi)_e(v))\\ &= ((d\phi)_e(v))^{\mathrm{L}}_{\phi(y)}.\end{aligned}$$

Podobno je vektorsko polje w^{L} v ϕ-relaciji z vektorskim poljem $((d\phi)_e(w))^{\mathrm{L}}$. Odtod sledi, da je vektorsko polje $[v^{\mathrm{L}}, w^{\mathrm{L}}]$ v ϕ-relaciji z $[((d\phi)_e(v))^{\mathrm{L}}, ((d\phi)_e(w))^{\mathrm{L}}]$, zato je

$$\begin{aligned}(d\phi)_e([v, w]) &= (d\phi)_e([v^{\mathrm{L}}, w^{\mathrm{L}}]_e) = [((d\phi)_e(v))^{\mathrm{L}}, ((d\phi)_e(w))^{\mathrm{L}}]_e\\ &= [(d\phi)_e(v), (d\phi)_e(w)].\end{aligned}$$

□

Komentar 2.28. Za poljubno Liejevo grupo G bomo Liejevo algebro T_eG označili tudi z $\mathfrak{L}(G)$. Glede na izomorfizem Liejevih algeber $\mathrm{ev}_e : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to T_eG = \mathfrak{L}(G)$ Liejevo algebro $\mathfrak{L}(G)$ identificiramo z Liejevo algebro $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ Liejeve grupe G.

Za homomorfizem Liejevih grup $\phi : H \to G$ bomo homomorfizem Liejevih algeber $(d\phi)_e : T_eH \to T_eG$ označili tudi z $\mathfrak{L}(\phi) : \mathfrak{L}(H) \to \mathfrak{L}(G)$. Glede na identifikacijo Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ z Liejevo algebro $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ in identifikacijo Liejeve algebre $\mathfrak{L}(H)$ z Liejevo algebro $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(H)$ imamo tudi pridruženi homomorfizem Liejevih algeber

$$\phi_* : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(H) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G).$$

Za poljubno levo invariantno vektorsko polje $Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(H)$ je torej

$$\phi_* Y = ((d\phi)_e(Y_e))^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G).$$

Vektorsko polje Y je v ϕ-relaciji z vektorskim poljem $\phi_* Y$.

Če je $\psi : K \to H$ še en homomorfizem Liejevih grup, iz verižnega pravila za odvod dobimo enakost $\mathfrak{L}(\phi \circ \psi) = \mathfrak{L}(\phi) \circ \mathfrak{L}(\psi)$ oziroma $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$. Velja tudi $\mathfrak{L}(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}(G)}$.

Zgled 2.29. (1) Komponenta nevtralnega elementa G° Liejeve grupe G je odprta podgrupa, zato velja $\mathfrak{L}(G) = \mathfrak{L}(G^\circ)$. Inkluzija $\mathrm{inc} : G^\circ \to G$ inducira izomorfizem pridruženih Liejevih algeber $\mathrm{inc}_* : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G^\circ) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$.

(2) Liejeva algebra poljubne komutativne Liejeve grupe G je komutativna. Res, naj bosta $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$. Iz komutativnosti Liejeve grupe G sledi, da sta X in Y tudi desno invariantni vektorski polji, zato po trditvi 2.21(ii) velja $[X, Y] = 0$.

(3) Naj bo H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. Vložitev $\mathrm{inc} : H \to G$ je imerzija in homomorfizem Liejevih grup, zato je njen odvod v nevtralnem elementu $d(\mathrm{inc})_e = \mathfrak{L}(\mathrm{inc}) : \mathfrak{L}(H) \to \mathfrak{L}(G)$ vložitev in homomorfizem Liejevih algeber. Liejeva algebra $\mathfrak{L}(H)$ je torej Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$.

Vaja 2.30. Za poljubni Liejevi grupi G in H sta Liejevi algebri $\mathfrak{L}(G \times H)$ in $\mathfrak{L}(G) \times \mathfrak{L}(H)$ izomorfni.

2.2.2. Splošna in specialna linearna Liejeva algebra. Splošna linearna grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ je odprta podmnožica vektorskega prostora matrik $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, zato tangentni prostor Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ v vsaki točki lahko identificiramo z vektorskim prostorom $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Posebej je Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}))$ kot vektorski prostor enaka $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Pokazali bomo, da je oklepaj na Liejevi algebri $\mathfrak{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}))$ dan s komutatorjem, torej da je

$$\mathfrak{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}).$$

Naj bo $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Najprej opazimo, da je leva translacija $L_x : \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ zožitev linearne preslikave $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, $A \mapsto xA$, zato je njen odvod v točki $y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ dan s predpisom

$$(dL_x)_y(A) = xA$$

za vsak $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. To pomeni, da ima levo invariantno vektorsko polje A^{L} na G v poljubni točki $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ vrednost

$$A^{\mathrm{L}}_x = xA.$$

Podobno velja $(dR_x)_y(A) = Ax$ in $A^{\mathrm{R}}_x = Ax$.

Spomnimo se, da je matrika e^A definirana z vrsto

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Ta vrsta res konvergira, saj za operatorsko normo matrik velja $|(A^n)_{ij}| \le \|A^n\| \le \|A\|^n$ in je torej vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ členoma majorizirana z eksponentno vrsto števil $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n/n!$, ki je seveda konvergentna. Podobno tudi vidimo, da za poljubni matriki $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, ki komutirata (torej $AB = BA$), konvergira Cauchyjev produkt vrst $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ in $\sum_{n=0}^{\infty} B^n/n!$ ter velja

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Posebej to pomeni, da je e^A obrnljiva matrika z inverzom e^{-A}, saj je očitno $\mathrm{e}^0 = I$. Za poljubno obrnljivo matriko $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ je

$$x\mathrm{e}^A x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{xA^n x^{-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xAx^{-1})^n}{n!} = \mathrm{e}^{xAx^{-1}}.$$

Matrika A je unitarno podobna zgornje trikotni matriki, torej obstaja takšna unitarna matrika $y \in \mathrm{U}(n)$, da je matrika $C = yAy^{-1}$ zgornje trikotna kompleksna matrika (Schurova dekompozicija). Za zgornje trikotno matriko C z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ po diagonali pa lahko direktno iz definicije izračunamo, da je matrika e^C spet zgornje trikotna z diagonalnimi elementi $\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}$. Posebej odtod vidimo, da velja

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}.$$

V splošnem matriko e^A najenostavneje izračunamo tako, da jo s konjugiranjem preoblikujemo v Jordanovo kanonično obliko.

Matrika $\mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n/n!$ je gladka funkcija realnega parametra t, saj je dana s potenčno vrsto. Ker potenčne vrste lahko členoma odvajamo, za vsak $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} x\mathrm{e}^{tA} &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} x\mathrm{e}^{(s+r)A} = x\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+r)^n A^n}{n!} \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \frac{(s+r)^n A^n}{n!} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(s+r)^{n-1} A^n}{n!}\Big|_{r=0} \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n-1} A^n}{(n-1)!} = x\mathrm{e}^{sA} A.
\end{aligned}$$

Za preslikavo $\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, dano s predpisom $\gamma_x(t) = x\mathrm{e}^{tA}$, torej velja $\gamma_x(0) = x$ in

$$\dot{\gamma}_x(t) = \gamma_x(t)A = A^{\mathrm{L}}_{\gamma_x(t)}.$$

To pomeni, da je γ_x maksimalna integralna krivulja levo invariantnega vektorskega polja A^{L}, in da je torej tok vektorskega polja A^{L} dan s predpisom

$$\Phi_t^{A^{\mathrm{L}}}(x) = x\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{R}_{\mathrm{e}^{tA}}(x).$$

Za poljubni matriki $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ lahko zdaj izračunamo

$$\begin{aligned}
[A^{\mathrm{L}}, B^{\mathrm{L}}]_x &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big((\Phi_t^{A^{\mathrm{L}}})_*(B^{\mathrm{L}})\big)_x \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\Phi_t^{A^{\mathrm{L}}})\big(B^{\mathrm{L}}_{\Phi_{-t}^{A^{\mathrm{L}}}(x)}\big) \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{R}_{\mathrm{e}^{tA}}(\Phi_{-t}^{A^{\mathrm{L}}}(x)B) \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x\mathrm{e}^{-tA}B\mathrm{e}^{tA} \\
&= -x\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{-tA}\Big)B - xB\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{e}^{tA}\Big) \\
&= -x(-AB + BA) \\
&= (AB - BA)^{\mathrm{L}}_x,
\end{aligned}$$

odtod pa sledi, da je oklepaj na Liejevi algebri $\mathfrak{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}))$ dan s komutatorjem, torej

$$[A^{\mathrm{L}}, B^{\mathrm{L}}]_e = [A, B] = AB - BA.$$

Povsem enak izračun lahko naredimo za splošno linearno grupo $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$, za poljuben končno dimenzionalen vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$. Posebej to pomeni, da je Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{GL}(\mathsf{V}))$ enaka splošni linearni Liejevi algebri $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$.

Odvod homomorfizma Liejevih grup $\det : \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}^\times$ v identiteti je homomorfizem Liejevih algeber

$$\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}.$$

Jedro tega homomorfizma je *specialna linearna Liejeva algebra*

$$\mathfrak{sl}(\mathsf{V}) = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathsf{V}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \subset \mathfrak{gl}(\mathsf{V}),$$

ki je ideal v $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$. Liejeva grupa $\mathrm{SL}(\mathsf{V})$ je jedro submerzije $\det : \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}^\times$, zato velja

$$\mathfrak{sl}(\mathsf{V}) = \mathfrak{L}(\mathrm{SL}(\mathsf{V})).$$

Posebej imamo

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{L}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}))$$

in

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n) = \mathfrak{L}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})).$$

Levo invariantna vektorska polja na $\mathrm{SL}(\mathsf{V})$ in njihovi tokovi so zožitve levo invariantnih vektorskih polj in njihovih tokov na $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$.

Za poljubno Liejevo podgrupo H splošne linearne grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ je Liejeva algebra $\mathfrak{L}(H)$ Liejeva podalgebra splošne linearne Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$. Posebej je torej oklepaj na $\mathfrak{L}(H)$ dan s komutatorjem. Prav tako so levo invariantna vektorska polja in njihovi tokovi na H zožitve levo invariantnih vektorskih polj in njihovih tokov na $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$.

2.2.3. Ortogonalna, unitarna in simplektična Liejeva algebra. Ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n)$ stopnje n je Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. V podrazdelku 2.1.3 smo videli, da je $\mathrm{O}(n)$ vlakno submerzije, katere odvod v identiteti preslika poljubno matriko $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ v simetrično matriko $A + A^T$. Jedro tega odvoda je torej Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{O}(n))$, ki jo imenujemo *ortogonalna Liejeva algebra* stopnje n in označimo z

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\} = \mathfrak{L}(\mathrm{O}(n)) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}).$$

Ker je $\mathrm{SO}(n)$ komponenta identitete Liejeve grupe $\mathrm{O}(n)$, je $\mathfrak{L}(SO(n)) = \mathfrak{L}(O(n)) = \mathfrak{o}(n)$, zato označimo tudi

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n).$$

Podobno je nedefinitna ortogonalna grupa $\mathrm{O}(p,q)$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$ ter tudi vlakno submerzije, katere odvod v identiteti preslika poljubno matriko $A \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R})$ v simetrično matriko $I_{(p,q)}A + A^T I_{(p,q)}$. Jedro tega odvoda je Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{O}(p,q))$, ki jo imenujemo *nedefinitna ortogonalna Liejeva algebra* stopnje (p,q) in označimo z

$$\mathfrak{o}(p,q) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid I_{(p,q)}A + A^T I_{(p,q)} = 0\} = \mathfrak{L}(\mathrm{O}(p+q)) \subset \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R}).$$

Iz rezultatov podrazdelka 2.1.4 za unitarno grupo stopnje n prav tako sledi, da Liejevo algebro $\mathfrak{L}(\mathrm{U}(n))$ dobimo kot jedro preslikave $A \mapsto A + A^H$. To Liejevo algebro označimo z

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A + A^H = 0\} = \mathfrak{L}(\mathrm{U}(n)) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$$

in imenujemo *unitarna Liejeva algebra* stopnje n.

ZGLED 2.31. Liejeva grupa $\mathrm{U}(1)$ je enaka Liejevi grupi S^1, zato je

$$\mathfrak{L}(S^1) = \mathfrak{u}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 0\} = \mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Odtod pa sledi, da velja tudi

$$\mathfrak{L}(T^n) = (\mathfrak{u}(1))^n = \mathfrak{u}(1) \times \cdots \times \mathfrak{u}(1) = (\mathrm{i}\mathbb{R}) \times \cdots \times (\mathrm{i}\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}^n.$$

Ker je $\mathrm{SU}(n)$ jedro homomorfizma Liejevih grup $\det : \mathrm{U}(n) \to S^1 = \mathrm{U}(1)$, ki je tudi submerzija, je $\mathfrak{L}(\mathrm{SU}(n))$ jedro homomorfizma Liejevih algeber $\mathrm{tr} : \mathfrak{u}(n) \to \mathfrak{u}(1)$. Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{SU}(n))$ je torej ideal v Liejevi algebri $\mathfrak{u}(n)$, imenujemo jo *specialna unitarna Liejeva algebra* stopnje n in označimo

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A + A^H = 0,\ \mathrm{tr}\, A = 0\} = \mathfrak{L}(\mathrm{SU}(n)) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Posebej je torej $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

V podrazdelku 2.1.5 smo videli, da je simplektična grupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{F})$ vlakno submerzije, katere odvod v identiteti preslika poljubno matriko $A \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F})$ v antisimetrično matriko $\Omega A + A^T\Omega$. Tako je Liejeva algebra $\mathfrak{L}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{F}))$ jedro tega odvoda. To Liejevo algebro imenujemo *simplektična Liejeva algebra* stopnje $2n$ nad $\mathbb{F}$ in označimo

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F}) \mid \Omega A + A^T\Omega = 0\} = \mathfrak{L}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{F})) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F}).$$

Liejevo algebro $\mathfrak{L}(\mathrm{Sp}(n))$ dobimo kot presek Liejevih algeber

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n) = \mathfrak{L}(\mathrm{Sp}(n)) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}).$$

2.3. Eksponentna preslikava

Definicija 2.32. *Eksponentna preslikava* Liejeve grupe G je preslikava $\exp = \exp_G : T_eG \to G$, dana s predpisom

$$\exp(v) = \Phi_1^{v^{\mathrm{L}}}(e)$$

za vsak $v \in T_eG$.

Komentar 2.33. Eksponentna preslikava je torej preslikava iz Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ v Liejevo grupe G,

$$\exp : \mathfrak{L}(G) \to G.$$

Glede na identifikacijo Liejevih algeber $\mathfrak{L}(G)$ in $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ lahko gledamo eksponentno preslikavo tudi kot preslikavo iz Liejeve algebre $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ v Liejevo grupo G, ki jo prav tako označimo z

$$\exp : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to G.$$

Za vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ torej pišemo

$$\exp(X) = \exp(X_e) \in G.$$

Zgled 2.34. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ končne dimenzije. Ker je za vsak $A \in \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ vektorsko polje $A^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(\mathrm{GL}(\mathsf{V}))$ dano s predpisom $A^{\mathrm{L}}_x = xA$, tok tega vektorskega polja pa s predpisom $\Phi_t^{A^{\mathrm{L}}}(x) = x\mathrm{e}^{tA}$ za vsak $x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$, je

$$\exp(A) = \Phi_1^{A^{\mathrm{L}}}(\mathrm{id}) = \mathrm{e}^A.$$

Enaka formula velja tudi za vse Liejeve podgrupe Liejeve grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$.

Trditev 2.35. *Naj bo G Liejeva grupa in $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$. Tedaj je*

$$\Phi_t^X(e) = \exp(tX)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Posebej to pomeni, da je $\exp(0) = e$ in

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \exp(tX) = X_{\exp(sX)} = \big(d\,\mathrm{L}_{\exp(sX)}\big)_e(X_e)$$

za vsak $s \in \mathbb{R}$. Velja tudi

$$\Phi_t^X(x) = x\exp(tX)$$

za vse $t \in \mathbb{R}$ in $x \in G$.

Dokaz. Vzemimo poljuben $t \in \mathbb{R}$ in definirajmo $\beta : \mathbb{R} \to G$,

$$\beta(r) = \Phi_{tr}^X(e) = \gamma_e^X(tr).$$

Velja $\beta(0) = e$ in

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\Big|_{r=s}\beta(r) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=s}\gamma_e^X(tr) = (d\gamma_e^X)_{ts}\Big(\frac{d}{dr}\Big|_{r=s}(tr)\Big) = (d\gamma_e^X)_{ts}(t)\\ &= t(d\gamma_e^X)_{ts}(1) = t\Big(\frac{d}{dr}\Big|_{r=ts}\gamma_e^X(r)\Big) = tX_{\gamma_e^X(ts)}\\ &= (tX)_{\beta(s)}.\end{aligned}$$

Odtod sledi, da je $\beta(r) = \Phi_r^{tX}(e)$, za $r = 1$ pa

$$\Phi_t^X(e) = \beta(1) = \Phi_1^{tX}(e) = \exp(tX).$$

Prav tako velja

$$\Phi_t^X(x) = \mathrm{R}_{\Phi_t^X(e)}(x) = x\Phi_t^X(e) = x\exp(tX)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$ in vsak $x \in G$. □

KOMENTAR 2.36. Za izbran $v \in T_eG$ označimo $X = v^{\mathrm{L}}$ in $Y = v^{\mathrm{R}}$. Po trditvi 2.21(iii) sledi $\Phi_t^Y(e) = \Phi_t^X(e)$, zato je

$$\Phi_t^Y(x) = \Phi_t^Y(e)x = \Phi_t^X(e)x = \exp(tX)x$$

za vsak $x \in G$ in vsak $t \in \mathbb{R}$. Odtod sledi

$$\Phi_t^Y(x) = \exp(tX)x = \exp(tX)\Phi_t^X(x)(\exp(tX))^{-1} = \mathrm{C}_{\exp(tX)}(\Phi_t^X(x)).$$

TRDITEV 2.37. *Naj bo G Liejeva grupa. Preslikava $\mathbb{R} \times T_eG \to G$, $(t, v) \mapsto \exp(tv)$, je gladka. Posebej je tudi eksponentna preslikava $\exp : T_eG \to G$ gladka. Odvod eksponentne preslikave v točki 0 je identiteta na tangentnem prostoru T_eG,*

$$d(\exp)_0 = \mathrm{id}_{T_eG}\,.$$

Obstaja takšna odprta okolica U točke 0 v vektorskem prostoru T_eG, da je $\exp(U)$ odprta okolica točke e v Liejevi grupi G in da je $\exp|_U : U \to \exp(U)$ difeomorfizem.

DOKAZ. Naj bo Z vektorsko polje na mnogoterosti $G \times T_eG$, dano s predpisom

$$Z_{(x,v)} = (v_x^{\mathrm{L}}, 0) \in T_xG \times T_v(T_eG) = T_{(x,v)}(G \times T_eG).$$

Z odvajanjem na parameter t lahko preverimo, da je preslikava

$$\mathbb{R} \times G \times T_eG \to G \times T_eG, \qquad (t, x, v) \mapsto (x \exp(tv), v),$$

tok vektorskega polja Z. Ker je vektorsko polje Z gladko, je tudi njegov tok gladka preslikava. Odtod sledi, da je preslikava $\mathbb{R} \times T_eG \to G$, $(t, v) \mapsto \exp(tv)$, gladka, saj je enaka prvi komponenti toka vektorskega polja Z pri fiksnem $x = e$. Če v tej preslikavi vzamemo še $t = 1$, dobimo eksponentno preslikavo grupe G, ki je torej tudi gladka.

Za vsak $v \in T_eG$ je

$$d(\exp)_0(v) = d(\exp)_0\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} tv\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tv) = v,$$

zato je $d(\exp)_0 = \mathrm{id}_{T_eG}$. Zadnji del trditve sledi po izreku o inverzni funkciji. $\square$

DEFINICIJA 2.38. Homomorfizem Liejevih grup $\mathbb{R} \to G$ imenujemo tudi *enoparametrična podgrupa* Liejeve grupe G.

TRDITEV 2.39. *Naj bo G Liejeva grupa. Za vsak $v \in T_eG$ je preslikava $\mathbb{R} \to G$, dana s predpisom*

$$t \mapsto \exp(tv),$$

enoparametrična podgrupa Liejeve grupe G. Če je $\alpha : \mathbb{R} \to G$ poljubna enoparametrična podgrupa Liejeve grupe G, potem je

$$\alpha(t) = \exp(t\dot{\alpha}(0))$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$.

DOKAZ. Iz trditve 2.37 sledi, da je preslikava $t \mapsto \exp(tv)$ gladka. Ob tem velja tudi $\exp(0v) = e$ in

$$\begin{aligned}\exp((s+t)v) &= \Phi_{s+t}^{v^{\mathrm{L}}}(e) = \Phi_t^{v^{\mathrm{L}}}(\Phi_s^{v^{\mathrm{L}}}(e)) \\ &= \Phi_t^{v^{\mathrm{L}}}(\exp(sv)) = \mathrm{R}_{\exp(tv)}(\exp(sv)) \\ &= \exp(sv)\exp(tv).\end{aligned}$$

Ker je $\alpha(0) = e$ in

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\alpha(t) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0}\alpha(s+r) = \frac{d}{dr}\Big|_{r=0}\alpha(s)\alpha(r)\\ &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0}\mathrm{L}_{\alpha(s)}(\alpha(r)) = d(\mathrm{L}_{\alpha(s)})_e\Big(\frac{d}{dr}\Big|_{r=0}\alpha(r)\Big)\\ &= d(\mathrm{L}_{\alpha(s)})_e(\dot\alpha(0)) = (\dot\alpha(0))^{\mathrm{L}}_{\alpha(s)}\end{aligned}$$

za vsak $s \in \mathbb{R}$, sledi

$$\alpha(t) = \Phi_t^{\dot\alpha(0)^{\mathrm{L}}}(e) = \exp(t\dot\alpha(0))$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. □

Trditev 2.40. *Za vsak homomorfizem Liejevih grup $\phi : H \to G$ velja*

$$\phi(\exp_H(v)) = \exp_G((d\phi)(v))$$

za vsak $v \in \mathfrak{L}(H)$, torej komutira diagram:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ {\scriptstyle \exp_H}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp_G} \\ \mathfrak{L}(H) & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{L}(G) \end{array}$$

Dokaz. Preslikava $\alpha : \mathbb{R} \to G$,

$$\alpha(t) = \phi(\exp_H(tv)),$$

je enoparametrična podgrupa Liejeve grupe G, in velja

$$\dot\alpha(0) = (d\phi)_e\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp_H(tv)\Big) = (d\phi)(v).$$

Po trditvi 2.39 sledi

$$\phi(\exp_H(tv)) = \alpha(t) = \exp_G(t(d\phi)(v)).$$

Za $t = 1$ je ta enakost ravno komutativnost diagrama iz trditve. □

Zgled 2.41. Eksponentna preslikava krožnice S^1 je preslikava $\exp : \mathrm{i}\mathbb{R} = \mathfrak{u}(1) \to \mathrm{U}(1) = S^1$, $\exp(\mathrm{i}t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Ta preslikava je surjektivna in lokalni difeomorfizem, a ni injektivna. V splošnem pa eksponentna preslikava ni nujno lokalni difeomorfizem niti ni nujno surjektivna. Tako denimo ni težko preveriti, da diagonalna matrika $\mathrm{diag}(-2,-1) \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ ni v sliki eksponentne preslikave grupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Trditev 2.42. *Naj bo G Liejeva grupa in $x \in G$. Tedaj je $x \in G^\circ$ če, in samo če, obstajajo takšni $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathfrak{L}(G)$, da je $x = \exp(v_1)\exp(v_2)\cdots\exp(v_k)$. Posebej velja $\exp(\mathfrak{L}(G)) \subset G^\circ$.*

Preden dokažemo to trditev bomo dokazali dve lemi:

Lema 2.43. *Vsaka odprta podgrupa Liejeve grupe G je unija nekaterih komponent za povezanost Liejeve grupe G.*

Dokaz. Naj bo H odprta podgrupa Liejeve grupe G. Tedaj so tudi vsi levi odseki grupe G po podgrupi H odprte podmnožice Liejeve grupe G, saj jih dobimo tako, da podgrupo H preslikamo z levimi translacijami, te translacije pa so difeomorfizmi Liejeve grupe G. Ker levi odseki po podgrupi H tvorijo dekompozicijo Liejeve grupe, to pomeni, da je podgrupa H komplement unije vseh drugih levih odsekov. Odtod sledi, da je podgrupa H tudi zaprta podmnožica v Liejevi grupi G. Podmnožica mnogoterosti G, ki je hkrati odprta in zaprta, pa mora biti unija komponent za povezanost mnogoterosti G. $\square$

Lema 2.44. *Naj bo G Liejeva grupa in V odprta okolica nevtralnega elementa e v G, za katero je $V = V^{-1}$, kjer je $V^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in V\}$. Označimo*

$$V^k = \{x_1 x_2 \cdots x_k \mid x_1, x_2, \dots, x_k \in V\},$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, in naj bo $H = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V^k$. Tedaj velja:

(i) Množica H je odprta podgrupa Liejeve grupe G in unija nekaterih komponent za povezanost Liejeve grupe G.

(ii) Če je V povezana, je $H = G^\circ$.

(iii) Če je G povezana, je $H = G$.

Dokaz. (i) Najprej s pomočjo indukcije na k vidimo, da je množica V^k odprta, saj je $V^k = \bigcup_{x\in V} \mathrm{L}_x(V^{k-1})$. Odtod sledi, da je H odprta podmnožica Liejeve grupe G. Očitno pa je H tudi podgrupa Liejeve grupe G. Zadnji del trditve (i) sledi iz leme 2.43.

(ii) Naj bo $x \in H$. Tedaj je $x = x_1 x_2 \cdots x_k$ za neke elemente $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$. Ker je množica V povezana, lahko najdemo pot γ_i v V od e do x_i, za vsak $i = 1, 2, \dots, k$. Zdaj je

$$t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t) \cdots \gamma_k(t)$$

pot v $V^k \subset H$ od e do x. S tem smo pokazali, da je podgrupa H povezana. Ker je po točki (i) podgrupa H hkrati tudi unija komponent Liejeve grupe G, mora biti $H = G^\circ$.

(iii) Ker je podgrupa H unija komponent Liejeve grupe G, ta pa ima le eno komponento, je $H = G$. $\square$

Dokaz trditve 2.42. Po trditvi 2.37 lahko najdemo takšno odprto okolico U točke 0 v vektorskem prostoru T_eG, da je $V = \exp(U)$ odprta okolica nevtralnega elementa e v G in da je $\exp|_U : U \to V$ difeomorfizem. Predpostavimo lahko, da je U povezana in da je $U = -U$, kjer je $-U = \{-u \mid u \in U\}$. Odtod sledi, da je V povezana in da je $V^{-1} = V$. Po lemi 2.44(ii) zato sledi, da je

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V^k = G^\circ.$$

Dokazali smo torej, da vsak element $x \in G^\circ$ lahko zapišemo kot produkt

$$x = \exp(v_1)\exp(v_2)\cdots\exp(v_k)$$

za neke $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathfrak{L}(G)$.

Obratno, če je $x = \exp(v_1)\exp(v_2)\cdots\exp(v_k)$ za $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathfrak{L}(G)$, potem je preslikava

$$t \mapsto \exp(tv_1)\exp(tv_2)\cdots\exp(tv_k)$$

pot v G od e do x, zato je $x \in G^\circ$. $\square$

TRDITEV 2.45. *Naj bo G Liejeva grupa in $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$. Če je $[X, Y] = 0$, potem velja*

$$\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X).$$

DOKAZ. Ker je $[X, Y] = 0$, po posledici 1.46 difeomorfizma Φ_t^X in Φ_s^Y komutirata, za vse $s, t \in \mathbb{R}$. Odtod dobimo

$$\begin{aligned}\exp(tX)\exp(sY) &= \Phi_s^Y(\exp(tX)) \\ &= \Phi_s^Y(\Phi_t^X(e)) = \Phi_t^X(\Phi_s^Y(e)) \\ &= \Phi_t^X(\exp(sY)) = \exp(sY)\exp(tX).\end{aligned}$$

Naj bo preslikava $\alpha : \mathbb{R} \to G$ dana s predpisom $\alpha(t) = \exp(tX)\exp(tY)$. Tedaj je $\alpha(0) = e$ in

$$\begin{aligned}\alpha(s + t) &= \exp((s + t)X)\exp((s + t)Y) \\ &= \exp(sX)\exp(tX)\exp(sY)\exp(tY) \\ &= \exp(sX)\exp(sY)\exp(tX)\exp(tY) = \alpha(s)\alpha(t).\end{aligned}$$

Preslikava α je torej enoparametrična podgrupa Liejeve grupe G. Po trditvi 2.39 sledi $\alpha(t) = \exp(t\dot{\alpha}(0))$. Ker velja

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX)\exp(tY) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tY) \\ &= X_e + Y_e,\end{aligned}$$

je torej $\exp(tX)\exp(tY) = \alpha(t) = \exp(t(X + Y))$. Enakost iz trditve dobimo pri $t = 1$. □

POSLEDICA 2.46. *Liejeva algebra Liejeve grupe G je komutativna če, in samo če, je komponenta nevtralnega elementa Liejeve grupe G komutativna Liejeva grupa.*

DOKAZ. Ekvivalenca sledi direktno iz trditve 2.45 in trditve 2.42, ter iz zgleda 2.29. □

2.4. Adjungirana reprezentacija

DEFINICIJA 2.47. *Reprezentacija Liejeve grupe* G na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V je homomorfizem Liejevih grup

$$G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V}).$$

Reprezentacija Liejeve grupe je *zvesta*, če je injektivna.

DEFINICIJA 2.48. *Reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$ vektorskem prostoru V nad $\mathbb{F}$ je homomorfizem Liejevih algeber

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathsf{V}).$$

Reprezentacija Liejeve algebre je *zvesta*, če je injektivna.

ZGLED 2.49. (1) Vsaka Liejeva podgrupa H Liejeve grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ ima standardno reprezentacijo na V dano z inkluzijo $H \to \mathrm{GL}(\mathsf{V})$, in ta reprezentacija je zvesta. Posebej ima torej vsaka matrična grupa $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ standardno zvesto reprezentacijo na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$. Podobno ima vsaka Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ standardno zvesto reprezentacijo na V.

(2) Če je $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ reprezentacija Liejeve grupe G na V, je odvod $d\rho : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ na V.

Naj bo G Liejeva grupa. Za vsak $x \in G$ je konjugiranje

$$\mathrm{C}_x : G \to G$$

avtomorfizem Liejeve grupe G, zato je odvod

$$\mathrm{Ad}_x = d(\mathrm{C}_x)_e : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(G)$$

avtomorfizem Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$. S tem dobimo preslikavo

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{L}(G)) < \mathrm{GL}(\mathfrak{L}(G)),$$

$$\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{Ad}_x \,.$$

Ker za poljubna $x, y \in G$ velja $\mathrm{C}_x \circ \mathrm{C}_y = \mathrm{C}_{xy}$, po verižnem pravilu za odvod sledi $\mathrm{Ad}_x \circ \mathrm{Ad}_y = \mathrm{Ad}_{xy}$. Ker je poleg tega preslikava $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{L}(G))$ tudi gladka, je homomorfizem Liejevih grup in torej reprezentacija Liejeve grupe G na $\mathfrak{L}(G)$. Imenujemo jo *adjungirana reprezentacija* Liejeve grupe G.

Komentar 2.50. Ker je $\mathrm{C}_x = \mathrm{L}_x \circ \mathrm{R}_{x^{-1}} = \mathrm{R}_{x^{-1}} \circ \mathrm{L}_x$, odtod sledi $\mathrm{Ad}_x = d(\mathrm{L}_x)_{x^{-1}} \circ d(\mathrm{R}_{x^{-1}})_e = d(\mathrm{R}_{x^{-1}})_x \circ d(\mathrm{L}_x)_e$.

Glede na identifikacijo Liejevih algeber $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ in $\mathfrak{L}(G)$ lahko adjungirano reprezentacijo gledamo kot reprezentacijo Liejeve grupe G na $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$. Za vsak $x \in G$ imamo torej avtomorfizem Liejeve algebre $\mathrm{Ad}_x : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$, pri čemer je

$$\mathrm{Ad}_x(X) = (\mathrm{Ad}_x(X_e))^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$$

za vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$.

Zgled 2.51. Naj bo V končno dimenzionalni vektorski prostor in $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ splošna linearna grupa na V. Konjugiranje na Liejevi grupi $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ z elementom $x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ je zožitev endomorfizma Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$, danega s predpisom $A \mapsto xAx^{-1}$. Odtod sledi, da je z istim predpisom dan tudi odvod konjugiranja, torej

$$\mathrm{Ad}_x(A) = xAx^{-1}$$

za vsak $x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ in za vsak $A \in \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$.

Trditev 2.52. *Naj bo G Liejeva grupa. Za vsak element $x \in G$ velja* $\mathrm{C}_x \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_x$*, torej*

$$x \exp(X) x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x(X))$$

za vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$.

Dokaz. Enakost iz trditve je direktna posledica trditve 2.40 □

Ko adjungirano reprezentacijo $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{L}(G))$ odvajamo v nevtralnem elementu, dobimo pripadajočo reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ na $\mathfrak{L}(G)$, ki jo označimo z

$$\mathrm{ad} = d(\mathrm{Ad})_e : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}(G))$$

in imenujemo *adjungirana reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{L}(G)$. Ta reprezentacija poljubnemu elementu $v \in \mathfrak{L}(G)$ priredi linearno preslikavo

$$\mathrm{ad}_v = \mathrm{ad}(v) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}(G)).$$

Komentar 2.53. Glede na identifikacijo Liejevih algeber $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ in $\mathfrak{L}(G)$ lahko adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ gledamo tudi kot reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ na $\mathfrak{L}(G)$, pri čemer je torej $\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_{X_e}$ za vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$. Poleg tega pa lahko adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ oziroma $\mathfrak{L}(G)$ gledamo kot reprezentacijo na $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$, torej $\mathrm{ad} : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G))$ oziroma $\mathrm{ad} : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G))$, pri tem pa velja

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \mathrm{ad}_{X_e}(Y) = (\mathrm{ad}_{X_e}(Y_e))^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$$

za vse $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$.

Trditev 2.54. *Naj bo G Liejeva grupa. Za vsak $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ velja:*
(i) $\mathrm{ad}_X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$, *in*
(ii) $\mathrm{Ad}_{\exp(X)} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_X}$.

Dokaz. (i) Izračunamo

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_{X_e} = d(\mathrm{Ad})_e(X_e) &= d(\mathrm{Ad})_e\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tX)\Big)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\,.\end{aligned}$$

(ii) Za homomorfizem Liejevih grup $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G))$ uporabimo trditev 2.40 in upoštevamo, da je eksponentna preslikava na Liejevi grupi $\mathrm{GL}(\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G))$ dana z običajno eksponentno funkcijo linearnega endomorfizma (zgled 2.34). □

Trditev 2.55. *Naj bo G Liejeva grupa. Za vse $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ velja*

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Dokaz. Direktno izračunamo

$$\begin{aligned}[X,Y]_e &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\Phi_t^X)_*Y\big)_e = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big((\mathrm{R}_{\exp(tX)})_*Y\big)_e\\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\mathrm{R}_{\exp(tX)})_{\exp(-tX)}\big(Y_{\exp(-tX)}\big)\\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\mathrm{R}_{\exp(tX)})_{\exp(-tX)}\big(d(\mathrm{L}_{\exp(-tX)})_e(Y_e)\big)\\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\mathrm{C}_{\exp(-tX)})_e(Y_e)\\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(-tX)}(Y_e)\\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathrm{Ad}_{\exp(sX)}(Y_e)\\ &= \mathrm{ad}_X(Y_e).\end{aligned}$$

□

Komentar 2.56. Nekateri avtorji z enakostjo iz trditve definirajo oklepaj na tangentnem prostoru T_eG. Po drugi strani pa trditev pove, da adjungirano reprezentacijo dobimo izključno iz strukture Liejeve algebre. V resnici za poljubno Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ definiramo njeno adjungirano reprezentacijo

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

na $\mathfrak{g}$ s predpisom

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Jacobijeva identiteta pove natanko to, da je tako definirana preslikava homomorfizem Liejevih algeber, torej

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y].$$

Iz Jacobijeve identitete tudi sledi, da za endomorfizem ad_X velja Leibnizovo pravilo

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)].$$

Endomorfizmom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, za katere velja Leibnizovo pravilo, pravimo *derivacije* na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$. Množica $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ vseh derivacij na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre endomorfizmov $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, adjungirana reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ pa je torej homomorfizem Liejevih algeber

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

Vse omenjeno posebej velja seveda tudi za adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre Liejeve grupe.

2.5. Liejeve podgrupe

Pojem Liejeve podgrupe smo že definirali na začetku tega poglavja. V tem razdelku bomo Liejeve podgrupe študirali nekoliko natančneje, in posebej spoznali zvezo med povezanimi Liejevimi podgrupami Liejeve grupe G ter Liejevimi podalgebrami Liejeve algebre Liejeve grupe G.

TRDITEV 2.57. *Vsak monomorfizem Liejevih grup je imerzija.*

DOKAZ. Naj bo $\phi : H \to G$ monomorfizem Liejevih grup. Ker velja

$$\exp_G \circ (d\phi)_e = \phi \circ \exp_H$$

in ker je eksponentna preslikava difeomorfizem na majhni okolici točke 0, je preslikava $(d\phi)_e$ injektivna, torej je ϕ imerzija v točki e. Za poljubno točko $x \in H$ velja $\mathrm{L}_{\phi(x)} \circ \phi = \phi \circ \mathrm{L}_x$ in torej $d(\mathrm{L}_{\phi(x)})_e \circ (d\phi)_e = (d\phi)_x \circ d(\mathrm{L}_x)_e$. Ker so leve translacije difeomorfizmi, odtod vidimo, da je ϕ imerzija tudi v točki x. □

KOMENTAR 2.58. Iz trditve sledi, da je slika $\phi(H)$ monomorfizma Liejevih grup $\phi : H \to G$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, $\phi : H \to \phi(H)$ pa izomorfizem Liejevih grup.

TRDITEV 2.59. *Če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, je $\mathfrak{L}(H)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$.*

DOKAZ. Vložitev $\mathrm{inc} : H \to G$ je homomorfizem Liejevih grup in imerzija, zato je odvod $d(\mathrm{inc})_e : \mathfrak{L}(H) \to \mathfrak{L}(G)$ monomorfizem Liejevih algeber. □

Naj bo G Liejeva grupa ter $\mathfrak{L}(G)$ pridružena Liejeva algebra. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{L}(G) = T_eG$ definirajmo

$$F(\mathfrak{h})_x = d(\mathrm{L}_x)_e(\mathfrak{h}) \subset T_xG,$$

za vsak $x \in G$, ter $F(\mathfrak{h}) = \bigcup_{x\in G} F(\mathfrak{h})_x \subset TG$.

Tedaj je $F(\mathfrak{h})$ podsveženj tangentnega svežnja TG. Res, če izberemo poljubno bazo $v_1, \ldots, v_k$ vektorskega prostora $\mathfrak{h}$, je $(v_1)^{\mathrm{L}}, \ldots, (v_k)^{\mathrm{L}}$ ogrodje tega svežnja. Za poljubna $x, y \in G$ velja

$$d(\mathrm{L}_x)_y(F(\mathfrak{h})_y) = F(\mathfrak{h})_{xy}.$$

Ker je $\mathfrak{h}$ Liejeva algebra, je $\Gamma^\infty(F(\mathfrak{h}))$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{X}(G)$, podsveženj $F(\mathfrak{h})$ pa je involutiven, in zato po Frobeniusovem izreku tudi integrabilen. Označimo z $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ foliacijo mnogoterosti G, ki je dana s podsvežnjem $F(\mathfrak{h}) \subset TG$.

ZGLED 2.60. Naj bo H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G in $\mathfrak{h} = \mathfrak{L}(H) \subset \mathfrak{L}(G)$. Za vsak $x \in G$ je levi odsek $\mathrm{L}_x(H)$ imerzirana podmnogoterost mnogoterosti G, z gladko strukturo, za katero je $\mathrm{L}_x|_H : H \to \mathrm{L}_x(H)$ difeomorfizem. Poleg tega za vsak $y \in H$ velja

$$T_{xy}(\mathrm{L}_x(H)) = d(\mathrm{L}_x)_y(T_yH) = d(\mathrm{L}_x)_y(d(\mathrm{L}_y)_e(\mathfrak{h})) = d(\mathrm{L}_{xy})_e(\mathfrak{h}) = F(\mathfrak{h})_{xy}.$$

To pomeni, da so levi odseki $\mathrm{L}_x(H) = xH$ Liejeve grupe G po Liejevi podgrupi H integralne mnogoterosti podsvežnja $F(\mathfrak{h})$, komponente za povezanost levih odsekov xH pa so listi foliacije $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$.

LEMA 2.61. *Naj bo M gladka mnogoterost, naj bo F involutiven podsveženj tangentnega svežnja TM in naj bo Q integralna mnogoterost podsvežnja F. Če je $g : N \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima, za katero velja $g(N) \subset Q$, potem je tudi preslikava $g : N \to Q$ gladka.*

DOKAZ. Če je Q vložena podmnogoterost, potem trditev sledi iz vaje 1.29. V splošnem pa je Q lahko imerzirana podmnogoterost, in v tem primeru je potrebno dokazati, da je $g : N \to Q$ gladka preslikava. Ker gre za lokalno lastnost, lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je N povezana in da $g(N)$ leži v domeni surjektivne lokalne karte

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k},$$

za katero je $F|_U = \ker(d(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi))$. Mnogoterost Q ima števno mnogo komponent za povezanost, vsaka on njih pa je odprta podmnogoterost v nekem listu foliacije, dane s podsvežnjem F. Ker vsak tak list L seka U v množici $\bigcup_{b \in B_L} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{b\})$ za neko števno podmnožico $B_L \subset \mathbb{R}^{m-k}$, je $Q \cap U \subset \bigcup_{b \in B} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{b\})$ za neko števno podmnožico $B \subset \mathbb{R}^{m-k}$. Ker pa je N povezana, mora biti $g(N) \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{b\})$ za en sam $b \in B$. Odtod je jasno, da je g gladka, saj je $V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{b\})$ domena lokalne karte $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi|_V$ na Q. □

POSLEDICA 2.62. *Naj bo H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G in naj bo $v \in \mathfrak{L}(G)$. Tedaj so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) $v \in \mathfrak{L}(H)$,
(ii) $\exp_G(tv) \in H$ *za vsak* $t \in \mathbb{R}$,
(iii) $\exp_G(tv) \in H$ *za vsak t iz neke okolice točke 0 v* $\mathbb{R}$.

DOKAZ. Točka (ii) sledi iz (i), ker je eksponentna preslikava na H zožitev eksponentne preslikave na G. Implikacija iz (ii) v (iii) je očitna. Če velja točka (iii), potem je po lemi 2.61 preslikava $t \mapsto \exp_G(tv)$ gladka kot preslikava iz neke okolice točke $0 \in \mathbb{R}$ v Liejevo grupo H, saj je H integralna mnogoterost podsvežnja $F(\mathfrak{L}(H)) \subset TG$. Odtod sledi, da je odvod preslikave $t \mapsto \exp_G(tv)$ v točki 0 tangenten na H, torej $v \in \mathfrak{L}(H)$. □

TRDITEV 2.63. *Naj bo H povezana Liejeva podgrupa povezane Liejeve grupe G. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) *H je podgrupa edinka grupe G,*
(ii) $\mathrm{Ad}_x(\mathfrak{L}(H)) \subset \mathfrak{L}(H)$ *za vsak* $x \in G$,
(iii) $\mathfrak{L}(H)$ *je ideal v Liejevi algebri* $\mathfrak{L}(G)$.

Dokaz. Najprej dokažimo, da iz (i) sledi (ii). Predpostavimo torej, da je H podgrupa edinka grupe G, naj bo $x \in G$ in $w \in \mathfrak{L}(H)$. Za vse $t \in \mathbb{R}$ je $\exp(tw) \in H$, zato je

$$\exp(t\,\mathrm{Ad}_x(w)) = \exp(\mathrm{Ad}_x(tw)) = \mathrm{C}_x(\exp(tw)) \in H.$$

Po posledici 2.62 odtod sledi, da je

$$\mathrm{Ad}_x(w) \in \mathfrak{L}(H).$$

Predpostavimo sedaj, da velja (ii), in dokažimo (iii). Naj bo $v \in \mathfrak{L}(G)$ in $w \in \mathfrak{L}(H)$. Po točki (ii) za vsak $s \in \mathbb{R}$ velja $\mathrm{Ad}_{\exp(sv)}(w) \in \mathfrak{L}(H)$, zato tudi

$$[v, w] = \mathrm{ad}_v(w) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathrm{Ad}_{\exp(sv)}(w) \in \mathfrak{L}(H).$$

Dokažimo še, da iz (iii) sledi (i). Za poljubna $v \in \mathfrak{L}(G)$ in $w \in \mathfrak{L}(H)$ velja $\mathrm{ad}_v(w) = [v, w] \in \mathfrak{L}(H)$, zato je tudi

$$\mathrm{Ad}_{\exp(v)}(w) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_v}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_v^n(w)}{n!} \in \mathfrak{L}(H).$$

Odtod dobimo

$$\mathrm{C}_{\exp(v)}(\exp(w)) = \exp(\mathrm{Ad}_{\exp(v)}(w)) \in H.$$

Ker elementi oblike $\exp(v)$ generirajo grupo G, elementi oblike $\exp(w)$ pa generirajo grupo H, odtod sledi, da je H podgrupa edinka grupe G. □

2.5.1. Liejeve podgrupe in Liejeve podalgebre.

Trditev 2.64. *Naj bo H povezana Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, naj bo K povezana Liejeva grupa in naj bo $\phi : K \to G$ monomorfizem Liejevih grup, za katerega velja $(d\phi)_e(T_eK) = T_eH$. Tedaj je $\phi(K) = H$ in $\phi : K \to H$ je izomorfizem Liejevih grup.*

Dokaz. Po trditvi 2.57 vemo, da je ϕ imerzija in da je slika $\phi(K)$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, preslikava $\phi : K \to \phi(K)$ pa je izomorfizem Liejevih grup. Poleg tega je $(d\phi)_e : \mathfrak{L}(K) \to \mathfrak{L}(H)$ izomorfizem Liejevih algeber. Naj bo $F(\mathfrak{h})$ involutiven podsveženj tangentnega svežnja TG, ki pripada Liejevi podalgebri $\mathfrak{h} = \mathfrak{L}(H)$ Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$. Pokazali bomo, da je $\phi(K)$ integralna mnogoterost podsvežnja $F(\mathfrak{h})$. Res, za vsak $z \in K$ velja

$$\begin{aligned} T_{\phi(z)}(\phi(K)) &= (d\phi)_z(T_zK) = (d\phi)_z(d(\mathrm{L}_z)_e(T_eK)) \\ &= d(\phi \circ \mathrm{L}_z)_e(T_eK) = d(\mathrm{L}_{\phi(z)} \circ \phi)_e(T_eK) \\ &= d(\mathrm{L}_{\phi(z)})_e((d\phi)_e(T_eK)) = d(\mathrm{L}_{\phi(z)})_e(T_eH) \\ &= F(\mathfrak{h})_{\phi(z)}. \end{aligned}$$

Ker je tudi $e \in \phi(K)$, zaradi maksimalnosti integralne mnogoterosti H ter povezanosti grupe K velja $\phi(K) \subset H$.

Ker je H list foliacije, dane s podsvežnjem $F(\mathfrak{h})$, je po lemi 2.61 preslikava $\phi : K \to H$ gladka in torej monomorfizem Liejevih grup, zato tudi imerzija po trditvi 2.57. Iz enakosti $(d\phi)_e(T_eK) = T_eH$ sledi, da sta dimenziji Liejevih grup K in H enaki, zato je monomorfizem $\phi : K \to H$ lokalni difeomorfizem. Posebej to pomeni, da je slika $\phi(K)$ odprta podgrupa v povezani Liejevi grupi H, odtod pa sledi $\phi(K) = H$. □

KOMENTAR 2.65. Iz trditve sledi, da za vsak vektorski podprostor V tangentnega prostora T_eG obstaja največ ena povezana Liejeva podgrupa H Liejeve grupe G, za katero je $T_eH = \mathsf{V}$. Seveda je to mogoče le v primeru, da je V Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G) = T_eG$.

IZREK 2.66. *Naj bo G Liejeva grupa. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa H Liejeve grupe G, za katero je $\mathfrak{L}(H) = \mathfrak{h}$.*

KOMENTAR 2.67. Izrek, skupaj s trditvijo 2.59, torej pove, da je s preslikavo $H \mapsto \mathfrak{L}(H)$ dana bijekcija med povezanimi Liejevimi podgrupami Liejeve grupe G in Liejevimi podalgebrami Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$.

Iz osnovnih lastnosti eksponentne preslikave sledi, da je povezana podgrupa H Liejeve grupe G, za katero je $\mathfrak{L}(H) = \mathfrak{h}$, generirana z množico $\exp_G(\mathfrak{h})$.

DOKAZ. Naj bo $F(\mathfrak{h})$ involutiven podsveženj tangentnega svežnja TG, ki pripada Liejevi podalgebri $\mathfrak{h}$, in naj bo H tisti list pripadajoče foliacije $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$, ki vsebuje nevtralni element e.

Najprej bomo dokazali, da je H podgrupa grupe G. Naj bo $x \in H$. Ker je $\mathrm{L}_{x^{-1}} : G \to G$ difeomorfizem, je $\mathrm{L}_{x^{-1}}|_H : H \to G$ injektivna imerzija, glede na katero slika $\mathrm{L}_{x^{-1}}(H)$ dobi strukturo imerzirane podmnogoterosti, $\mathrm{L}_{x^{-1}}|_H : H \to \mathrm{L}_{x^{-1}}(H)$ pa je difeomorfizem. Poleg tega je $\mathrm{L}_{x^{-1}}(H)$ integralna mnogoterost podsvežnja $F(\mathfrak{h})$, saj za vsak $y \in H$ velja

$$T_{x^{-1}y}(\mathrm{L}_{x^{-1}}(H)) = d(\mathrm{L}_{x^{-1}})_y(T_yH) = d(\mathrm{L}_{x^{-1}})_y(F(\mathfrak{h})_y) = F(\mathfrak{h})_{x^{-1}y}.$$

Ker je $x \in H$, velja $e \in \mathrm{L}_{x^{-1}}(H)$. Zaradi maksimalnosti integralne mnogoterosti H odtod sledi, da je $\mathrm{L}_{x^{-1}}(H) \subset H$. Posebej to pomeni, da je $x^{-1}y \in H$ za vse $x, y \in H$, torej je H res podgrupa grupe G.

Podgrupa H grupe G je tudi imerzirana podmnogoterost mnogoterosti G. Množenje $\mu_G : G \times G \to G$ na grupi G lahko zožimo na imerzirano podmnogoterost $H \times H$, in dobimo gladko preslikavo $\mu_H : H \times H \to G$, katere slika je vsebovana v H. Po lemi 2.61 sledi, da je μ_H gladka tudi kot preslikava $\mu_H : H \times H \to H$. Podobno vidimo, da je tudi zožitev invertiranja gladka preslikava $H \to H$. Ugotovili smo torej, da je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G.

Iz konstrukcije Liejeve podgrupe H je jasno, da je $\mathfrak{L}(H) = \mathfrak{h}$. Enoličnost sledi iz trditve 2.64. □

2.5.2. Zaprte Liejeve podgrupe. Liejeva grupa H je *zaprta Liejeva podgrupa* Liejeve grupe G, če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G in je hkrati H zaprta podmnožica mnogoterosti G.

TRDITEV 2.68. *Naj bo G Liejeva grupa in naj bo H podgrupa grupe G, ki je hkrati tudi vložena podmnogoterost mnogoterosti G. Tedaj je H zaprta Liejeva podgrupa Liejeve grupe G.*

DOKAZ. Vemo že, da je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. Dokazati moramo le, da je zaprta. Ker je H vložena podmnogoterost, lahko najdemo takšno lokalno karto

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

na G, da je $e \in U$ in da je $\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Naj bo (x_i) poljubno zaporedje točk iz H, ki konvergira proti točki $y \in G$. Dokazati moramo, da je $y \in H$.

Ker je leva translacija L_y difeomorfizem, je $\mathrm{L}_y(U)$ odprta okolica točke y. Ker zaporedje (x_i) točk iz H konvergira k y, je $\mathrm{L}_y(U) \cap H \neq \emptyset$. Izberimo poljubno točko $x \in \mathrm{L}_y(U) \cap H$. Vidimo, da velja $y^{-1}x \in U$, poleg tega pa zaporedje $(x_i^{-1}x)$ točk iz H konvergira k točki $y^{-1}x$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da vsi členi zaporedja $(x_i^{-1}x)$ ležijo v množici U. Zdaj je $(\varphi(x_i^{-1}x))$ zaporedje točk iz $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, ki konvergira proti točki $\varphi(y^{-1}x) \in \varphi(U)$. To je mogoče le, če je $\varphi(y^{-1}x) \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, torej je $y^{-1}x \in H$. Odtod sledi, da je $y \in H$. $\square$

IZREK 2.69. *Naj bo G Liejeva grupa in H podgrupa grupe G, ki je zaprta podmnožica mnogoterosti G. Tedaj obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti na grupi H, glede na katero je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. S to gladko strukturo je H zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti G.*

Zaprto podgrupo Liejeve grupe bomo vedno opremili s strukturo Liejeve podgrupe iz izreka. Iz izreka direktno sledi, da je vsaka zaprta Liejeva podgrupa Liejeve grupe G zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti G.

Preden dokažemo izrek, bomo izpeljali nekaj rezultatov, ki jih bomo uporabili v dokazu.

LEMA 2.70. *Naj bo G Liejeva grupa in naj bo preslikava $\theta : T_eG \times T_eG \to G$ dana s predpisom $\theta(v, w) = \exp(v) \exp(w)$. Tedaj velja:*

(i) Preslikava θ je gladka, za njen odvod $(d\theta)_{(0,0)} : T_eG \times T_eG \to T_eG$ pa velja $(d\theta)_{(0,0)}(v, w) = v + w$.

(ii) Če sta V in W komplementarna vektorska podprostora tangentnega prostora T_eG, potem obstajata takšna odprta okolica V točke 0 v vektorskem prostoru V in takšna odprta okolica W točke 0 v vektorskem prostoru W, da je $\theta(V \times W)$ odprta okolica nevtralnega elementa v Liejevi grupi G in da je zožitev

$$\theta|_{V\times W} : V \times W \to \theta(V \times W)$$

difeomorfizem.

DOKAZ. Točko (i) dobimo z odvajanjem in upoštevanjem osnovnih lastnosti eksponentne preslikave, točka (ii) pa je direktna posledica točke (i) in izreka o inverzni funkciji. $\square$

Za poljubno Liejevo grupo G lahko najdemo takšno odprto okolico U točke 0 v $\mathfrak{L}(G)$, da je $\exp(U)$ odprta okolica nevtralnega elementa v Liejevi grupi G in da je $\exp|_U : U \to \exp(U)$ difeomorfizem. Inverz tega difeomorfizma imenujemo *logaritemska preslikava* in označimo z

$$\log = \log_G^U : \exp(U) \to U.$$

Logaritemska preslikava je torej odvisna od izbire domene U. Drugačna izbira domene bi nam dala drugačno logaritemsko preslikavo, vendar bi se ta ujemala s preslikavo $\log_G^U$ na neki okolici nevtralnega elementa v Liejevi grupi G.

LEMA 2.71. *Naj bo G Liejeva grupa. Tedaj za vse $v, w \in T_eG$ in vsak $s \in \mathbb{R}$ velja*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \log\big(\exp(tv)\exp(tw)\big) = v + w$$

in

$$\lim_{n\to\infty} \big(\exp(\tfrac{s}{n}v)\exp(\tfrac{s}{n}w)\big)^n = \exp(s(v + w)).$$

Dokaz. S predpisom $(v,w) \mapsto \log(\exp(v)\exp(w))$ je definirana gladka preslikava $\kappa : S \to T_eG$, definirana na neki majhni odprti okolici S točke $(0,0)$ v $T_eG \times T_eG$. Ker je odvod eksponentne preslikave v točki 0 identiteta, je tudi odvod logaritemske preslikave v točki e identiteta, ob upoštevanju leme 2.70(i) pa to pomeni, da je

$$(d\kappa)_{(0,0)}(v,w) = v + w.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \log\big(\exp(tv)\exp(tw)\big) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \kappa(tv,tw) \\
&= (d\kappa)_{(0,0)}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(tv,tw)\Big) \\
&= (d\kappa)_{(0,0)}(v,w) \\
&= v + w.
\end{aligned}$$

S substitucijo $t = s/n$ in množenjem dobljene enakosti z s dobimo

$$\lim_{n\to\infty} n \log\big(\exp(\tfrac{s}{n}v)\exp(\tfrac{s}{n}w)\big) = s(v+w),$$

odtod pa

$$\lim_{n\to\infty} \exp\big(n\log\big(\exp(\tfrac{s}{n}v)\exp(\tfrac{s}{n}w)\big)\big) = \exp(s(v+w)).$$

Ker je $\exp(nu) = (\exp(u))^n$ za vsak $u \in T_eG$, smo s tem izračunali tudi drugo limito iz leme. $\square$

Lema 2.72. *Naj bo G Liejeva grupa in H podgrupa grupe G, ki je zaprta podmnožica mnogoterosti G. Naj bo*

$$\mathcal{T} = \{w \in T_eG \mid \exp(tw) \in H \text{ za vse } t \in \mathbb{R}\}.$$

Tedaj velja:

(i) Tangentni vektor $w \in T_eG$ pripada množici $\mathcal{T}$ če, in samo če, obstajata takšno zaporedje (w_n) v tangentnem prostoru T_eG in takšno zaporedje realnih števil (t_n), da je $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(t_n w_n) = w$ in $\exp(w_n) \in H$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Množica $\mathcal{T}$ je vektorski podprostor tangentnega prostora T_eG.

Dokaz. (i) Če je $w \in \mathcal{T}$, potem vzamemo $t_n = n$ in $w_n = \frac{1}{n}w$ in dobimo zaporedji, ki potrjujeta, da tangentni vektor w izpolnjuje pogoj iz točke (i).

Obratno, naj bo $w \in T_eG$ in predpostavimo, da lahko najdemo zaporedje (w_n) v tangentnem prostoru T_eG in zaporedje realnih števil (t_n), da velja $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(t_n w_n) = w$ in $\exp(w_n) \in H$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokazati moramo, da je $w \in \mathcal{T}$.

Najprej bomo dokazali, da je $\exp(w) \in H$. Če je $w = 0$, potem to seveda drži. Predpostavimo torej, da je $w \neq 0$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $t_n \geq 0$, saj v nasprotnem primeru lahko hkrati zamenjamo predznak tangentnemu vektorju w_n in številu t_n. Za vsak n naj bo m_n tisto naravno število, za katero je $m_n - 1 \leq t_n < m_n$. Ker je $w \neq 0$, mora veljati $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, zato tudi $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ in $\lim_{n\to\infty}(t_n/m_n) = 1$. Odtod dobimo

$$\begin{aligned}
\exp(w) &= \exp(\lim_{n\to\infty} t_n w_n) = \exp\big(\lim_{n\to\infty}((t_n/m_n)m_n w_n)\big) \\
&= \exp(\lim_{n\to\infty} m_n w_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(m_n w_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp(w_n)^{m_n}.
\end{aligned}$$

Ker elementi $\exp(w_n)^{m_n}$ ležijo v H in ker je H zaprta v G, odtod sledi $\exp(w) \in H$.

Naj bo zdaj t poljubno realno število. Opazimo, da tudi vektor tw izpolnjuje pogoj iz točke (i), po že dokazanem pa lahko zaključimo, da je tudi $\exp(tw) \in H$. S tem smo dokazali, da je $w \in \mathcal{T}$.

(ii) Očitno je, da je možica $\mathcal{T}$ zaprta za produkt s skalarjem. Naj bosta $v, w \in \mathcal{T}$. Dokazati moramo, da je $v + w \in \mathcal{T}$.

Izberimo odprto okolico U točke 0 v T_eG, za katero je $\exp(U)$ odprta podmnožica Liejeve grupe G in $\exp|_U : U \to \exp(U)$ difeomorfizem z inverzom log. Za dovolj velik n produkt $\exp(\frac{1}{n}v)\exp(\frac{1}{n}w)$ leži v množici $\exp(U)$, zato obstaja natanko en $u_n \in U$, za katerega je

$$\exp(u_n) = \exp(\tfrac{1}{n}v)\exp(\tfrac{1}{n}w).$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} \exp(u_n) = e$ in ker je preslikava $\exp|_U : U \to \exp(U)$ difeomorfizem, je $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ker sta v in w v množici $\mathcal{T}$, sta elementa $\exp(\frac{1}{n}v)$ in $\exp(\frac{1}{n}w)$ v podgrupi H, odtod pa sledi, da je tudi njun produkt $\exp(u_n) = \exp(\frac{1}{n}v)\exp(\frac{1}{n}w)$ v H. Poleg tega tudi velja

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to\infty} n \log\big(\exp(\tfrac{1}{n}v)\exp(\tfrac{1}{n}w)\big) = v + w$$

po lemi 2.71. S tem smo pokazali, da tangentni vektor $v + w$ izpolnjuje pogoj iz točke (i), zato po točki (i) sledi $v + w \in \mathcal{T}$. □

Lema 2.73. *Naj bo G Liejeva grupa in H podgrupa grupe G, ki je zaprta podmnožica mnogoterosti G. Če obstaja takšna lokalna karta*

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

na Liejevi grupi G, da je $e \in U$ in da velja

$$\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

tedaj obstaja struktura gladke mnogoterosti na grupi H, glede na katero je H zaprta vložena podmnogoterost mnogoterosti G in Liejeva podgrupa Liejeve grupe G.

Dokaz. Kompozicija $\vartheta = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi|_{U\cap H}$ je lokalna karta na množici $U \cap H$, glede na katero je $U \cap H$ vložena podmnogoterost Liejeve grupe G. Ostale lokalne karte na H dobimo s translacijami, kot kompozicije $\vartheta \circ \mathrm{L}_{x^{-1}}|_{\mathrm{L}_x(U\cap H)} : \mathrm{L}_x(U \cap H) \to \mathbb{R}^k$ za vse $x \in H$. Ni težko preveriti, da na ta način H postane vložena podmnogoterost Liejeve grupe G. Ker je H tudi podgrupa grupe G, je torej Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. □

Dokaz izreka 2.69. Po lemi 2.72(ii) je množica

$$\mathcal{T} = \{w \in T_eG \mid \exp(tw) \in H \text{ za vse } t \in \mathbb{R}\}$$

vektorski podprostor tangentnega prostora T_eG. Če na podgrupi H obstaja takšna gladka struktura, da je glede na njo H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, mora biti po posledici 2.62 tangentni prostor podmnogoterosti H v nevtralnem elementu natanko enak podprostoru $\mathcal{T}$. Posebej to pomeni, da je v tem primeru $\mathcal{T}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ in da je komponenta nevtralnega elementa Liejeve grupe H ravno tista povezana Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, ki ima $\mathcal{T}$ za svojo Liejevo algebro (izrek 2.66). Odtod sledi enoličnost strukture gladke mnogoterosti na H, glede na katero je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, saj je takšna gladka struktura na H preko levih translacij seveda enolično določena z gladko strukturo na komponenti nevtralnega elementa Liejeve grupe H.

Dokažimo zdaj obstoj takšne gladke strukture na H. Izberimo komplementarni podprostor V podprostora $\mathcal{T}$ v tangentnem prostoru T_eG, torej

$$T_eG = \mathsf{V} \oplus \mathcal{T} = \mathsf{V} \times \mathcal{T}.$$

Naj bo $\theta : T_eG = \mathsf{V} \times \mathcal{T} \to G$ dana s predpisom $\theta(v, w) = \exp(v)\exp(w)$ za vse $v \in \mathsf{V}$ ter $w \in \mathcal{T}$. Po lemi 2.70(ii) obstajata odprta okolica V točke 0 v V in odprta okolica W točke 0 v $\mathcal{T}$, da je $\theta(V \times W)$ odprta okolica nevtralnega elementa v G in da je $\theta|_{V\times W} : V \times W \to \theta(V \times W)$ difeomorfizem.

Iz definicije preslikave θ je jasno, da je $\theta(\{0\} \times \mathcal{T}) \subset H$. Pokazali bomo, da lahko izberemo odprti množici V in W tako majhni, da je

$$\theta(\{0\} \times W) = \theta(V \times W) \cap H.$$

Če to ne bi bilo res, bi obstajalo zaporedje $((v_n, w_n))$ točk iz množice $V \times W$, ki bi konvergiralo k točki $(0, 0)$, ob tem pa bi veljalo $v_n \neq 0$ in $\theta(v_n, w_n) \in H$ za vsak n. Pokazali bomo, da nas takšna predpostavka pripelje do protislovja. Ker je $\theta(v_n, w_n) = \exp(v_n)\exp(w_n) \in H$ in je $\exp(w_n) \in H$, je tudi $\exp(v_n) \in H$. Izberimo poljubno normo $\|\text{-}\|$ na vektorskem prostoru V in naj bo $t_n = 1/\|v_n\|$ za vsak n. Ker so vektorji t_nv_n normirani in je enotska sfera glede na izbrano normo kompaktna podmnožica prostora V, lahko izberemo konvergentno podzaporedje $(t_{n_i}v_{n_i})$ zaporedja (t_nv_n), ki konvergira k vektorju $v \in \mathsf{V}$ z normo 1. Podzaporedji (v_{n_i}) in (t_{n_i}) potrjujeta, da tangentni vektor v izpolnjuje pogoj iz leme 2.72(i), zato po tej lemi sledi, da je $v \in \mathcal{T}$, kar pa je protislovje.

Izberemo torej odprti množici V in W tako, da je $\theta(\{0\}\times W) = \theta(V \times W)\cap H$. Izberimo izomorfizma vektorskih prostorov $\tau : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^k$ in $\sigma : \mathsf{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$. S tem dobimo izomorfizem vektorskih prostorov $\eta : \mathsf{V} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\eta(v, w) = (\tau(w), \sigma(v))$. Inverz difeomorfizma $\theta|_{V\times W} : V \times W \to \theta(V \times W)$, komponiran z izomorfizmom vektorskih prostorov η, je lokalna karta na G, ki izpolnjuje pogoje leme 2.73. Z uporabo te leme je dokaz končan. □

Posledica 2.74. *Naj bo $\phi : H \to G$ homomorfizem Liejevih grup. Tedaj obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti na grupi* $\ker\phi$*, glede na katero je* $\ker\phi$ *Liejeva podgrupa Liejeve grupe H. Liejeva podgrupa* $\ker\phi$ *je zaprta Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe H in velja* $\mathfrak{L}(\ker\phi) = \ker(\mathfrak{L}(\phi))$.

Dokaz. Ker je $\ker\phi$ zaprta podgrupa grupe H, za njo velja izrek 2.69, torej je $\ker\phi$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe H. Enakost $\mathfrak{L}(\ker\phi) = \ker(\mathfrak{L}(\phi))$ sledi iz osnovnih lastnosti eksponentne preslikave in posledice 2.62. □

Zgled 2.75. Naj bo G Liejeva grupa. Center $\mathrm{Z}(G)$ Liejeve grupe G je zaprta podgrupa Liejeve grupe G in torej Liejeva podgrupa. Opazimo lahko, da velja $\mathrm{Z}(G^\circ) = \ker\mathrm{Ad}$. Res, element $x \in G$ leži v centru $\mathrm{Z}(G^\circ)$ če, in samo če, velja $\mathrm{C}_x(\exp(tw)) = \exp(tw)$ za vsak $w \in \mathfrak{L}(G)$ in za vsak $t \in \mathbb{R}$, zaradi identitete $\exp(\mathrm{Ad}_x(tw)) = \mathrm{C}_x(\exp(tw))$ pa to drži natanko tedaj, ko je $\mathrm{Ad}_x(w) = w$ za vsak $w \in \mathfrak{L}(G)$. Iz posledice 2.74 zdaj sledi, da je

$$\mathfrak{L}(\mathrm{Z}(G^\circ)) = \mathfrak{L}(\ker\mathrm{Ad}) = \ker(\mathfrak{L}(\mathrm{Ad})) = \ker(\mathrm{ad}).$$

Jedro adjungirane reprezentacije $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ poljubne Liejeve algebre imenujemo *center* Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ in označimo

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \ker(\mathrm{ad}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ za vse } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Za Liejevo grupo G velja torej $\mathfrak{L}(\mathrm{Z}(G^\circ)) = \mathrm{Z}(\mathfrak{L}(G))$.

2.6. Kvocienti

2.6.1. Mnogoterost levih odsekov. V tem podrazdelku bomo pokazali, da ima množica levih odsekov Liejeve grupe po zaprti podgrupi naravno strukturo mnogoterosti.

LEMA 2.76. *Naj bo K zaprta Liejeva podgrupa Liejeve grupe G in naj bo $\mu : G \times G \to G$ množenje v Liejevi grupi G.*

(i) Za vsak $x \in G$ obstaja takšna vložena podmnogoterost S mnogoterosti G, da je $x \in S$, da je $\mu(S \times K)$ odprta podmnožica mnogoterosti G in da je zožitev

$$\mu|_{S \times K} : S \times K \to \mu(S \times K) \subset G$$

difeomorfizem. Posebej torej za vsak $z \in S$ velja $T_z G = T_z S \oplus T_z(\mathrm{L}_z(K))$.

(ii) Če je ob tem Q poljubna vložena podmnogoterost mnogoterosti G, za katero velja $Q \subset \mu(S \times K)$ in $T_q G = T_q Q \oplus T_q(\mathrm{L}_q(K))$ za vsak $q \in Q$, potem je preslikava $Q \to S$, $q \mapsto \mathrm{pr}_1((\mu|_{S\times K})^{-1}(q))$, lokalni difeomorfizem.

DOKAZ. (i) Izberimo komplementarni podprostor V prostora $\mathfrak{L}(K)$ v $\mathfrak{L}(G)$, torej $\mathfrak{L}(G) = \mathsf{V} \oplus \mathfrak{L}(K) = \mathsf{V} \times \mathfrak{L}(K)$, in definirajmo preslikavo $\theta : \mathsf{V} \times \mathfrak{L}(K) \to G$ s predpisom $\theta(v, w) = \exp(v)\exp(w)$ za vsak $v \in \mathsf{V}$ in vsak $w \in \mathfrak{L}(K)$. Po lemi 2.70 lahko izberemo odprto okolico V točke 0 v V in odprto okolico W točke 0 v $\mathfrak{L}(K)$ tako, da je $\theta(V \times W)$ odprta okolica nevtralnega elementa v G in da je $\theta|_{V\times W} : V \times W \to \theta(V \times W)$ difeomorfizem.

Najprej vidimo, da je $\theta(\{0\} \times W) = \exp(W)$ odprta okolica nevtralnega elementa v K in da je $\theta(\{v\} \times W) \subset \exp(v)K$ za vsak $v \in \mathsf{V}$. Odprto okolico V lahko izberemo tako majhno, da vsak levi odsek grupe G po podgrupi K seka množico $\exp(V) = \theta(V \times \{0\})$ v največ eni točki. V nasprotnem primeru bi namreč lahko izbrali zaporedji (u_n) in (v_n) točk iz V, ki obe konvergirata k 0, tako da je $u_n \neq v_n$ in da je $\exp(u_n)K = \exp(v_n)K$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da zaporedje (x_n) točk iz K, dano s predpisom $x_n = \exp(u_n)^{-1}\exp(v_n)$, konvergira k e, zato za dovolj velike n velja $x_n \in \exp(W)$, torej $x_n = \exp(z_n)$ za nek $z_n \in W$. Odtod sledi $\theta(u_n, z_n) = \theta(v_n, 0)$, zaradi injektivnosti $\theta|_{V\times W}$ pa to ni mogoče, če $u_n \neq v_n$.

Vzemimo torej okolico V tako majhno, da vsak levi odsek grupe G po podgrupi K seka množico $\exp(V)$ v največ eni točki. Množica $N = \exp(V)$ je vložena podmnogoterost mnogoterosti G, difeomorfna mnogoterosti V, in preslikava $\mu|_{N\times K} : N \times K \to \mu(N \times K) \subset G$ je bijekcija. Ker velja

$$\mu|_{N\times \exp(W)} \circ (\exp|_V \times \exp|_W) = \theta|_{V\times W}$$

in ker so preslikave $\exp|_V : V \to \exp(V)$, $\exp|_W : W \to \exp(W) \subset K$ in $\theta|_{V\times W} : V \times W \to \theta(V \times W)$ difeomorfizmi, odtod sledi, da je $\mu(N \times \exp(W)) = \theta(V \times W)$ odprta podmnožica mnogoterosti G in da je preslikava $\mu|_{N\times\exp(W)} : N \times \exp(W) \to \mu(N \times \exp(W))$ difeomorfizem.

Naj bo zdaj y poljubna točka iz K. Množica $\mathrm{R}_y(\exp(W))$ je odprta podmnožica v K, množica $\mathrm{R}_y(\mu(N \times \exp(W)))$ je odprta podmnožica v G in

$$\mu|_{N\times \mathrm{R}_y(\exp(W))} = \mathrm{R}_y \circ \mu|_{N\times\exp(W)} \circ (\mathrm{id}_N \times \mathrm{R}_{y^{-1}}).$$

Odtod sledi, da je tudi $\mu|_{N\times \mathrm{R}_y(\exp(W))} : N \times \mathrm{R}_y(\exp(W)) \to \mathrm{R}_y(\mu(N \times \exp(W)))$ difeomorfizem. Ker to velja za vsak $y \in K$, smo s tem dokazali, da je množica $\mu(N \times K) = \bigcup_{y\in K} \mathrm{R}_y(\mu(N \times \exp(W)))$ odprta v G in da je bijekcija

$$\mu|_{N\times K} : N \times K \to \mu(N \times K)$$

difeomorfizem.

Naj bo zdaj $x \in G$ poljuben in naj bo S vložena podmnogoterost mnogoterosti G, ki jo dobimo kot levo translacijo mnogoterosti N z elementom x, torej $S = \mathrm{L}_x(N)$. Ker je $e \in N$, velja $x \in S$. Zdaj je $\mu(S \times K) = \mathrm{L}_x(\mu(N \times K))$ odprta podmnožica v G in

$$\mu|_{S\times K} : S \times K \to \mu(S \times K)$$

je difeomorfizem, saj je $\mu|_{S\times K} = \mathrm{L}_x \circ \mu|_{N\times K} \circ (\mathrm{L}_{x^{-1}} \times \mathrm{id}_K)$.

(ii) Označimo z ν inverz difeomorfizma $\mu|_{S\times K} : S \times K \to \mu(S \times K)$. Množica $R = \nu(Q)$ je vložena podmnogoterost v $S \times K$, tako da je $\mu|_R : R \to Q$ difeomorfizem. Za poljubno točko $(z, y) \in R \subset S \times K$ je $\mu(\{z\} \times K) = \mathrm{L}_z(K) = \mathrm{L}_{zy}(K)$, odtod pa sledi

$$\begin{aligned} T_{(z,y)}(S \times K) &= (d\nu)_{zy}(T_{zy}G) = (d\nu)_{zy}(T_{zy}Q \oplus T_{zy}(\mathrm{L}_{zy}(K))) \\ &= (d\nu)_{zy}(T_{zy}Q) \oplus (d\nu)_{zy}(T_{zy}(\mathrm{L}_{zy}(K))) \\ &= T_{(z,y)}R \oplus T_{(z,y)}(\{z\} \times K). \end{aligned}$$

Ker je $T_{(z,y)}(\{z\}\times K)$ jedro odvoda projekcije $\mathrm{pr}_1 : S\times K \to S$, je torej $d(\mathrm{pr}_1)_{(z,y)} : T_{(z,y)}R \to T_zS$ izomorfizem vektorskih prostorov. S tem smo dokazali, da je preslikava $\mathrm{pr}_1|_R : R \to S$ lokalni difeomorfizem, odtod pa sledi, da je tudi preslikava $\mathrm{pr}_1 \circ \nu|_Q : Q \to S$ lokalni difeomorfizem. □

Lema 2.77. *Naj bo $\pi : N \to Q$ surjektivna submerzija med mnogoterostima, naj bo M mnogoterost in $h : Q \to M$ poljubna preslikava. Tedaj je h gladka če, in samo če, je kompozicija $h \circ \pi$ gladka.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $h \circ \pi$ gladka. Ker je π surjektivna submerzija, iz normalne forme submerzije sledi, da za vsak $q \in Q$ lahko najdemo odprto okolico W točke q v Q in gladek prerez $\sigma : W \to N$ preslikave π, torej gladko preslikavo σ, za katero je $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_W$. Ker je $h|_W = (h \circ \pi) \circ \sigma$, odtod sledi, da je preslikava h gladka. □

Trditev 2.78. *Naj bo K zaprta Liejeva podgrupa Liejeve grupe G. Tedaj na množici levih odsekov G/K obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti, za katero je kvocientna projekcija $G \to G/K$ submerzija.*

Množico levih odsekov G/K bomo vedno opremili s strukturo gladke mnogoterosti iz trditve.

Dokaz. Naj bo $\pi : G \to G/K$ kvocientna projekcija. Definiramo, da je podmnožica $V \subset G/K$ odprta če, in samo če, je praslika $\pi^{-1}(V)$ odprta podmnožica v G. S tem smo definirali topologijo na množici G/K, glede na katero je projekcija π zvezna. Poleg tega je za poljubno odprto podmnožico U Liejeve grupe G slika $\pi(U)$ odprta v G/K, saj je $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in K} \mathrm{R}_x(U)$. Prostor G/K je zato 2-števen: Ker je mnogoterost G 2-števna, lahko izberemo števno družino $\mathcal{B}$ odprtih podmnožic mnogoterosti G, tako da je vsaka odprta podmnožica mnogoterosti G unija množic iz $\mathcal{B}$. Zdaj je družina $\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ števna družina odprtih podmnožic topološkega prostora G/K, in vsaka odprta podmnožica v G/K je unija množic iz $\pi(\mathcal{B})$.

Pokažimo, da je topološki prostor G/K Hausdorffov. Naj bosta xK in yK dva različna leva odseka iz G/K. Najprej vidimo, da lahko najdemo odprti okolici U_x točke x in U_y točke y v G, da je $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. V nasprotnem primeru bi namreč lahko izbrali zaporedji (x_n) in (y_n) točk iz G, tako da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ in $x_n K = y_n K$ za vsak n. Odtod bi sledilo, da zaporedje $(x_n^{-1} y_n)$ točk iz K konvergira k $x^{-1}y$, zaradi zaprtosti podgrupe K pa dobimo $x^{-1}y \in K$, torej protislovje. Okolici U_x in U_y torej izberemo tako majhni, da je $\pi(U_x)\cap\pi(U_y) = \emptyset$, odtod pa sledi, da sta $\pi(U_x)$ in $\pi(U_y)$ disjunktni odprti okolici odsekov xH in yH v G/K. Topološki prostor G/K je torej res Hausdorffov.

Konstruirajmo zdaj gladko strukturo na topološkem prostoru G/K. Po lemi 2.76(i) za vsak $x \in G$ lahko najdemo vloženo podmnogoterost $S_x \subset G$, da je $x \in S_x$, da je $\mu(S_x \times K)$ odprta podmnožica v G in da je

$$\mu|_{S_x\times K} : S_x \times K \to \mu(S_x \times K)$$

difeomorfizem. Če izberemo podmnogoterost S_x dovolj majhno, lahko predpostavimo, da obstaja difeomorfizem η_x iz S_x na odprto podmnožico prostora $\mathbb{R}^{n-k}$, kjer je n dimenzija Liejeve grupe G in k dimenzija Liejeve podgrupe K. Množica $\pi(S_x)$ je odprta v G/K, saj je $\pi^{-1}(\pi(S_x)) = \mu(S_x \times K)$. Poleg tega je zožitev $\pi|_{S_x} : S_x \to \pi(S_x)$ je homeomorfizem. Zdaj definiramo lokalno karto na G/K

$$\varphi_x = \eta_x \circ (\pi|_{S_x})^{-1} : \pi(S_x) \to \mathbb{R}^{n-k},$$

za vse izbire točke x pa te karte sestavljajo atlas na topološkem prostoru G/K. Gladkost prehodnih preslikav med temi lokalnimi kartami sledi iz leme 2.76(ii). Iz konstrukcije je tudi jasno, da je glede na dobljeno strukturo gladke mnogoterosti na G/K projekcija $\pi : G \to G/K$ surjektivna submerzija, saj je za vsak $x \in G$ preslikava $\pi|_{S_x} : S_x \to \pi(S_x)$ difeomorfizem.

Enoličnost gladke strukture na G/K sledi iz leme 2.77. Res, če je $h : G/K \to Q$ poljubna bijekcija med mnogoterostima in če je $h\circ\pi$ submerzija, potem z dvakratno uporabo leme 2.77 vidimo, da mora biti h difeomorfizem. □

Trditev 2.79. *Naj bo K zaprta podgrupa Liejeve grupe G in $g : G \to M$ gladka preslikava med mnogoterostima, za katero velja $xK \subset g^{-1}(g(x))$ za vsak $x \in G$. Tedaj obstaja natanko ena gladka preslikava $\bar{g} : G/K \to M$, za katero je $\bar{g} \circ \pi = g$, kjer je $\pi : G \to G/K$ kvocientna projekcija.*

Dokaz. Preslikava $\bar{g} : G/K \to M$ je dobro definirana s predpisom $\bar{g}(xK) = g(x)$. Iz leme 2.77 sledi, da je preslikava $\bar{g}$ gladka. □

2.6.2. Kvocientna Liejeva grupa. Naslednja trditev nam pove, da je kvocient Liejeve grupe po zaprti podgrupi edinki spet Liejeva grupa.

Trditev 2.80. *Naj bo K zaprta Liejeva podgrupa edinka Liejeve grupe G. Tedaj obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti na kvocientni grupi G/K, glede na katero je G/K Liejeva grupa, kvocientna projekcija $\pi : G \to G/K$ pa submerzija in epimorfizem Liejevih grup.*

Če je $\phi : G \to L$ poljuben homomorfizem Liejevih grup, za katerega velja $K \subset \ker\phi$, potem obstaja natanko en tak homomorfizem Liejevih grup $\bar{\phi} : G/K \to L$, da je $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$.

Komentar 2.81. Liejevo grupo G/K imenujemo *kvocientna Liejeva grupa* Liejeve grupe G po zaprti podgrupi edinki K.

Dokaz. Obstoj in enoličnost gladke strukture na G/K sledi iz trditve 2.78. Iz leme 2.77 sledi, da je G/K Liejeva grupe. Zadnji del trditve je direktna posledica trditve 2.79. □

Posledica 2.82. *Naj bo $\phi : H \to G$ homomorfizem Liejevih grup, naj bo $\pi : H \to H/\ker\phi$ kvocientna projekcija in $\bar{\phi} : H/\ker\phi \to G$ homomorfizem Liejevih grup, za katerega je $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$. Tedaj je obstaja natanko ena takšna struktura gladke mnogoterosti na sliki $\phi(H)$, da je homomorfizem $\bar{\phi} : H/\ker\phi \to \phi(H)$ difeomorfizem. S to gladko strukturo je $\phi(H)$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe G z Liejevo algebro $\mathfrak{L}(\phi(H)) = \mathfrak{L}(\phi)(\mathfrak{L}(H))$.*

Dokaz. Po trditvi 2.80 sledi, da je $\bar{\phi} : H/\ker\phi \to G$ monomorfizem Liejevih grup. Njegova slika $\phi(H)$ ima zato naravno strukturo Liejeve podgrupe Liejeve grupe G, tako da je $\bar{\phi} : H/\ker\phi \to G$ izomorfizem. $\square$

Zgled 2.83. Naj bo V končno dimenzionalen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Center $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(\mathsf{V}))$ splošne linearne grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ je zaprta Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$. Elementi Liejeve grupe $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(\mathsf{V}))$ so vsi skalarni večkratniki identitete. Kvocientno Liejevo grupo

$$\mathrm{PGL}(\mathsf{V}) = \mathrm{GL}(\mathsf{V})/\,\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(\mathsf{V}))$$

imenujemo *projektivna (splošna) linearna grupa* na V. Kvocientno Liejevo grupo

$$\mathrm{PSL}(\mathsf{V}) = \mathrm{SL}(\mathsf{V})/\,\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(\mathsf{V}))$$

imenujemo *projektivna specialna linearna grupa* na V.

2.6.3. Homogeni prostori. Naj bo G Liejeva grupa in M mnogoterost. *Levo delovanje* Liejeve grupe G na M je gladka preslikava $\lambda : G \times M \to M$, $(x,p) \mapsto xp$, za katero velja

(i) $ep = p$ in
(ii) $(yx)p = y(xp)$

za vse $p \in M$ ter vse $x, y \in G$. Za poljubno levo delovanje $\lambda : G \times M \to M$ je preslikava $\lambda_x : M \to M$, $\lambda_x(p) = xp$, difeomorfizem mnogoterosti M z inverzom $\lambda_{x^{-1}}$. Mnogoterost M, opremljeno z levim delovanjem Liejeve grupe G, imenujemo tudi *levi G-prostor*.

Gladka preslikava $g : N \to M$ med levima G-prostoroma je *G-ekvivariantna*, če velja $g(xq) = xg(q)$ za vse $q \in N$ in vse $x \in G$. *Izomorfizem* med levima G-prostoroma je G-ekvivarianten difeomorfizem med njima.

Levo delovanje Liejeve grupe G na mnogoterosti M je *tranzitivno*, če za poljubna $p, q \in M$ obstaja tak $x \in G$, da je $q = xp$. Levi G-prostor tranzitivnega delovanja Liejeve grupe G imenujemo tudi *homogen G-prostor*.

Naj bo M levi G-prostor in $p \in M$. Množica

$$G_p = \{x \in G \mid xp = p\}$$

je zaprta podgrupa Liejeve grupe G, ki jo imenujemo *podgrupa izotropije* levega G-prostora M v točki p.

Zgled 2.84. Naj bo K zaprta podgrupa Liejeve grupe G in $x \in G$. Leva translacija $L_x : G \to G$ je difeomorfizem, za katerega je $\mathrm{L}_x(yK) = xyK$. Difeomorfizem $\mathrm{L}_x : G \to G$ zato inducira difeomorfizem $\bar{\mathrm{L}}_x : G/K \to G/K$, $yK \mapsto xyK$, in s tem postane G/K homogen G-prostor.

Trditev 2.85. *Naj bo M homogen G-prostor in $p \in M$. Tedaj je preslikava $G/G_p \to M$, $xG_p \mapsto xp$, izomorfizem homogenih G-prostorov.*

DOKAZ. Označimo z λ levo delovanje Liejeve grupe G na M, in naj bo $g : G \to M$ gladka surjektivna preslikava, dana s predpisom $g(x) = xp$. Ker so vlakna surjektivne preslikave g ravno levi odseki grupe G po podgrupi G_p, preslikava g inducira bijekcijo $h : G/G_p \to M$, $h(xG_p) = xp$. Ker je kvocientna projekcija $\pi : G \to G/G_p$ submerzija in velja $h \circ \pi = g$, iz leme 2.77 sledi, da je preslikava h gladka. Ni težko preveriti, da je preslikava h tudi G-ekvivariantna.

Iz definicije preslikave g je jasno, da velja $T_e(G_p) \subset \ker(dg)_e$. Pokazali bomo, da v resnici velja enakost $T_e(G_p) = \ker(dg)_e$. Res, za poljuben $v \in \ker(dg)_e$ velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \exp(tv)p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} g(\exp(tv)) &= (dg)_{\exp(sv)}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \exp(tv)\Big) \\ &= (dg)_{\exp(sv)}\big(d(\mathrm{L}_{\exp(sv)})_e(v)\big) = d(g \circ \mathrm{L}_{\exp(sv)})_e(v) \\ &= d(\lambda_{\exp(sv)} \circ g)_e(v) = d(\lambda_{\exp(sv)})_p((dg)_e(v)) = 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da je $\exp(tv)p = \exp(0v)p = p$ in torej $\exp(tv) \in G_p$ za vse $t \in \mathbb{R}$, odtod pa sledi, da je $v \in T_e(G_p)$.

Iz enakosti $T_e(G_p) = \ker(dg)_e$ sledi, da je h imerzija v točki G_p. Ker velja $(dg)_x \circ d(\mathrm{L}_x)_e = d(\lambda_x)_p \circ (dg)_e$, je

$$\ker(dg)_x = d(\mathrm{L}_x)_e(\ker(dg)_e) = d(\mathrm{L}_x)_e(T_e(G_p)) = T_x(xG_p)$$

za vsak $x \in G$, to pa pomeni, da je h imerzija na celem G/G_p.

Dokazali smo torej, da je $h : G/G_p \to M$ bijektivna imerzija. V splošnem pa je lahko injektivna imerzija surjektivna le v primeru, da sta dimenziji mnogoterosti G/G_p in M enaki in da je torej h difeomorfizem. (To je posledica Baireovega izreka, glej vajo 2.86.) $\square$

VAJA 2.86. (1) Podmnožica $W \subset M$ je *gosta* v M, če vsaka neprazna odprta podmnožica mnogoterosti M seka W. Baireov izrek za mnogoterosti pravi, da je presek poljubnega zaporedja odprtih gostih podmnožic mnogoterosti M gosta podmnožica.

Da bi to dokazali, najprej opazimo, da je podmnožica $W \subset M$ je gosta v M če, in samo če, je $\varphi(U \cap W)$ gosta v $\mathbb{R}^m$ za vsako surjektivno lokalno karto $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ na M. Odtod sledi, da lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $M = \mathbb{R}^m$. Naj bo (U_n) zaporedje odprtih gostih podmnožic prostora $\mathbb{R}^m$ in naj bo W poljubna neprazna odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^m$. Za vsak $p \in \mathbb{R}^m$ in vsak $\varepsilon > 0$ označimo s $K(p, \varepsilon)$ odprto množico vseh tistih točk iz $\mathbb{R}^m$, katerih razdalja do točke p je manjša od ε. Rekurzivno lahko konstruirajmo zaporedje točk (p_n) v $\mathbb{R}^m$ in zaporedje pozitivnih realnih števil (ε_n), tako da je $K(p_1, \varepsilon_1) \subset W \cap U_1$ in

$$K(p_n, \varepsilon_n) \subset K(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/2) \cap U_n$$

za vsak $n \geq 2$. Res, ker je U_1 gosta, obstaja točka $p_1 \in W \cap U_1$. Ker sta W in U_1 odprti, lahko najdemo tak $\varepsilon_1 > 0$, da je $K(p_1, \varepsilon_1) \subset W \cap U_1$. Recimo, da je $n \geq 2$ in da smo že konstruirali točke $p_1, \ldots, p_{n-1}$ ter števila $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ z želenimi lastnostmi. Ker je U_n gosta in ker je $K(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/2)$ neprazna odprta podmnožica v $\mathbb{R}^m$, obstaja točka $p_n \in K(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/2) \cap U_n$. Ker sta $K(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/2)$ in U_n odprti, lahko najdemo tak $\varepsilon_n > 0$, da je $K(p_n, \varepsilon_n) \subset K(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/2) \cap U_n$. Zdaj je zaporedje točk (p_n) v $\mathbb{R}^m$ Cauchyjevo in torej konvergentno, limita p tega zaporedja pa leži v W, pa tudi v vseh množicah $K(p_n, \varepsilon_n)$ in zato tudi v vseh množicah U_n, za vse n. S tem smo dokazali, da množica W seka presek $\bigcap_n U_n$. Presek množic U_n je torej gosta podmnožica v $\mathbb{R}^m$.

(2) Za poljubno gladko imerzijo $h : N \to M$ med mnogoterostima, za kateri velja $\dim N < \dim M$, je množica $M - h(N)$ gosta v M. To je posledica Baireovega izreka in 2-števnosti mnogoterosti N. Res, iz 2-števnosti mnogoterosti N ter iz normalne forme imerzije sledi, da lahko sliko $h(N)$ zapišemo kot števno unijo kompaktnih podmnožic Z_n mnogoterosti M, katerih komplement $M - Z_n$ je odprta gosta podmnožica mnogoterosti M. Baireov izrek zdaj pove, da je $M - h(N) = \bigcap_n (M - Z_n)$ gosta podmnožica mnogoterosti M.

Zgled 2.87. Za poljuben n je Liejeva grupa $\mathrm{O}(n)$ zaprta podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{O}(n+1)$. Inkluzija $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n+1)$ je dana s predpisom

$$x \mapsto \mathrm{diag}(x, 1)$$

za vsak $x \in \mathrm{O}(n)$. Imamo naravno levo delovanje Liejeve grupe $\mathrm{O}(n+1)$ na $\mathbb{R}^{n+1}$, dano z množenjem matrike z vektorjem, in to delovanje lahko zožimo na delovanje Liejeve grupe $\mathrm{O}(n+1)$ na $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Glede na to delovanje je sfera S^n homogen $\mathrm{O}(n+1)$-prostor. Za standardni bazni vektor $e_{n+1} \in S^n$ imamo grupo izotropije

$$\mathrm{O}(n+1)_{e_{n+1}} = \mathrm{O}(n).$$

Po trditvi 2.85 dobimo torej izomorfizem homogenih $\mathrm{O}(n+1)$-prostorov

$$\mathrm{O}(n+1)/\,\mathrm{O}(n) \to S^n,$$

ki je dan s predpisom $x\,\mathrm{O}(n) \mapsto xe_{n+1}$.

2.7. Homomorfizmi Liejevih grup

Trditev 2.88. *Vsak bijektiven homomorfizem Liejevih grup je izomorfizem Liejevih grup.*

Dokaz. Vsak injektiven homomorfizem Liejevih grup je po trditvi 2.57 imerzija. Če je tak homomorfizem tudi surjektiven, je po Baireovem izreku (vaja 2.86) difeomorfizem. □

Trditev 2.89. *Naj bosta H in G Liejevi grupi in $\phi : H \to G$ zvezen homomorfizem grup. Tedaj je ϕ homomorfizem Liejevih grup.*

Dokaz. Ker je ϕ zvezen homomorfizem grup, je množica

$$K = \{(x, \phi(x)) \in H \times G \mid x \in H\}$$

zaprta podgrupa Liejeve grupe $H \times G$ in torej Liejeva podgrupa. Zožitev $\pi = \mathrm{pr}_1|_K : K \to H$ je homomorfizem Liejevih grup in bijekcija, zato je po trditvi 2.88 izomorfizem. Ker velja $\phi = \mathrm{pr}_2 \circ \pi^{-1}$ in ker sta preslikavi $\pi^{-1} : H \to K$ ter $\mathrm{pr}_2 : H \times G \to G$ gladki, je tudi ϕ gladka preslikava. □

2.7.1. Krovni homomorfizmi.

Definicija 2.90. Homomorfizem povezanih Liejevih grup $\phi : H \to G$ je *krovni homomorfizem*, če je $\mathfrak{L}(\phi)$ izomorfizem Liejevih algeber.

Trditev 2.91. *Naj bosta G in H povezani Liejevi grupi in naj bo $\phi : H \to G$ krovni homomorfizem Liejevih grup.*

(i) Homomorfizem ϕ je surjektiven lokalni difeomorfizem.

(ii) Naj bo V takšna odprta podmnožica Liejeve grupe H, da je $\phi|_V$ injektivna. Tedaj je $\phi(V)$ odprta podmnožica v G in $\phi|_V : V \to \phi(V)$ je difeomorfizem. Za

poljubni dve različni točki $z, w \in \ker\phi$ *velja* $\mathrm{R}_z(V) \cap \mathrm{R}_w(V) = \emptyset$, *zožitev* $\phi|_{\mathrm{R}_z(V)} : \mathrm{R}_z(V) \to \phi(V)$ *je difeomorfizem in*

$$\phi^{-1}(\phi(V)) = \bigcup_{z \in \ker\phi} \mathrm{R}_z(V).$$

Dokaz. (i) Ker je $\mathfrak{L}(\phi) = (d\phi)_e$ izomorfizem, je izomorfizem tudi $(d\phi)_x$ za vsak $x \in H$, saj velja $(d\phi)_x = d(\mathrm{L}_{\phi(x)})_e \circ (d\phi)_e \circ d(\mathrm{L}_{x^{-1}})_x$. Surjektivnost homomorfizma ϕ sledi iz povezanosti grupe G.

(ii) Ker je ϕ lokalni difeomorfizem, je $\phi(V)$ odprta podmnožica v G in $\phi|_V : V \to \phi(V)$ je bijektiven lokalni difeomorfizem, torej difeomorfizem. Če bi bil presek $\mathrm{R}_z(V) \cap \mathrm{R}_w(V)$ neprazen, bi obstajali takšni točki $x, y \in V$, da je $xz = yw$. Odtod sledi $\phi(x) = \phi(xz) = \phi(yw) = \phi(y)$. Ker je zožitev $\phi|_V$ injektivna, odtod dobimo $x = y$ in $z = w$, kar je protislovje. Preostali del trditve iz točke (ii) je očiten. □

Komentar 2.92. Naj bo $\phi : H \to G$ krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup. Gladka preslikava $\sigma : U \to H$, definirana na odprti podmnožici U v G, je *lokalni prerez* na U krovnega homomorfizma ϕ, če velja $\phi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Slika $\sigma(U)$ takega lokalnega prereza je odprta podmnožica v H in zožitev $\phi|_{\sigma(U)} : \sigma(U) \to U$ je difeomorfizem z inverzom σ.

Ker je ϕ lokalni difeomorfizem, za vsako točko $x \in G$ lahko najdemo odprto okolico U točke x v G, na kateri ima ϕ lokalni prerez. Kompozicija takšnega lokalnega prereza σ z desno translacijo R_z je spet lokalni prerez na U krovnega homomorfizma ϕ, za vsak $z \in \ker\phi$. Posebej to pomeni, da za vsak $y \in \phi^{-1}(U)$ lahko najdemo lokalni prerez na U krovnega homomorfizma ϕ, ki preslika $\phi(y)$ v y.

Če ima ϕ globalen prerez, torej prerez, ki je definiran na celi Liejevi grupi G, potem mora biti slika tega prereza komponenta Liejeve grupe H, in torej kar enaka H, saj je H povezana Liejeva grupa. Odtod sledi, da je v tem primeru ϕ izomorfizem Liejevih grup.

Lema 2.93. *Naj bo K zaprta diskretna podgrupa povezane Liejeve grupe H. Tedaj je K podgrupa edinka grupe H če, in samo če, velja $K \subset \mathrm{Z}(H)$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je K podgrupa edinka grupe H. Za poljuben $x \in H$ lahko izberemo pot γ v H od nevtralnega elementa e do x. Za vsak $z \in K$ je tedaj preslikava $\zeta(t) = \mathrm{C}_{\gamma(t)}(z)$ pot v K od e do $\mathrm{C}_x(z)$. Ker je K diskretna, so vse podmnožice Liejeve grupe K odprte, zato mora biti pot ζ konstantna. Posebej je torej $\mathrm{C}_x(z) = z$ za vsak $z \in K$ in za vsak $x \in H$, kar pomeni, da je $K \subset \mathrm{Z}(H)$. Obratna implikacija je očitna. □

Trditev 2.94. *(i) Če je K zaprta diskretna podgrupa edinka povezane Liejeve grupe H, je kvocientni homomorfizem $\pi : H \to H/K$ krovni homomorfizem Liejevih grup.*

(ii) Če je $\phi : H \to G$ krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup, je njegovo jedro $\ker\phi$ *zaprta diskretna podgrupa Liejeve grupe H, za katero velja* $\ker\phi \subset \mathrm{Z}(H)$, *homomorfizem ϕ pa inducira izomorfizem Liejevih grup* $H/\ker\phi \to G$.

Dokaz. (i) Ker je podgrupa K diskretna, je dimenzija Liejeve grupe K enaka 0 in za vsako točko $z \in K$ je množica $\{z\}$ odprta komponenta Liejeve grupe K. Kvocientni homomorfizem $\pi : H \to H/K$ je krovni homomorfizem Liejevih grup, saj velja $K = \ker\pi$ in torej $\ker(\mathfrak{L}(\pi)) = \mathfrak{L}(\ker\pi) = \{0\}$.

(ii) Iz trditve 2.91(ii) sledi, da je $\ker \phi$ diskretna podgrupa. Iz leme 2.93 sledi, da je $\ker \phi \subset \mathrm{Z}(H)$. Zadnji del trditve je posledica surjektivnosti krovnega homomorfizma ϕ in trditve 2.80. $\square$

2.7.2. Krovni homomorfizem $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$**.** Kvaternion q je urejena četverka realnih števil $q = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Kvaternion q lahko zapišemo kot par $q = (t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, torej kot par skalarja $t \in \mathbb{R}$ in vektorja $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Množica $\mathbb{H}$ vseh kvaternionov je torej štiridimenzionalni realni vektorski prostor. Na množici kvaternionov imamo tudi produkt: za poljubna $(s, u), (t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$ je njun produkt dan s predpisom

$$(s, u)(t, v) = (st - \langle u, v\rangle, sv + tu + u \times v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H},$$

kjer je $\langle u, v\rangle$ skalarni, $u \times v$ pa vektorski produkt vektorjev u in v v $\mathbb{R}^3$. Očitno je, da je tako definirano množenje bilinearna operacija na $\mathbb{H}$. Nevtralni element za množenje v $\mathbb{H}$ je kvaternion $(1, 0)$. Ni težko preveriti, da so s to operacijo kvaternioni (nekomutativen) obseg, a to lahko vidimo tudi iz naslednjih, ekvivalentnih opisov kvaternionov.

Elemente standardne baze prostora kvaternionov $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ označimo z $1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathrm{i} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathrm{j} = (0, 0, 1, 0)$ in $\mathrm{k} = (0, 0, 0, 1)$. Vsak kvaternion $q = (t, x, y, z)$ torej enolično zapišemo kot linearno kombinacijo

$$q = t1 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}.$$

Direktno po definiciji lahko preverimo, da velja

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

in

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \qquad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

S temi enakostmi je množenje na $\mathbb{H}$ enolično določeno, glede na to, da je množenje bilinearna operacija z nevtralnim elementom 1. Kompleksna števila lahko gledamo kot kvaternione oblike $t1 + x\mathrm{i}$. Množenje kvaternionov take oblike se ujema z množenjem kompleksnih števil. Na ta način imamo inkluzije obsegov

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

Poleg tega tudi vektorje $v = (x, y, z)$ v $\mathbb{R}^3$ gledamo kot kvaternione oblike $(0, v) = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$, torej imamo

$$\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}.$$

Kvaternione oblike $t = t1$ imenujemo tudi *skalarni* kvaternioni, kvaternione oblike $v = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ pa *vektorski* ali *čisto imaginarni* kvaternioni. Iz definicije množenja kvaternionov sledi, da je produkt dveh čisto imaginarnih kvaternionov u, v dan s predpisom

$$uv = -\langle u, v\rangle + u \times v \in \mathbb{H}.$$

Poljuben kvaternion $q \in \mathbb{H}$ lahko enolično zapišemo tudi kot

$$q = t1 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} = (t + x\mathrm{i}) + (y + z\mathrm{i})\mathrm{j} = \alpha + \beta\mathrm{j},$$

kjer sta $\alpha = t + x\mathrm{i}$ in $\beta = y + z\mathrm{i}$ kompleksni števili. Kvaternion $q = \alpha + \beta\mathrm{j}$ pa lahko ekvivalentno predstavimo tudi s kompleksno matriko

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}).$$

Na ta način gledamo $\mathbb{H}$ kot realen vektorski podprostor

$$\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}).$$

Posebej torej identificiramo bazne vektorje v $\mathbb{H}$ z matrikami:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{i} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad \mathrm{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{k} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

Na teh matrikah lahko eksplicitno preverimo, da se množenje kvaternionov ujema z množenjem prirejenih matrik v $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Odtod vidimo, da je množenje kvaternionov asociativno, ter da ima vsak neničelen kvaternion inverz v $\mathbb{H}$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Za poljuben kvaternion $q = t1 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} = t + v$ definiramo njegovo adjungirano vrednost

$$q^* = t1 - x\mathrm{i} - y\mathrm{j} - z\mathrm{k} = t - v \in \mathbb{H}.$$

Če gledamo q kot matriko v $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, potem je $q^* = q^H$. Če je p še en kvaternion, imamo torej $(pq)^* = q^* p^*$. Direkten izračun pokaže, da velja tudi

$$qq^* = q^* q = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + \langle v, v \rangle = \det(q) \geq 0.$$

Absolutna vrednost kvaterniona q je dana z enakostjo

$$|q| = \sqrt{qq^*}.$$

Za neničelen q je očitno $q^* = |q|^2 q^{-1}$, absolutna vrednost pa je homomorfizem grup $|\text{-}| : \mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{R}^\times$. Jedro tega homomorfizma prepoznamo kot Liejevo grupo

$$\{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} = \mathrm{SU}(2).$$

Liejevo grupo $\mathrm{SU}(2)$ smo torej identificirali z enotsko sfero $S^3 \subset \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$.

Za poljuben $q \in \mathrm{SU}(2)$ definiramo $\pi(q) \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ s predpisom

$$\pi(q)v = qvq^* \in \mathbb{R}^3,$$

za vsak $v \in \mathbb{R}^3$. Pri tem je $qvq^* = qvq^{-1}$ produkt kvaternionov, ki je res čisto imaginaren kvaternion in torej vektor v $\mathbb{R}^3$, saj velja $(qvq^*)^* = q^{**} v^* q^* = -qvq^*$. S tem smo definirali reprezentacijo Liejevih grup

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}),$$

saj za poljubna $p, q \in \mathrm{SU}(2)$ velja $\pi(pq)v = pqv(pq)^* = pqvq^*p^* = \pi(p)\pi(q)v$.

Lema 2.95. *Za poljubna $u, v \in \mathbb{R}^3$ in vsak $q \in \mathrm{SU}(2)$ velja $\langle \pi(q)u, \pi(q)v \rangle = \langle u, v \rangle$ in $\pi(q)u \times \pi(q)v = \pi(q)(u \times v)$. Posebej to pomeni, da je $\pi(q) \in \mathrm{SO}(3)$.*

Dokaz. Iz formule za množenje čisto imaginarnih kvaternionov sledi

$$\begin{aligned} -\langle \pi(q)u, \pi(q)v \rangle + \pi(q)u \times \pi(q)v &= (\pi(q)u)(\pi(q)v) \\ &= quq^*qvq^* = quvq^* \\ &= q(-\langle u, v \rangle + u \times v)q^* \\ &= -\langle u, v \rangle + \pi(q)(u \times v). \end{aligned}$$

Skalarni in vektorski del te enakosti sta identiteti iz leme. Ker torej linearna preslikava $\pi(q) \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ ohranja skalarni in tudi vektorski produkt, mora biti ortogonalna z determinanto 1. $\square$

Za poljuben normiran vektor $w \in \mathbb{R}^3$ in za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ naj bo $R_{w,\varphi} \in \mathrm{SO}(3)$ rotacija okoli osi w za kot φ. Bolj natančno, vektor w dopolnimo do pozitivno orientirane ortonormirane baze $[u, v, w]$ prostora $\mathbb{R}^3$ in definiramo

$$R_{w,\varphi} = B \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^T,$$

kjer je $B \in \mathrm{SO}(3)$ prehodna matrika iz baze $[u, v, w]$ na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$, torej matrika s stolpci $[u, v, w]$.

Vsak element Liejeve grupe $\mathrm{SO}(3)$ je enak neki rotaciji $R_{w,\varphi}$, za primerno izbran normiran vektor w in nek kot $\varphi \in \mathbb{R}$. Res, poljuben element $x \in \mathrm{SO}(3)$ ima eno od lastnih vrednosti enako 1, za vektor w pa izberemo poljuben normiran lastni vektor pri tej lastni vrednosti.

Lema 2.96. *Naj bo $w \in \mathbb{R}^3$ normiran vektor, naj bo $\varphi \in \mathbb{R}$ in naj bo $q = \cos\frac{\varphi}{2} + (\sin\frac{\varphi}{2})w \in \mathrm{SU}(2)$. Tedaj je $\pi(q) = R_{w,\varphi}$.*

Dokaz. Dopolnimo w do pozitivno orientirane ortonormirane baze $[u, v, w]$ prostora $\mathbb{R}^3$. Iz formule za produkt čisto imaginarnih kvaternionov dobimo $w^2 = -1$, $wu - uw = 2v$, $wv - vw = -2u$, $wuw = u$ in $wvw = v$. Odtod sledi

$$\begin{aligned} \pi(q)w &= (\cos\tfrac{\varphi}{2} + (\sin\tfrac{\varphi}{2})w)w(\cos\tfrac{\varphi}{2} - (\sin\tfrac{\varphi}{2})w) \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2})w + (\sin\tfrac{\varphi}{2})(\cos\tfrac{\varphi}{2})(w^2 - w^2) - (\sin^2\tfrac{\varphi}{2})w^3 \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2} + \sin^2\tfrac{\varphi}{2})w = w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(q)u &= (\cos\tfrac{\varphi}{2} + (\sin\tfrac{\varphi}{2})w)u(\cos\tfrac{\varphi}{2} - (\sin\tfrac{\varphi}{2})w) \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2})u + (\sin\tfrac{\varphi}{2})(\cos\tfrac{\varphi}{2})(wu - uw) - (\sin^2\tfrac{\varphi}{2})wuw \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2})u + 2(\sin\tfrac{\varphi}{2})(\cos\tfrac{\varphi}{2})v - (\sin^2\tfrac{\varphi}{2})u \\ &= (\cos\varphi)u + (\sin\varphi)v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(q)v &= (\cos\tfrac{\varphi}{2} + (\sin\tfrac{\varphi}{2})w)v(\cos\tfrac{\varphi}{2} - (\sin\tfrac{\varphi}{2})w) \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2})v + (\sin\tfrac{\varphi}{2})(\cos\tfrac{\varphi}{2})(wv - vw) - (\sin^2\tfrac{\varphi}{2})wvw \\ &= (\cos^2\tfrac{\varphi}{2})v - 2(\sin\tfrac{\varphi}{2})(\cos\tfrac{\varphi}{2})u - (\sin^2\tfrac{\varphi}{2})v \\ &= (-\sin\varphi)u + (\cos\varphi)v. \end{aligned}$$

$\square$

Trditev 2.97. *Preslikava $\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, dana s predpisom $\pi(q)v = qvq^*$ za vse $q \in \mathrm{SU}(2)$ ter vse $v \in \mathbb{R}^3$, je krovni homomorfizem Liejevih grup z jedrom $\{I, -I\}$.*

Komentar 2.98. Krovni homomorfizem Liejevih grup $\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ imenujemo *spin homomorfizem*. Iz trditve sledi, da spin homomorfizem inducira izomorfizem Liejevih grup $\mathrm{SU}(2)/\{I, -I\} \to \mathrm{SO}(3)$.

Dokaz. Videli smo že, da je $\pi(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(3)$ in da je π homomorfizem Liejevih grup. Iz leme 2.96 vidimo, da je $\pi(\mathrm{SU}(2)) = \mathrm{SO}(3)$. Očitno je, da velja $\{I, -I\} \subset \ker\pi$. Obratno, poljuben $q \in \mathrm{SU}(2) - \{I, -I\}$ lahko zapišemo v obliki

$q = \cos\frac{\varphi}{2} + (\sin\frac{\varphi}{2})w$ za nek normiran vektor $w \in \mathbb{R}^3$ in neko število $\varphi \in \mathbb{R}$, tako da je $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, zato po lemi 2.96 sledi $\pi(q) \neq I$. □

2.7.3. Univerzalni krov Liejeve grupe. Naj bo M poljubna mnogoterost. Spomnimo se, da je pot v mnogoterosti M od točke $p \in M$ do točke $q \in M$ zvezna preslikava $\gamma : [0,1] \to M$, za katero je $\gamma(0) = p$ in $\gamma(1) = q$. Označimo s $\mathscr{P}(M)$ množico vseh poti v mnogoterosti M. Za vsak $p \in M$ imamo konstantno pot z vrednostjo p, ki jo bomo spet označili s p. Za dve poti γ, ζ v M, za kateri velja $\gamma(1) = \zeta(0)$, definiramo *sklop* poti γ in ζ, ki je pot $\gamma * \zeta$ v M od $\gamma(0)$ do $\zeta(1)$ dana s predpisom:

$$(\gamma * \zeta)(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & ; \quad 0 \leq s \leq 1/2 \\ \zeta(2s-1) & ; \quad 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Naj bosta γ, δ poljubni poti v M. *Homotopija* v M od γ do δ je zvezna preslikava

$$h : [0,1] \times [0,1] \to M,$$

za katero velja $h(s,0) = \gamma(s)$, $h(s,1) = \delta(s)$, $h(0,t) = \gamma(0) = \delta(0)$ in $h(1,t) = \gamma(1) = \delta(1)$ za vse $s,t \in [0,1]$. Za takšno homotopijo h običajno označimo $h_t(s) = h(s,t)$. Homotopijo h od γ do δ si predstavljamo kot zvezno deformacijo poti γ v pot δ in jo zapišemo tudi kot zvezne družino poti $(h_t)_t = (h_t)_{t\in[0,1]}$. Pot $\gamma \in \mathscr{P}(M)$ je homotopna poti $\delta \in \mathscr{P}(M)$, če obstaja kakšna homotopija v M od γ do δ, in tedaj zapišemo $\gamma \simeq \delta$. To je mogoče seveda le v primeru, da je $\gamma(0) = \delta(0)$ in $\gamma(1) = \delta(1)$.

Zgled 2.99. Naj bo U odprta konveksna podmnožica končno dimenzionalnega vektorskega prostora V. To pomeni, da za poljubni dve točki $p, q \in U$ cela daljica med p in q leži v U. Če sta γ, δ dve poti v U od p do q, potem je s predpisom $h_t = t\delta + (1-t)\gamma$, $t \in [0,1]$, dana homotopija od γ do δ. Posebej je torej poljubna pot γ v U od p do q homotopna linearni poti od p do q, $s \mapsto sq + (1-s)p$.

Lema 2.100. *Naj bo M poljubna mnogoterost.*

(i) Homotopnost je ekvivalenčna relacija na množici poti $\mathscr{P}(M)$.

(ii) Če so $\gamma, \delta, \zeta, \xi$ takšne poti v M, da je $\gamma(1) = \zeta(0)$ in $\gamma \simeq \delta$ ter $\zeta \simeq \xi$, potem velja tudi $\gamma * \zeta \simeq \delta * \xi$.

(iii) Če so $\gamma, \delta, \zeta, \xi, \eta$ poti v M in $g : [0,1]\times[0,1] \to M$ takšna zvezna preslikava, da je $\gamma(s) = g(s,0)$, $\delta(s) = g(0,s)$, $\zeta(s) = g(1,s)$, $\xi(s) = g(s,1)$ in $\eta(s) = g(s,s)$ za vsak $s \in [0,1]$, tedaj velja $\eta \simeq \gamma * \zeta \simeq \delta * \xi$.

Komentar 2.101. Ekvivalenčni razred poljubne poti γ v M glede na relacijo homotopnosti označimo z $[\gamma]$ in imenujemo *homotopski razred* poti γ. Množico homotopskih razredov poti v M bomo označili z $[\mathscr{P}(M)] = \mathscr{P}(M)/\simeq$. Iz točke (ii) sledi, da je sklop poti dobro definiran tudi na homotopskih razredih poti s predpisom $[\gamma] * [\zeta] = [\gamma * \zeta]$, za vse $\gamma, \zeta \in \mathscr{P}(M)$, $\gamma(1) = \zeta(0)$.

Dokaz. (i) Za poljuben $\gamma \in \mathscr{P}(M)$ je $(\gamma)_t$ homotopija v M od γ do γ. Če je $(h_t)_t$ homotopija v M od γ do δ, potem je $(h_{1-t})_t$ homotopija v M od δ do γ. Če je poleg tega še $(k_t)_t$ homotopija od δ do ζ, potem homotopijo $(g_t)_t$ od γ do ζ dobimo s predpisom:

$$g_t = \begin{cases} h_{2t} & ; \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ k_{2t-1} & ; \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(ii) Če je $(h_t)_t$ homotopija od γ do δ in je $(k_t)_t$ homotopija od ζ do ξ, potem je $(h_t * k_t)_t$ homotopija od $\gamma * \zeta$ do $\delta * \xi$.

(iii) Za vsak $t \in [0,1]$ naj bo α_t linearna pot v $\mathbb{R}^2$ od $(0,0)$ do $(t, 1-t)$ in β_t linearna pot v $\mathbb{R}^2$ od $(t,1-t)$ do $(1,1)$. Tedaj je s predpisom $h_t = g \circ (\alpha_t * \beta_t)$ podana homotopija v M od $\gamma * \zeta$ do $\delta * \xi$, medtem ko je $(h_{t/2})_t$ homotopija v M od $\gamma * \zeta$ do η. □

Vaja 2.102. Naj bodo γ, ζ, δ poti v mnogoterosti M, za katere je $\gamma(1) = \zeta(0)$ in $\zeta(1) = \delta(0)$. Tedaj velja $\gamma(0) * \gamma \simeq \gamma \simeq \gamma * \gamma(1)$ in $(\gamma * \zeta) * \delta \simeq \gamma * (\zeta * \delta)$. Poleg tega velja tudi $\gamma * \bar{\gamma} \simeq \gamma(0)$ in $\bar{\gamma} * \gamma \simeq \gamma(1)$, kjer je $\bar{\gamma}$ *obratna pot* poti γ, dana s predpisom $\bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s)$ za vsak $s \in [0,1]$.

Poljubna gladka preslikava $g : N \to M$ med mnogoterostima nam da pridruženo preslikavo $\mathscr{P}(g) : \mathscr{P}(N) \to \mathscr{P}(M)$ s predpisom

$$\mathscr{P}(g)(\gamma) = g \circ \gamma.$$

Če je h homotopija v N med $\gamma \in \mathscr{P}(N)$ in $\delta \in \mathscr{P}(N)$, je $g \circ h$ homotopija v M med $\mathscr{P}(g)(\gamma)$ in $\mathscr{P}(g)(\delta)$. To pomeni, da preslikava $\mathscr{P}(g)$ inducira preslikavo $[\mathscr{P}(g)] : [\mathscr{P}(N)] \to [\mathscr{P}(M)]$,

$$[\mathscr{P}(g)]([\gamma]) = [g \circ \gamma].$$

Za $\gamma, \zeta \in \mathscr{P}(N)$, $\gamma(1) = \zeta(0)$, očitno velja $\mathscr{P}(g)(\gamma * \zeta) = \mathscr{P}(g)(\gamma) * \mathscr{P}(g)(\zeta)$ in zato tudi $[\mathscr{P}(g)]([\gamma] * [\zeta]) = [\mathscr{P}(g)]([\gamma]) * [\mathscr{P}(g)]([\zeta])$.

Trditev 2.103. *Naj bo $\phi : H \to G$ krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup in naj bo y poljubna točka iz H.*

(i) Za vsako pot γ v G z začetkom v točki $\phi(y)$ obstaja natanko ena pot $\widetilde{\gamma}$ v H z začetkom v točki y, za katero velja $\phi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

(ii) Za vsako zvezno preslikavo $h : [0,1] \times [0,1] \to G$, za katero je $h(0,0) = \phi(y)$, obstaja natanko ena takšna zvezna preslikava $\widetilde{h} : [0,1] \times [0,1] \to H$, da velja $\widetilde{h}(0,0) = y$ in $\phi \circ \widetilde{h} = h$.

Komentar 2.104. Pot $\widetilde{\gamma}$ iz točke (i) imenujemo *dvig poti* γ vzdolž ϕ. Če sta γ, δ homotopni poti v G z začetkom v točki $\phi(y)$ in sta $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ dviga teh dveh poti vzdolž ϕ z začetkom v točki y, potem je $\widetilde{\gamma} \simeq \widetilde{\delta}$. Res, če je h homotopija od γ do δ, je preslikava $\widetilde{h}$ iz točke (ii) homotopija med $\widetilde{\gamma}$ in $\widetilde{\delta}$, ki jo imenujemo *dvig homotopije* h vzdolž ϕ.

Dokaz. (i) Zaradi kompaktnosti intervala $[0,1]$ in po trditvi 2.91 lahko izberemo takšno delitev $\{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1\}$ intervala $[0,1]$, da slika $\gamma([s_{k-1}, s_k])$ leži znotraj odprte podmnožice $U_k \subset G$, na kateri ima ϕ lokalni prerez, za vse $k = 1, \ldots, n$. Izberimo tak lokalni prerez $\sigma_1 : U_1 \to H$ krovnega homomorfizma ϕ, da je $\sigma_1(\gamma(0)) = y$ in definirajmo $\widetilde{\gamma} : [0, s_1] \to H$ s predpisom $\widetilde{\gamma} = \sigma_1 \circ \gamma|_{[0,s_1]}$. Nato izberemo tak lokalni prerez $\sigma_2 : U_2 \to H$ krovnega homomorfizma ϕ, da je $\sigma_2(\gamma(s_1)) = \widetilde{\gamma}(s_1)$, in razširimo preslikavo $\widetilde{\gamma}$ na interval $[0, s_2]$ s predpisom $\widetilde{\gamma}|_{[s_1,s_2]} = \sigma_2 \circ \gamma|_{[s_1,s_2]}$. Tako induktivno nadaljujemo in po n korakih dobimo preslikavo $\widetilde{\gamma}$ na celem intervalu $[0,1]$. Iz trditve 2.91 sledi, da je preslikava $\widetilde{\gamma}$ enolično določena.

(ii) Zaradi kompaktnosti produkta $[0,1] \times [0,1]$ in po trditvi 2.91 lahko izberemo takšno delitev $\{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1\}$ intervala $[0,1]$, da slika $\gamma([s_{k-1}, s_k] \times [s_{l-1}, s_l])$ leži znotraj odprte podmnožice $U_{kl} \subset G$, na kateri ima ϕ lokalni prerez, za vse $k, l = 1, \ldots, n$. Označimo $I_{kl} = [s_{k-1}, s_k] \times [s_{l-1}, s_l]$. Izberimo tak lokalni prerez $\sigma_{11} : U_{11} \to H$ krovnega homomorfizma ϕ, da je $\sigma_{11}(h(0,0)) = y$ in definirajmo $\widetilde{h}$:

$I_{11} \to H$ s predpisom $\widetilde{h} = \sigma_{11} \circ h|_{I_{11}}$. Nato izberemo lokalni prerez $\sigma_{12} : U_{12} \to H$ krovnega homomorfizma ϕ, da je $\sigma_{12}(h(s_0, s_1)) = \sigma_{11}(h(s_0, s_1))$ in razširimo $\widetilde{h}$ na $I_{11} \cup I_{12}$ s predpisom $\widetilde{h}|_{I_{12}} = \sigma_{12} \circ h|_{I_{12}}$. Tako definirana preslikava $\widetilde{h}$ je zvezna na $I_{11} \cup I_{12}$, saj se $\sigma_{11} \circ h$ in $\sigma_{12} \circ h$ ujemata na preseku $I_{11} \cap I_{12}$ zaradi enoličnosti iz točke (i). Tako induktivno nadaljujemo po pravokotnikih v leksikografskem vrstnem redu $I_{11}, \ldots, I_{1n}, I_{21}, \ldots, I_{2n}, \ldots, I_{n1}, \ldots, I_{nn}$, in po n^2 korakih dobimo preslikavo $\widetilde{h}$ na celem kvadratu $[0,1] \times [0,1]$. Enoličnost preslikave $\widetilde{h}$ sledi iz točke (i). □

Naj bo G povezana Liejeva grupa. Za poljubni poti $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G)$ definiramo njun produkt $\gamma\delta \in \mathscr{P}(G)$ s predpisom

$$(\gamma\delta)(s) = \gamma(s)\delta(s)$$

za vse $s \in [0,1]$. Očitno je s to operacijo je množica poti $\mathscr{P}(G)$ grupa. Tako je inverz poti γ pot $\iota(\gamma) \in \mathscr{P}(G)$, dana s predpisom $\iota(\gamma)(s) = \gamma(s)^{-1}$. Podmnožica

$$\mathscr{P}(G; e) = \{\gamma \in \mathscr{P}(G) \mid \gamma(0) = e\} \subset \mathscr{P}(G)$$

vseh poti v G, ki se začnejo v nevtralnem elementu, je podgrupa grupe $\mathscr{P}(G)$. Prav tako je podmnožica

$$\mathscr{P}(G; e, e) = \{\gamma \in \mathscr{P}(G) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = e\} \subset \mathscr{P}(G)$$

vseh poti v G, ki se začnejo in končajo v nevtralnem elementu, podgrupa grupe $\mathscr{P}(G)$. Označimo še

$$\mathscr{K}(G) = \{\kappa \in \mathscr{P}(G; e, e) \mid \kappa \simeq e\}.$$

Trditev 2.105. *Naj bo G povezana Liejeva grupa.*
(i) Množica $\mathscr{K}(G)$ je podgrupa edinka grupe $\mathscr{P}(G)$.
(ii) Poti $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G)$ sta si homotopni če, in samo če, velja $\gamma\mathscr{K}(G) = \delta\mathscr{K}(G)$.
(iii) Za poljubni poti $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G; e)$ so si poti $\gamma * (\mathrm{L}_{\gamma(1)} \circ \delta)$, $\delta * (\mathrm{R}_{\delta(1)} \circ \gamma)$ in $\gamma\delta$ homotopne.
(iv) Za poljubni poti $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G; e, e)$ so si poti $\gamma * \delta$, $\delta * \gamma$, $\gamma\delta$ in $\delta\gamma$ homotopne.

Dokaz. (i) Naj bosta $\kappa, \tau \in \mathscr{K}(G)$. Izberimo homotopijo $(h_t)_t$ v G od e do κ in homotopijo $(k_t)_t$ v G od e do τ. Tedaj je $(h_t k_t)_t$ homotopija od e do $\kappa\tau$, medtem ko je $(\iota(h_t))_t$ homotopija od e do $\iota(\kappa)$. Podmnožica $\mathscr{K}(G)$ je torej podgrupa v $\mathscr{P}(G)$.

Naj bo zdaj še $\gamma \in \mathscr{P}(G)$. Tedaj je $(\gamma h_t \iota(\gamma))_t$ homotopija v G od e do $\gamma\kappa\iota(\gamma)$, zato velja $\gamma\kappa\iota(\gamma) \in \mathscr{K}(G)$. To pomeni, da je $\mathscr{K}(G)$ podgrupa edinka grupe $\mathscr{P}(G)$.

(ii) Predpostavimo, da sta si poti γ in δ homotopni, in naj bo $(h_t)_t$ homotopija v G od γ do δ. Tedaj je $(\iota(\gamma)h_t)_t$ homotopija v G od e do $\iota(\gamma)\delta$, kar pomeni, da je $\iota(\gamma)\delta \in \mathscr{K}(G)$ oziroma $\gamma\mathscr{K}(G) = \delta\mathscr{K}(G)$.

Obratno, če velja $\gamma\mathscr{K}(G) = \delta\mathscr{K}(G)$, odtod sledi $\iota(\gamma)\delta \in \mathscr{K}(G)$ in zato obstaja homotopija $(k_t)_t$ v G od e do $\iota(\gamma)\delta$. Zdaj je $(\gamma k_t)_t$ homotopija v G od γ do δ.

(iii) Za zvezno preslikavo $g : [0,1] \times [0,1] \to G$, $g(s,t) = \gamma(s)\delta(t)$, uporabimo lemo 2.100(iii).

(iv) Ta del trditve sledi direktno iz točke (iii). □

Za poljubno povezano Liejevo grupo G naj bo $\widetilde{G}$ kvocientna grupa grupe $\mathscr{P}(G; e)$ po podgrupi edinki $\mathscr{K}(G)$. Po trditvi 2.105(ii) je torej

$$\widetilde{G} = \mathscr{P}(G; e)/\mathscr{K}(G) = [\mathscr{P}(G; e)] = \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathscr{P}(G),\ \gamma(0) = e\}.$$

Označimo z

$$\omega_G : \widetilde{G} \to G$$

homomorfizem grup, dan s predpisom $\omega_G([\gamma]) = \gamma(1)$.

Pokazali bomo, da na grupi $\widetilde{G}$ obstaja naravna struktura gladke mnogoterosti, glede na katero je $\widetilde{G}$ Liejeva grupa in ω_G krovni homomorfizem Liejevih grup. Naj bo $n = \dim G$ in naj bo $\mathcal{B}_G$ družina vseh odprtih podmnožic Liejeve grupe G, ki so difeomorfne konveksnim odprtim podmnožicam prostora $\mathbb{R}^n$. Vsaka odprta podmnožica v G je unija nekaterih množic iz $\mathcal{B}_G$. Za vsako množico $U \in \mathcal{B}_G$ označimo $\mathscr{P}(G; e, U) = \{\gamma \in \mathscr{P}(G; e) \mid \gamma(1) \in U\}$, in za vsako pot $\gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)$ definirajmo

$$B(\gamma, U) = \{[\gamma * \zeta] \mid \zeta \in \mathscr{P}(U),\ \zeta(0) = \gamma(1)\} \subset \widetilde{G}.$$

Označimo še

$$\widetilde{\mathcal{B}}_G = \{B(\gamma, U) \mid U \in \mathcal{B}_G,\ \gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)\}.$$

Lema 2.106. *Naj bo G povezana Liejeva grupa in naj bodo $U, V \in \mathcal{B}_G$, $\gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)$ ter $\delta \in \mathscr{P}(G; e, V)$.*

(i) Če je $\alpha \in \mathscr{P}(G; e, U)$ takšna pot, da je $[\alpha] \in B(\gamma, U)$, potem je tudi $[\gamma] \in B(\alpha, U)$ in velja $B(\alpha, U) = B(\gamma, U)$.

(ii) Če je $\beta \in \mathscr{P}(G; e, U \cap V)$ takšna pot, da je $[\beta] \in B(\gamma, U) \cap B(\delta, V)$, potem obstaja tak $W \in \mathcal{B}_G$, da je $B(\beta, W) \subset B(\gamma, U) \cap B(\delta, V)$.

(iii) Preslikava $\omega_G|_{B(\gamma,U)} : B(\gamma, U) \to U$ je bijekcija.

Dokaz. (i) Ker je $[\alpha] \in B(\gamma, U)$, obstaja tak $\xi \in \mathscr{P}(U)$, da je $[\alpha] = [\gamma * \xi]$. Naj bo $\bar{\xi} \in \mathscr{P}(U)$ obratna pot poti ξ. Tedaj velja $[\gamma] = [\gamma * \xi * \bar{\xi}] = [\alpha * \bar{\xi}]$ in zato $[\gamma] \in B(\alpha, U)$. Za poljuben $\zeta \in \mathscr{P}(U)$, $\zeta(0) = \xi(1)$, je zdaj $[\alpha * \zeta] = [(\gamma * \xi) * \zeta] = [\gamma * (\xi * \zeta)] \in B(\gamma, U)$, torej velja $B(\alpha, U) \subset B(\gamma, U)$. Iz simetrije sledi tudi obratna inkluzija.

(ii) Izberimo tako majhno okolico $W \in \mathcal{B}_G$ točke $\beta(1)$ v G, da je $W \subset U \cap V$. Iz definicije sledi $B(\beta, W) \subset B(\beta, U) \cap B(\beta, V)$, po točki (i) pa je $B(\beta, U) \cap B(\beta, V) = B(\gamma, U) \cap B(\delta, V)$.

(iii) Ker je U difeomorfna konveksni odprti podmnožici v $\mathbb{R}^n$, je U povezana, poljubni dve poti v U z enakima začetnima in končnima točkama pa sta homotopni v U. Odtod sledi surjektivnost in injektivnost preslikave $\omega_G|_{B(\gamma,U)}$. □

Na grupi $\widetilde{G}$ definiramo topologijo, v kateri so odprte natanko tiste podmnožice, ki jih lahko zapišemo kot unijo nekaterih množic iz družine $\widetilde{B}_G$. S pomočjo leme 2.106(ii) hitro lahko preverimo, da je s tem res definirana topologija na množici $\widetilde{G}$. Za vsak $B(\gamma, U) \in \widetilde{B}_G$ je $\omega_G(B(\gamma, U)) = U \in \mathcal{B}(G)$, iz leme 2.106(iii) pa sledi, da je preslikava $\omega_G|_{B(\gamma,U)} : B(\gamma, U) \to U$ homeomorfizem. Posebej je $\omega_G : \widetilde{G} \to G$ zvezna preslikava, ki poljubno odprto podmnožico topološkega prostora $\widetilde{G}$ preslika v odprto podmnožico Liejeve grupe G. Ker je G povezana, je ω_G surjektivna.

Lema 2.107. *Za poljubno povezano Liejevo grupo G je topološki prostor $\widetilde{G}$ Hausdorffov in 2-števen.*

Dokaz. Naj bosta $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G; e)$. Če je $\gamma(1) \neq \delta(1)$, lahko izberemo disjunktni množici $U, V \in \mathcal{B}_G$, tako da je $\gamma(1) \in U$ in $\delta(1) \in V$. Tedaj sta odprti množici $B(\gamma, U)$ in $B(\delta, V)$ disjunktni okolici točke $[\gamma]$ oziroma $[\delta]$ v $\widetilde{G}$. Če je $\gamma(1) = \delta(1)$, izberemo odprto okolico $U \in \mathcal{B}_G$ točke $\gamma(1)$. Če $[\gamma] \neq [\delta]$, sta tedaj po lemi 2.106(i) odprti množici $B(\gamma, U)$ in $B(\delta, U)$ disjunktni okolici točke $[\gamma]$ oziroma $[\delta]$ v $\widetilde{G}$. S tem smo dokazali, da je prostor $\widetilde{G}$ Hausdorffov.

Dokažimo še, da je prostor $\widetilde{G}$ 2-števen. Ker je prostor G 2-števen, lahko izberemo takšno števno družino $\mathcal{A}$ odprtih nepraznih podmnožic Liejeve grupe G, da je vsaka množica iz $\mathcal{A}$ difeomorfna neki konveksni odprti podmnožici prostora $\mathbb{R}^n$ in da je vsaka odprta podmnožica Liejeve grupe G unija nekaterih množic iz $\mathcal{A}$. Iz vsake množice $U \in \mathcal{A}$ izberemo eno točko x_U. Množica $A = \{x_U \mid U \in \mathcal{A}\}$ vseh teh izbranih točk je števna gosta podmnožica Liejeve grupe G. Dovolj je dokazati, da je za vsako točko $x \in G$ množica homotopskih razredov poti v G od e do x števna. Odtod namreč sledi, da je družina $\widetilde{\mathcal{A}} = \{B(\gamma, U) \mid U \in \mathcal{A},\ \gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)\} = \{B(\gamma, U) \mid \gamma \in \mathscr{P}(G; e),\ \gamma(1) = x_U\}$ števna, vsaka odprta podmnožica prostora $\widetilde{G}$ pa je unija nekaterih množic iz $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Dokažimo torej, da je množica homotopskih razredov poti v G od e do x števna. Za vsako pot γ v G od e do x lahko najdemo množice $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{A}$ in delitev $\{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1\}$ intervala $[0, 1]$, da je $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subset U_i$ za vsak i. Odtod sledi, da lahko zapišemo $[\gamma] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \cdots * [\gamma_k]$, kjer je $\gamma_i \in \mathscr{P}(U_i)$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Ker je množica A gosta v G, lahko izberemo tudi pot $\zeta_i \in \mathscr{P}(U_i \cap U_{i+1})$ od $\gamma_i(1)$ do neke točke iz A, za vsak $i = 1, \ldots, k-1$. Odtod sledi, da je

$$[\gamma] = [\gamma_1 * \zeta_1] * [\bar{\zeta}_1 * \gamma_2 * \zeta_2] * \cdots * [\bar{\zeta}_{k-1} * \gamma_k].$$

S tem smo zapisali $[\gamma]$ kot sklop homotopskih razredov poti v G, od katerih vsaka slika v eno od množic iz števne družine $\mathcal{A}$ in se začne in konča v točkah iz števne množice $A \cup \{e, x\}$. Odtod sledi, da je takšnih homotopskih razredov $[\gamma]$ le števno mnogo. $\square$

Za vsak $U \in \mathcal{B}_G$ izberimo difeomorfizem φ_U iz U na konveksno odprto podmnožico $\varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^n$ je torej lokalna karta na Liejevi grupi G. Za poljubno množico $U \in \mathcal{B}_G$ in vsak $\gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)$ imamo kompozicijo

$$\vartheta_{\gamma,U} = \varphi_U \circ \omega_G|_{B(\gamma,U)} : B(\gamma, U) \to \mathbb{R}^n,$$

ki je homeomorfizem iz množice $B(\gamma, U)$ na sliko $\vartheta_{\gamma,U}(B(\gamma, U)) = \varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^n$. Družina lokalni kart

$$\{\vartheta_{\gamma,U} \mid U \in \mathcal{B}_G,\ \gamma \in \mathscr{P}(G; e, U)\}$$

je gladek atlas na topološkem prostoru $\widetilde{G}$, glede na katerega $\widetilde{G}$ postane gladka mnogoterost, $\omega_G : \widetilde{G} \to G$ pa lokalni difeomorfizem. Res, da so prehodne preslikave tega atlasa gladke sledi direktno iz definicije in leme 2.106(ii). Vidimo torej, da ima grupa $\widetilde{G}$ naravno strukturo gladke mnogoterosti. Naslednja trditev pove, da je glede na to naravno gladko strukturo grupa $\widetilde{G}$ Liejeva grupa.

TRDITEV 2.108. *Naj bo G povezana Liejeva grupa.*

(i) Z naravno strukturo gladke mnogoterosti je pridružena grupa $\widetilde{G}$ povezana Liejeva grupa, homomorfizem $\omega_G : \widetilde{G} \to G$ pa je krovni homomorfizem Liejevih grup.

(ii) Za vsak krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup $\phi : H \to G$ obstaja natanko en homomorfizem Liejevih grup $\omega_\phi : \widetilde{G} \to H$, za katerega je $\phi \circ \omega_\phi = \omega_G$. Homomorfizem ω_ϕ je krovni homomorfizem Liejevih grup.

(iii) Z lastnostjo (ii) sta Liejeva grupa $\widetilde{G}$ in krovni homomorfizem Liejevih grup $\omega_G : \widetilde{G} \to G$ enolično določena do izomorfizma natančno.

KOMENTAR 2.109. Liejevo grupo $\widetilde{G}$ imenujemo *univerzalna krovna Liejeva grupa* Liejeve grupe G, krovni homomorfizem $\omega_G : \widetilde{G} \to G$ pa imenujemo *univerzalni krovni homomorfizem* nad povezano Liejevo grupo G. Lastnost (ii) je *univerzalna lastnost* univerzalnega krovnega homomorfizma ω_G.

DOKAZ. (i) Naj bosta $\gamma, \delta \in \mathscr{P}(G; e)$ in naj bo $U \in \mathcal{B}_G$, tako da je $\gamma(1)\delta(1) \in U$. Ker je množenje μ_G v Liejevi grupi G gladka preslikava, lahko izberemo tako majhni množici $V, W \in \mathcal{B}_G$, da je $\gamma(1) \in V$, $\delta(1) \in W$ in $\mu(V, W) \subset U$. Za poljubni poti $\zeta \in \mathscr{P}(V)$ in $\xi \in \mathscr{P}(W)$, za kateri je $\zeta(0) = \gamma(1)$ in $\xi(0) = \delta(1)$, velja

$$(\gamma * \zeta)(\delta * \xi) = (\gamma\delta) * (\zeta\xi).$$

Ker ob tem velja $\zeta\xi \in \mathscr{P}(U)$, smo s tem dokazali, da za množenje $\mu_{\widetilde{G}}$ v grupi $\widetilde{G}$ velja $\mu_{\widetilde{G}}(B(\gamma, V) \times B(\delta, W)) \subset B(\gamma\delta, U)$. Gladkost preslikave $\mu_{\widetilde{G}}$ zdaj sledi iz komutativnosti diagrama zoženih preslikav

$$\begin{tikzcd} B(\gamma, V) \times B(\delta, W) \arrow[r, "\mu_{\widetilde{G}}"] \arrow[d, "\omega\times\omega"'] & B(\gamma\delta, U) \arrow[d, "\omega"] \\ V \times W \arrow[r, "\mu_G"'] & U \end{tikzcd}$$

in dejstva, da je preslikava $\omega = \omega_G$ difeomorfizem med $B(\gamma, V)$ in V, med $B(\delta, W)$ in W ter med $B(\gamma\delta, U)$ in U. Na podoben način iz enakosti $\iota(\gamma * \zeta) = \iota(\gamma) * \iota(\zeta)$ sledi, da je tudi invertiranje v grupi $\widetilde{G}$ gladka preslikava. Grupa $\widetilde{G}$ je torej Liejeva grupa. Iz definicije sledi, da je ω_G lokalni difeomorfizem.

Pokazati moramo še to, da je Liejeva grupa G povezana. Za poljubno pot $\gamma \in \mathscr{P}(G; e)$ in vsak $t \in [0, 1]$ definirajmo pot $\gamma_t \in \mathscr{P}(G; e)$ s predpisom $\gamma_t(s) = \gamma(st)$. V lokalnih kartah lahko direktno preverimo, da je preslikava $t \mapsto [\gamma_t]$ zvezna pot v $\widetilde{G}$ od $[\gamma_0] = e$ do $[\gamma_1] = [\gamma]$.

(ii) Za poljubno pot $\gamma \in \mathscr{P}(G; e)$ naj bo $\widetilde{\gamma}$ njen dvig vzdolž ϕ z začetkom v e, in definirajmo

$$\omega_\phi([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1).$$

Po trditvi 2.103 je to smiselna definicija. Iz definicije sledi enakost $\phi \circ \omega_\phi = \omega_G$. Za poljubno okolico $V \in \mathcal{B}_G$ točke $\gamma(1)$, na kateri ima ϕ lokalni prerez, in za vsako pot $\zeta \in \mathscr{P}(V)$ z začetkom v $\gamma(1)$ je dvig poti $\gamma * \zeta$ vzdolž ϕ z začetkom v e enak sklopu $\widetilde{\gamma} * \xi$, kjer je ξ dvig poti ζ vzdolž ϕ z začetkom v $\gamma(1)$. Za primerno izbiro lokalnega prereza $\sigma : V \to H$ krovnega homomorfizma ϕ je torej $\xi = \sigma \circ \zeta$. Posebej to pomeni, da je $\omega_\phi(B(\gamma, V)) \subset \sigma(V)$ in da je $\omega_\phi|_{B(\gamma,V)} = \omega_G \circ \sigma$, odtod pa sledi, da je ω_ϕ gladka preslikava in tudi lokalni difeomorfizem.

Naj bo zdaj $\psi : \widetilde{G} \to H$ poljuben homomorfizem Liejevih grup, za katerega je $\phi \circ \psi = \omega_G$. Ker je pot $t \mapsto [\gamma_t]$ dvig poti γ vzdolž ω_G z začetkom v e in koncem v $[\gamma]$, mora biti $t \mapsto \psi([\gamma_t])$ dvig poti γ vzdolž ϕ z začetkom v e. Za končno točko te poti mora torej veljati

$$\psi([\gamma]) = \psi([\gamma_1]) = \widetilde{\gamma}(1) = \omega_\phi([\gamma]),$$

torej $\psi = \omega_\phi$.

(iii) Naj bo $\rho : K \to G$ poljuben krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup, za katerega velja univerzalna lastnosti: za vsak krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup $\phi : H \to G$ obstaja natanko en homomorfizem Liejevih grup $\rho_\phi : K \to H$, za katerega velja $\phi \circ \rho_\phi = \rho$. Zaradi enoličnosti sledi, da je $\omega_\rho \circ \rho_{\omega_G} = \mathrm{id}_K$.

Podobno iz točke (ii) sledi, da je $\rho_{\omega_G} \circ \omega_\rho = \mathrm{id}_{\widetilde{G}}$. Preslikava ω_ρ je torej izomorfizem Liejevih grup. □

Vaja 2.110. Naj bo G povezana Liejeva grupa ter $\phi : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tak homomorfizem Liejevih grup, da je $\omega_G \circ \phi = \omega_G$. Ker seveda velja tudi $\omega_G \circ \mathrm{id}_{\widetilde{G}} = \omega_G$, nam enoličnost iz univerzalne lastnosti univerzalnega krovnega homomorfizma da enakost $\phi = \mathrm{id}_{\widetilde{G}}$.

Naj bo $\phi : H \to G$ poljuben homomorfizem povezanih Liejevih grup. Prirejena preslikava $\mathscr{P}(\phi) : \mathscr{P}(H; e) \to \mathscr{P}(G; e)$ je homomorfizem grup. Direktno po definicijo lahko preverimo, da je inducirani homomorfizem

$$\widetilde{\phi} = [\mathscr{P}(\phi)] : \widetilde{H} \to \widetilde{G}$$

tudi gladka preslikava, in je torej homomorfizem Liejevih grup. Opazimo lahko, da komutira diagram:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\omega_H"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\omega_G"] \\ H \arrow[r, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

Če je $\psi : K \to H$ še en homomorfizem povezanih Liejevih grup, velja $\widetilde{\phi} \circ \widetilde{\psi} = (\phi \circ \psi)^{\sim}$.

Definicija 2.111. *Fundamentalna grupa* povezane Liejeve grupe G je jedro univerzalnega krovnega homomorfizma

$$\pi_1(G) = \ker \omega_G.$$

Povezana Liejeva grupa G je *enostavno povezana*, če je $\pi_1(G) = \{e\}$.

Komentar 2.112. Fundamentalna grupa $\pi_1(G)$ je torej diskretna podgrupa centra $\mathrm{Z}(\widetilde{G})$ in posebej abelova. Elementi fundamentalne grupe so homotopski razredi poti v G, ki se začnejo in končajo v nevtralnem elementu,

$$\pi_1(G) = [\mathscr{P}(G; e, e)] = \mathscr{P}(G; e, e)/\mathscr{K}(G).$$

Poljuben homomorfizem $\phi : H \to G$ povezanih Liejevih grup nam inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$\pi_1(\phi) : \pi_1(H) \to \pi_1(G),$$

ki je dan z zožitvijo homomorfizma $\widetilde{\phi}$.

Povezana Liejeva grupa G je enostavno povezana, če, in samo če, je ω_G izomorfizem.

Trditev 2.113. *(i) Univerzalna krovna Liejeva grupa poljubne povezane Liejeve grupe je enostavno povezana.*

(ii) Če je $\rho : K \to G$ krovni homomorfizem povezanih Liejevih grup in je Liejeva grupa K enostavno povezana, potem je homomorfizem $\omega_\rho : \widetilde{G} \to K$ izomorfizem Liejevih grup.

Dokaz. (i) Naj bo G povezana Liejeva grupa. Kompozicija $\phi = \omega_G \circ \omega_{\widetilde{G}} : (\widetilde{G})^{\sim} \to G$ je krovni homomorfizem in

$$\omega_G \circ (\omega_{\widetilde{G}} \circ \omega_\phi) = (\omega_G \circ \omega_{\widetilde{G}}) \circ \omega_\phi = \phi \circ \omega_\phi = \omega_G.$$

Odtod, po enoličnosti iz univerzalne lastnosti krovnega homomorfizma ω_G, sledi $\omega_{\widetilde{G}} \circ \omega_\phi = \mathrm{id}_{\widetilde{G}}$. Krovni homomorfizem $\omega_{\widetilde{G}}$ ima torej globalni prerez, torej je izomorfizem.

(ii) Preslikava $\omega_\rho : \widetilde{G} \to K$ je krovni homomorfizem, zato imamo pridruženi homomorfizem Liejevih grup $\omega_{\omega_\rho} : \widetilde{K} \to \widetilde{G}$, za katerega je $\omega_\rho \circ \omega_{\omega_\rho} = \omega_K$. Ker je Liejeva grupa K enostavno povezana, je ω_K izomorfizem, torej velja $\omega_\rho \circ \omega_{\omega_\rho} \circ \omega_K^{-1} = \mathrm{id}_K$. Krovni homomorfizem ω_ρ ima torej globalni prerez, zato je izomorfizem. $\square$

Zgled 2.114. (1) Preslikava $\phi : \mathbb{R} \to S^1$, $\phi(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, je krovni homomorfizem Liejevih grup z jedrom $\mathbb{Z}$. Ker je $\mathbb{R}$ vektorski prostor in torej konveksna množica, sta poljubni dve poti z istimi krajišči v $\mathbb{R}$ homotopni, zato je $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$. To pomeni, da je Liejeva grupa $(S^1)^\sim$ izomorfna $\mathbb{R}$ in da je $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

(2) Poti v produktu Liejevih grup $G \times H$ so pari poti v G in poti v H, podobno pa velja tudi za homotopije. Odtod direktno sledi, da velja $(G \times H)^\sim = \widetilde{G} \times \widetilde{H}$ in $\pi_1(G \times H) = \pi_1(G) \times \pi_1(H)$. Posebej velja $(T^n)^\sim = \mathbb{R}^n$ in $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$.

(3) V splošnem je fundamentalno grupo Liejeve grupe težje izračunati brez močnejših orodij algebraične topologije. Naj brez dokaza navedemo, da so Liejeve grupe $\mathrm{SU}(n)$ enostavno povezane, medtem ko je $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ za $n \geq 3$. Za $n \geq 3$ Liejevo grupo

$$\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{SO}(n)^\sim$$

imenujemo *spin grupa* stopnje n, pripadajoči homomorfizem

$$\omega_{\mathrm{SO}(n)} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

z jedrom, ki ima dva elementa, pa imenujemo *spin homomorfizem*. Posebej je homomorfizem $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ iz trditve 2.97 univerzalni krovni homomorfizem, zato je torej $\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2)$.

2.7.4. Homomorfizmi Liejevih grup in Liejevih algeber.

Trditev 2.115. *Naj bosta $\phi, \psi : H \to G$ homomorfizma Liejevih grup in naj bo Liejeva grupa H povezana. Če je $\mathfrak{L}(\phi) = \mathfrak{L}(\psi)$, potem velja $\phi = \psi$.*

Dokaz. Iz enakosti $\phi \circ \exp_H = \exp_G \circ \mathfrak{L}(\phi) = \exp_G \circ \mathfrak{L}(\psi) = \psi \circ \exp_H$ sledi, da se ϕ in ψ ujemata na sliki eksponentne preslikave v H. Ker je povezana grupa H generirana z elementi iz te slike, se torej ϕ in ψ ujemata na celi grupi H. $\square$

Izrek 2.116. *Naj bo H enostavno povezana Liejeva grupa in G poljubna Liejeva grupa. Za vsak homomorfizem Liejevih algeber $\Phi : \mathfrak{L}(H) \to \mathfrak{L}(G)$ obstaja natanko en homomorfizem Liejevih grup $\phi : H \to G$, za katerega velja $\mathfrak{L}(\phi) = \Phi$.*

Dokaz. Ker je Φ homomorfizem Liejevih algeber, je množica $\mathfrak{k} = \{(v, \Phi(v)) \in \mathfrak{L}(H) \times \mathfrak{L}(G) \mid v \in \mathfrak{L}(H)\}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{L}(H) \times \mathfrak{L}(G) = \mathfrak{L}(H \times G)$. Po izreku 2.66 obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa K Liejeve grupe $H \times G$, za katero je $\mathfrak{L}(K) = \mathfrak{k}$. Naj bo $\pi : K \to H$ zožitev projekcije $\mathrm{pr}_1 : H \times G \to H$ na podgrupo K. Ker velja $\mathfrak{L}(\pi)(v, \Phi(v)) = v$, je $\mathfrak{L}(\pi)$ izomorfizem Liejevih algeber, zato je π krovni homomorfizem. Ker je Liejeva grupa H enostavno povezana, je π izomorfizem Liejevih grup. Zdaj je $\phi = \mathrm{pr}_2 \circ \pi^{-1}$. Enoličnost sledi po trditvi 2.115. $\square$

POSLEDICA 2.117. *Naj bo H enostavno povezana Liejeva grupa in G poljubna Liejeva grupa. S preslikavo $\phi \mapsto \mathfrak{L}(\phi)$ je dana bijekcija med množico homomorfizmov Liejevih grup $H \to G$ in množico homomorfizmov Liejevih algeber $\mathfrak{L}(H) \to \mathfrak{L}(G)$.*

DOKAZ. Sledi direktno iz trditve 2.116. □

IZREK 2.118. *Za vsako končno dimenzionalno realno Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ obstaja do izomorfizma enolično določena enostavno povezana Liejeva grupa G, katere Liejeva algebra $\mathfrak{L}(G)$ je izomorfna Liejevi algebri $\mathfrak{g}$.*

DOKAZ. Adojev izrek iz teorije končno dimenzionalnih Liejevih algeber (glej knjigo [**3**]) nam pove, da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna neki Liejevi podalgebri $\mathfrak{h}$ splošne linearne Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, za nek $m \in \mathbb{N}$. Po izreku 2.66 obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa H Liejeve grupe $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, za katero je $\mathfrak{L}(H) = \mathfrak{h}$. Zdaj vzamemo $G = \widetilde{H}$. Enoličnost Liejeve grupe G, katere Liejeva algebra $\mathfrak{L}(G)$ je izomorfna Liejevi algebri $\mathfrak{g}$, sledi iz izreka 2.116. □

Poglavje 3

Reprezentacije Liejevih grup

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj osnovnih pojmov iz teorije reprezentacij Liejevih grup, posebej kompaktnih Liejevih grup. Študent lahko več rezultatov in zgledov najde na primer v knjigi [**1**].

3.1. Definicija in prvi zgledi

Spomnimo se, da je reprezentacija Liejeve grupe G na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V nad $\mathbb{F}$ homomorfizem Liejevih grup

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V}).$$

Alternativno lahko takšno reprezentacijo predstavimo kot levo delovanje Liejeve grupe G na V,

$$G \times \mathsf{V} \to \mathsf{V},$$

ki je dano s predpisom $xv = \rho(x)v$ za vsak $v \in \mathsf{V}$ in vsak $x \in G$. To delovanje je *linearno*, kar pomeni, da je za vsak $x \in G$ preslikava $\mathsf{V} \to \mathsf{V}$, $v \mapsto xv$, linearna. Končno dimenzionalen vektorski prostor V, opremljen z linearnim delovanjem Liejeve grupe G, imenujemo tudi *končno dimenzionalen G-modul*. Vsak končno dimenzionalen G-modul V predstavlja neko reprezentacijo Liejeve grupe G na V, in v tem smislu sta si pojma končno dimenzionalne reprezentacije Liejeve grupe G in končno dimenzionalnega G-modula ekvivalentna.

Za poljubno reprezentacijo ρ Liejeve grupe G na končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V bomo krajše označili $\rho_x = \rho(x)$ in $xv = \rho_x v$, za vse $x \in G$ in $v \in \mathsf{V}$. Reprezentacijo ρ bomo običajno zapisali kot par (ρ, V) ali pa tudi na kratko z V. V nadaljevanju bomo predpostavili, da so vse naše reprezentacije *končno dimenzionalne*, torej da so reprezentacije na končno dimenzionalnih vektorskih prostorih. Reprezentacijam Liejeve grupe G bomo na kratko rekli tudi *G-reprezentacije*.

Komentar 3.1. Po naši predpostavki so reprezentacije Liejevih grup in delovanja Liejevih grup gladke preslikave. Naj bo G Liejeva grupa in V končno dimenzionalen vektorski prostor. Po trditvi 2.89 je vsak zvezen homomorfizem grup $G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ gladek in torej reprezentacija Liejeve grupe G na V. Podobno lahko vidimo, da je zvezno linearno delovanje $G \times \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ Liejeve grupe G na V avtomatično gladka preslikava.

Vsaka reprezentacija (ρ, V) Liejeve grupe G nam da pridruženo reprezentacijo

$$\mathfrak{L}(\rho) : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$$

Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$. Opazimo lahko, da je reprezentacija $\mathfrak{L}(\rho)$ zvesta če, in samo če, je jedro reprezentacije ρ diskretna podgrupa Liejeve grupe G. V tem primeru pravimo, da je reprezentacija ρ *skoraj zvesta*.

Trditev 3.2. *Naj bo G enostavno povezana Liejeva grupa in V končno dimenzionalen vektorski prostor. Predpis $\rho \to \mathfrak{L}(\rho)$ nam da bijekcijo med reprezentacijami grupe G na V in reprezentacijami Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ na V.*

Dokaz. Direktna posledica izreka 2.116. □

Definicija 3.3. Naj bosta (ρ, V) in (τ, W) reprezentaciji Liejeve grupe G. *Homomorfizem G-reprezentacij* iz (τ, W) v (ρ, V) je linearna preslikava $A : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$, za katero velja

$$A \circ \tau_x = \rho_x \circ A$$

za vse $x \in G$.

Komentar 3.4. Linearna preslikava $A : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ zadošča pogoju $A \circ \tau_x = \rho_x \circ A$ za vsak $x \in G$ če, in samo če, je G-ekvivariantna, torej če velja

$$A(xw) = x(Aw)$$

za vse $x \in G$ in $w \in \mathsf{W}$.

Množico vseh homomorfizmov G-reprezentacij iz $\mathsf{W} = (\tau, \mathsf{W})$ v $\mathsf{V} = (\rho, \mathsf{V})$ označimo z

$$\mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V}).$$

Opazimo, da je množica $\mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ vektorski podprostor vektorskega prostora $\mathrm{Hom}(\mathsf{W}, \mathsf{V}) = \mathrm{Lin}(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ vseh linearnih preslikav $\mathsf{W} \to \mathsf{V}$. Za poljubna homomorfizma G-reprezentacij $A \in \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ in $B \in \mathrm{Hom}_G(\mathsf{U}, \mathsf{W})$ je kompozicija $AB = A \circ B$ spet homomorfizem G-reprezentacij.

Če je $A \in \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ bijekcija, je tudi njen inverz A^{-1} homomorfizem G-reprezentacij. V tem primeru pravimo, da je A *izomorfizem* G-reprezentacij. Dve G-reprezentaciji V in W sta si *ekvivalentni* oziroma *izomorfni*, če obstaja kakšen izomorfizem med njima, in tedaj označimo $\mathsf{V} \cong \mathsf{W}$. *Izomorfnostni razred* G-reprezentacije V je ekvivalenčni razred $[\mathsf{V}]$ reprezentacije V glede na relacijo izomorfnosti.

Endomorfizem G-reprezentacije $\mathsf{V} = (\rho, \mathsf{V})$ je homomorfizem G-reprezentacij $\mathsf{V} \to \mathsf{V}$. Vektorski prostor vseh takšnih endomorfizmov označimo z $\mathrm{End}_G(\mathsf{V}) = \mathrm{Hom}_G(\mathsf{V}, \mathsf{V})$.

Zgled 3.5. (1) Poljubna matrična grupa G, torej Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, ima *standardno* zvesto reprezentacijo na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$, ki je dana z inkluzijo $G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Pripadajoče delovanje Liejeve grupe G na $\mathbb{F}^n$ je dano z množenjem matrike z vektorjem.

(2) Reprezentacije Liejeve grupe G na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$ imenujemo tudi *matrične reprezentacije*. Matrična reprezentacija Liejeve grupe G je torej homomorfizem Liejevih grup $G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Iz definicije sledi, da sta matrični reprezentaciji $\rho, \tau : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ ekvivalentni če, in samo če, obstaja obrnljiva matrika $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, tako da velja

$$A \tau_x A^{-1} = \rho_x$$

za vsak $x \in G$. Reprezentaciji sta si v tem primeru torej konjugirani.

(3) Naj bo (ρ, V) reprezentacija Liejeve grupe G. Izberimo bazo $\mathcal{B}$ vektorskega prostora V. Naj bo $A : \mathsf{V} \to \mathbb{F}^n$ linearni izomorfizem, ki preslika bazo $\mathcal{B}$ v standardno bazo vektorskega prostora $\mathbb{F}^n$, in naj bo $R(x) = [\rho_x]_{\mathcal{B}}$ matrika linearnega izomorfizma $\rho_x : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ v bazi $\mathcal{B}$, za vsak $x \in G$. Tedaj je R matrična reprezentacija Liejeve grupe G, preslikava A pa je izomorfizem med reprezentacijama ρ in

R. Posebej to pomeni, da je vsaka reprezentacija ekvivalentna neki matrični reprezentaciji. Drugačna izbira baze vektorskega prostora V bi nam dala v splošnem drugačno matrično reprezentacijo, ki pa bi bila ekvivalentna oziroma konjugirana reprezentaciji R.

(4) *Trivialna* reprezentacija Liejeve grupe G na vektorskem prostoru V je reprezentacija, ki vsakemu elementu $x \in G$ priredi identiteto id_{V} na V.

(5) Spoznali smo že adjungirano reprezentacijo Ad poljubne Liejeve grupe G na njeni Liejevi algebri $\mathfrak{L}(G)$. Pripadajoča reprezentacija $\mathfrak{L}(\mathrm{Ad})$ Liejeve algebre $\mathfrak{L}(G)$ je adjungirana reprezentacija ad.

3.1.1. Direktna vsota reprezentacij. Naj bosta (ρ, V) in (τ, W) reprezentaciji Liejeve grupe G. *Direktna vsota* reprezentacij (ρ, V) in (τ, W) je reprezentacija $(\rho \oplus \tau, \mathsf{V} \oplus \mathsf{W})$ Liejeve grupe G na vektorskem prostoru $\mathsf{V} \oplus \mathsf{W} = \mathsf{V} \times \mathsf{W}$, dana s predpisom

$$(\rho \oplus \tau)_x(v, w) = (\rho_x \oplus \tau_x)(v, w) = (\rho_x v, \tau_x w)$$

oziroma na kratko

$$x(v, w) = (xv, xw),$$

za vse $x \in G$, $v \in \mathsf{V}$ in $w \in \mathsf{W}$.

Linearno preslikavo $(\rho \oplus \tau)_x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V} \oplus \mathsf{W})$ lahko glede na direktno vsoto $\mathsf{V} \oplus \mathsf{W}$ zapišemo v bločni obliki:

$$(\rho \oplus \tau)_x = \rho_x \oplus \tau_x = \begin{bmatrix} \rho_x & 0 \\ 0 & \tau_x \end{bmatrix}$$

Za poljubne reprezentacije $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{W}$ Liejeve grupe G imamo naravna izomorfizma G-reprezentacij $\mathsf{V} \oplus \mathsf{W} \cong \mathsf{W} \oplus \mathsf{V}$ in $(\mathsf{U} \oplus \mathsf{V}) \oplus \mathsf{W} \cong \mathsf{U} \oplus (\mathsf{V} \oplus \mathsf{W})$.

3.1.2. Tenzorski produkt reprezentacij. Naj bosta (ρ, V) in (τ, W) reprezentaciji Liejeve grupe G. *Tenzorski produkt* reprezentacij (ρ, V) in (τ, W) je reprezentacija $(\rho \otimes \tau, \mathsf{V} \otimes \mathsf{W})$ Liejeve grupe G na vektorskem prostoru $\mathsf{V} \otimes \mathsf{W}$, določena s predpisom

$$(\rho \otimes \tau)_x(v \otimes w) = (\rho_x \otimes \tau_x)(v \otimes w) = \rho_x v \otimes \tau_x w$$

oziroma

$$x(v \otimes w) = xv \otimes xw$$

za vse $x \in G$, $v \in \mathsf{V}$ in $w \in \mathsf{W}$.

Naj bo $\mathcal{B}_{\mathsf{V}} = [v_1, \ldots, v_n]$ baza vektorskega prostora V in $\mathcal{B}_{\mathsf{W}} = [w_1, \ldots, w_m]$ baza vektorskega prostora W. Tedaj je

$$\mathcal{B}_{\mathsf{V}} \otimes \mathcal{B}_{\mathsf{W}} = [v_1 \otimes w_1, \ldots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \ldots, v_n \otimes w_m]$$

baza vektorskega prostora $\mathsf{V} \otimes \mathsf{W}$, ki je dimenzije nm. Naj bosta R in T matrični reprezentaciji Liejeve grupe G, prirejeni reprezentacijama ρ in τ glede na bazi $\mathcal{B}_{\mathsf{V}}$ oziroma $\mathcal{B}_{\mathsf{W}}$, torej

$$R(x) = [\rho_x]_{\mathcal{B}_{\mathsf{V}}}, \qquad T(x) = [\tau_x]_{\mathcal{B}_{\mathsf{W}}},$$

za vsak $x \in G$. Komponente matrik $R(x)$ in $T(x)$ dobimo iz razvoja po bazah

$$\rho_x v_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}(x) v_i, \qquad \tau_x w_l = \sum_{k=1}^{m} T_{kl}(x) w_k.$$

Komponente matrične reprezentacije $S(x) = [\rho_x \otimes \tau_x]_{\mathcal{B}_{\mathsf{V}} \otimes \mathcal{B}_{\mathsf{W}}}$ zdaj izračunamo iz razvoja po bazi

$$\begin{aligned}(\rho_x \otimes \tau_x)(v_j \otimes w_l) = \rho_x v_j \otimes \tau_x w_l &= \sum_{i=1}^{n} R_{ij}(x) v_i \otimes \sum_{k=1}^{m} T_{kl}(x) w_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} R_{ij}(x) T_{kl}(x) v_i \otimes w_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} S_{(ik)(jl)}(x) v_i \otimes w_k.\end{aligned}$$

Matriko $S(x)$ označimo z $R(x) \otimes T(x)$ in jo imenujemo *tenzorski* ali *Kroneckerjev produkt* matrik $R(x)$ in $T(x)$.

Za poljubne reprezentacije $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{W}$ Liejeve grupe G imamo naravne izomorfizme G-reprezentacij $\mathsf{V} \otimes \mathsf{W} \cong \mathsf{W} \otimes \mathsf{V}$, $(\mathsf{U} \otimes \mathsf{V}) \otimes \mathsf{W} \cong \mathsf{U} \otimes (\mathsf{V} \otimes \mathsf{W})$ in $\mathsf{U} \otimes (\mathsf{V} \oplus \mathsf{W}) \cong (\mathsf{U} \otimes \mathsf{V}) \oplus (\mathsf{U} \otimes \mathsf{W})$.

3.1.3. Dualna reprezentacija. Naj bo (ρ, V) poljubna reprezentacija Liejeve grupe G. *Dualna* reprezentacija reprezentacije (ρ, V) je reprezentacija (ρ^*, V^*) Liejeve grupe G na dualnem vektorskem prostoru $\mathsf{V}^* = \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathbb{F}) = \mathrm{Lin}(\mathsf{V}, \mathbb{F})$, določena s predpisom

$$(\rho_x^* f) v = f(\rho_{x^{-1}} v)$$

oziroma

$$(xf) v = f(x^{-1} v)$$

za vse $x \in G$, $f \in \mathsf{V}^*$ in $v \in \mathsf{V}$.

Naj bo $\mathcal{B} = [v_1, \ldots, v_n]$ baza vektorskega prostora V in $\mathcal{B}^* = [v_1^*, \ldots, v_n^*]$ njej dualna baza dualnega vektorskega prostora V^*. Naj bo R matrična reprezentacija Liejeve grupe G, prirejena reprezentaciji ρ glede na bazo $\mathcal{B}$, torej $R(x) = [\rho_x]_{\mathcal{B}}$ oziroma $\rho_x v_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}(x) v_i$ za vsak $x \in G$. Komponente matrične reprezentacije $S(x) = [\rho_x^*]_{\mathcal{B}^*}$ so tedaj določene z razvojem po dualni bazi $\rho_x^* v_j^* = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}(x) v_i^*$, pri tem pa je

$$S_{ij}(x) = (\rho_x^* v_j^*) v_i = v_j^*(\rho_{x^{-1}} v_i) = v_j^*\Big(\sum_{k=1}^{n} R_{ki}(x^{-1}) v_k\Big) = R_{ji}(x^{-1}).$$

Velja torej $S(x) = R(x^{-1})^T$.

Za poljubni G-reprezentaciji U in V imamo torej G-reprezentacijo $\mathsf{V}^* \otimes \mathsf{U}$, pa tudi naravni izomorfizem vektorskih prostorov $\Delta_{\mathsf{V},\mathsf{U}} : \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{U} \to \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{U}) = \mathrm{Lin}(\mathsf{V}, \mathsf{U})$, ki je dan s predpisom

$$\Delta_{\mathsf{V},\mathsf{U}}(f \otimes u) v = f(v) u$$

za vse $f \in \mathsf{V}^*$, $u \in \mathsf{U}$ in $v \in \mathsf{V}$. Če opremimo vektorski prostor $\mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{U})$ z linearnim delovanjem Liejeve grupe G

$$(xA) v = x(A(x^{-1} v)),$$

postane $\mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{U})$ reprezentacija Liejeve grupe G, preslikava $\Delta_{\mathsf{V},\mathsf{U}}$ pa izomorfizem G-reprezentacij. Posebej je $\mathrm{End}(\mathsf{V}) = \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ reprezentacija Liejeve grupe G.

Če opremimo $\mathbb{F}$ s trivialno reprezentacijo Liejeve grupe G, je evaluacija $\mathrm{ev}_{\mathsf{V}} : \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V} \to \mathbb{F}$, $f \otimes v \mapsto f(v)$, homomorfizem G-reprezentacij. Ni težko preveriti, da je sled poljubnega endomorfizma $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ enaka

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{ev}_{\mathsf{V}}(\Delta^{-1}_{\mathsf{V},\mathsf{V}}(A)),$$

kar posebej pomeni, da je tudi sled

$$\mathrm{tr} = \mathrm{ev}_{\mathsf{V}} \circ \Delta^{-1}_{\mathsf{V},\mathsf{V}} : \mathrm{End}(\mathsf{V}) \to \mathbb{F}$$

homomorfizem G-reprezentacij.

VAJA 3.6. (1) Naj bosta V in W končno dimenzionalna vektorska prostora.
(i) Za poljubna $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ in $B \in \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ velja

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

(ii) Za poljubna $A \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{W})$ in $B \in \mathrm{Hom}(\mathsf{W},\mathsf{V})$ je

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

(iii) Za poljubna $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ in $B \in \mathrm{End}(\mathsf{W})$ velja

$$\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

in

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B),$$

kjer sta $A \oplus B \in \mathrm{End}(\mathsf{V} \oplus \mathsf{W})$ in $A \otimes B \in \mathrm{End}(\mathsf{V} \otimes \mathsf{W})$ dana z $(A \oplus B)(v,w) = (Av, Bw)$ in $(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$.
(iv) Za vsak $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ je

$$\mathrm{tr}(A^*) = \mathrm{tr}(A),$$

kjer je preslikava $A^* \in \mathrm{End}(\mathsf{V}^*)$ dana s predpisom $(A^* f)v = f(Av)$ za vse $f \in \mathsf{V}^*$ in $v \in \mathsf{V}$. Če je A projektor (torej $A^2 = A$), potem je

$$\mathrm{tr}(A) = \dim A(\mathsf{V}).$$

(2) Naj bo G Liejeva grupa in V poljubna G-reprezentacija. Konjugirani vektorski prostor $\bar{\mathsf{V}}$ vektorskega prostora V je enak abelovi grupi V za seštevanje, a je opremljen s konjugiranim množenjem s skalarji: produkt vektorja $v \in \bar{\mathsf{V}} = \mathsf{V}$ s skalarjem $\alpha \in \mathbb{F}$ v vektorskem prostoru $\bar{\mathsf{V}}$ je enak $\bar{\alpha}v$. Na ta način je $\bar{\mathsf{V}}$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in tudi G-reprezentacija z delovanjem, ki je enako delovanju Liejeve grupe G na V. Tako definirano G-reprezentacijo $\bar{\mathsf{V}}$ imenujemo *konjugirana reprezentacija* reprezentacije V. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, je seveda $\bar{\mathsf{V}} = \mathsf{V}$, zato je omenjena konstrukcija zanimiva predvsem v primeru, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Za poljuben endomorfizem $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ definiramo endomorfizem $A_{\bar{\mathsf{V}}} \in \mathrm{End}(\bar{\mathsf{V}})$ z enakim predpisom kot A, ob tem pa velja $\mathrm{tr}(A_{\bar{\mathsf{V}}}) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$.

Če vektorski prostor V opremimo s skalarnim produktom, je preslikava $\bar{\mathsf{V}} \to \mathsf{V}^*$, $w \mapsto \langle \text{-}\,, w\rangle$, izomorfizem vektorskih prostorov nad $\mathbb{F}$. Ta preslikava je izomorfizem G-reprezentacij če, in samo če, za vsak $x \in G$ in za vse vektorje $v, w \in \mathsf{V}$ velja enakost $\langle xv, xw\rangle = \langle v, w\rangle$.

3.2. Ireducibilne reprezentacije

Definicija 3.7. Naj bo V reprezentacija Liejeve grupe G. Vektorski podprostor $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ je *G-invarianten*, če za vsak $x \in G$ in vsak $w \in \mathsf{W}$ velja $xw \in \mathsf{W}$.

Komentar 3.8. Poljuben G-invarianten vektorski podprostor $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ je tudi sam zase G-reprezentacija, zato mu pravimo tudi *podreprezentacija* reprezentacije V Liejeve grupe G.

Zgled 3.9. (1) Za poljubno reprezentacijo V Liejeve grupe G sta $\{0\}$ in V podreprezentaciji reprezentacije V.

(2) Naj bosta V in W reprezentaciji Liejeve grupe G in naj bo $A \in \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$. Tedaj je podprostor $\ker(A) \subset \mathsf{W}$ G-invarianten, saj za vsak $x \in G$ in vsak $u \in \ker(A)$ velja $A(xu) = x(Au) = 0$. Poleg tega je tudi podprostor $\mathrm{im}(A) \subset \mathsf{V}$ G-invarianten. Res, za poljuben $v \in \mathrm{im}(A)$ je $v = Aw$ za nek $w \in \mathsf{W}$, odtod pa sledi $xv = x(Aw) = A(xw) \in \mathrm{im}(A)$ za vsak $x \in G$.

(3) Naj bo V reprezentacija Liejeve grupe G, naj bo $\lambda \in \mathbb{F}$ lastna vrednost endomorfizma $A \in \mathrm{End}_G(\mathsf{V})$ in naj bo $\mathsf{V}_\lambda = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})$ lastni podprostor endomorfizma A pri lastni vrednosti λ. Ker za vsak $x \in G$ in vsak $v \in \mathsf{V}_\lambda$ velja

$$(A - \lambda\,\mathrm{id})(xv) = A(xv) - \lambda xv = x(Av) - \lambda xv = x((A - \lambda\,\mathrm{id})v) = 0,$$

je lastni podprostor V_λ G-invarianten.

Definicija 3.10. Reprezentacija V Liejeve grupe G je *ireducibilna* ali *nerazcepna*, če je $\mathsf{V} \neq \{0\}$ in sta $\{0\}$ ter V edini podreprezentaciji G-reprezentacije V. Množico izomorfnostnih razredov $[\mathsf{V}]$ vseh ireducibilnih G-reprezentacij V nad obsegom $\mathbb{F}$ bomo označili z $\mathrm{Irr}(G, \mathbb{F})$.

Trditev 3.11 (Schurov lema). *Naj bosta V in W ireducibilni reprezentaciji Liejeve grupe G nad obsegom $\mathbb{F}$.*

(i) Vsak neničelen homomorfizem G-reprezentacij $\mathsf{W} \to \mathsf{V}$ je izomorfizem.

(ii) Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem je vsak endomorfizem G-reprezentacije V oblike $\lambda\,\mathrm{id}_{\mathsf{V}}$, za nek $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz. (i) Naj bo $A \in \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ neničelen. To pomeni, da $\ker(A) \neq \mathsf{W}$ in $\mathrm{im}(A) \neq \{0\}$. Zaradi ireducibilnosti reprezentacij V in W in iz zgleda 3.9 sledi, da je $\ker(A) = \{0\}$ in $\mathrm{im}(A) = \mathsf{V}$, torej je A izomorfizem.

(ii) Naj bo $A \in \mathrm{End}_G(\mathsf{V})$. Ker je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ima A vsaj eno lastno vrednost $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz zgleda 3.9 sledi, da je lastni podprostor $\mathsf{V}_\lambda = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})$ G-invarianten, zaradi ireducibilnosti reprezentacije V pa mora biti $\mathsf{V}_\lambda = \mathsf{V}$ in torej $A = \lambda\,\mathrm{id}$. □

Posledica 3.12. *Naj bosta V in W ireducibilni reprezentaciji Liejeve grupe G nad obsegom $\mathbb{F}$. Tedaj velja:*

(i) *Če reprezentaciji V in W nista ekvivalentni, potem je*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V}) = \{0\}.$$

(ii) *Če sta reprezentaciji V in W ekvivalentni in je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem je*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V}) = 1.$$

Dokaz. Direktna posledica trditve 3.11. □

KOMENTAR 3.13. Naj bo V reprezentacija Liejeve grupe G nad $\mathbb{C}$. Za poljubno ireducibilno G-reprezentacijo W nad $\mathbb{C}$ število $[\mathsf{V} : \mathsf{W}] = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$ imenujemo *kratnost* ireducibilne reprezentacije W v reprezentaciji V. Motivacija za to definicijo je naslednja: Če je reprezentacija V direktna vsota svojih ireducibilnih podreprezentacij $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$, torej $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{W}_k$, potem je kratnost

$$\begin{aligned}
[\mathsf{V} : \mathsf{W}] &= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \oplus_{i=1}^n \mathsf{W}_i) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \oplus_{i=1}^k \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{W}_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{W}_i) \\
&= \sum_{i=1}^k [\mathsf{W}_i : \mathsf{W}]
\end{aligned}$$

po posledici 3.11 enaka številu ireducibilnih reprezentacij v končnem zaporedju $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$, ki so ekvivalentne reprezentaciji W.

V splošnem ni nujno, da dekompozicija reprezentacije v direktno vsoto ireducibilnih podreprezentacij obstaja, če pa obstaja, ni nujno enolična. Vendarle pa zgornji argument pove, da je enolično določeno število členov W_i, ki nastopajo v takšni dekompoziciji in so ekvivalentni dani ireducibilni reprezentaciji W.

Reprezentacija V je W-*izotipična*, če je $[\mathsf{V} : \mathsf{U}] = 0$ za vsako ireducibilno G-reprezentacijo U, ki ni ekvivalentna ireducibilni G-reprezentaciji W. Če ima W-izotipična reprezentacija V dekompozicijo $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{W}_k$ v direktno vsoto svojih ireducibilnih podreprezentacij $\mathsf{W}_1, \ldots, \mathsf{W}_k$, potem je $\mathsf{W}_i \cong \mathsf{W}$ za vsak i.

POSLEDICA 3.14. *Če je V ireducibilna reprezentacija nad $\mathbb{C}$ abelove Liejeve grupe G, potem je* $\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V} = 1$.

DOKAZ. Naj bo G abelova Liejeva grupa in naj bo (ρ, V) ireducibilna G-reprezentacija nad $\mathbb{C}$. Za vsak $x \in G$ je $\rho_x \in \mathrm{End}_G(\mathsf{V})$, saj velja

$$\rho_x(yv) = x(yv) = (xy)v = (yx)v = y(xv) = y(\rho_x v)$$

za vse $y \in G$ in $v \in \mathsf{V}$. Po trditvi 3.11 je $\rho_x = \lambda_x \,\mathrm{id}$ za nek $\lambda_x \in \mathbb{C}$. Posebej to pomeni, da je vsak vektorski podprostor vektorskega prostora V G-invarianten, to pa je zaradi ireducibilnosti reprezentacije V mogoče le v primeru, da je prostor V enodimenzionalen. $\square$

3.3. Unitarne reprezentacije

V nadaljevanju bomo predpostavili, da so vse naše reprezentacije kompleksne, torej nad obsegom $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Naj bo G Liejeva grupa in V njena reprezentacija. Skalarni produkt $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ na V je *G-invarianten*, če velja

$$\langle xv, xw \rangle = \langle v, w \rangle$$

za vse $x \in G$ in $v, w \in \mathsf{V}$. *Unitarna G-reprezentacija* je G-reprezentacija (ρ, V), opremljena z G-invariantnim skalarnim produktom na V. Slika takšne unitarne reprezentacije $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ torej leži v unitarni grupi

$$\mathrm{U}(\mathsf{V}) = \{x \in \mathrm{GL}(\mathsf{V}) \mid \langle xv, xw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ za vse } v, w \in \mathsf{V}\},$$

ki je zaprta podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{GL}(\mathsf{V})$ in izomorfna Liejevi grupi $\mathrm{U}(m)$, kjer je $m = \dim \mathsf{V}$.

Trditev 3.15. *Naj bo* V *unitarna reprezentacija Liejeve grupe* G*. Za vsak* G*-invarianten podprostor* $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$ *je tudi njegov ortogonalni komplement* $\mathsf{W}^\perp \subset \mathsf{V}$ G*-invarianten.*

Dokaz. Naj bosta $x \in G$ in $u \in \mathsf{W}^\perp$. Za poljuben $w \in \mathsf{W}$ je $x^{-1}w \in \mathsf{W}$, zato velja

$$\langle xu, w\rangle = \langle xu, xx^{-1}w\rangle = \langle u, x^{-1}w\rangle = 0$$

in torej $xu \in \mathsf{W}^\perp$. □

Trditev 3.16. *Naj bo* V *unitarna reprezentacija Liejeve grupe* G*. Reprezentacija* V *je ireducibilna če, in samo če, je* $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(\mathsf{V}) = 1$*.*

Dokaz. Če je reprezentacija V ireducibilna, je $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(\mathsf{V}) = 1$ po trditvi 3.11(ii). Predpostavimo zdaj, da je (ρ, V) poljubna G-reprezentacija, za katero je $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(\mathsf{V}) = 1$. To pomeni, da $\mathsf{V} \neq \{0\}$ in da je $\mathrm{End}_G(\mathsf{V}) = \{\lambda\,\mathrm{id}_{\mathsf{V}} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. Naj bo W poljuben G-invarianten podprostor vektorskega prostora V in označimo s $P \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ ortogonalni projektor na W. To pomeni, da je $P|_{\mathsf{W}} = \mathrm{id}_{\mathsf{W}}$ in $P|_{\mathsf{W}^\perp} = 0$. Za vsak $x \in G$ velja

$$\rho_x P|_{\mathsf{W}} = \rho_x|_{\mathsf{W}} = P\rho_x|_{\mathsf{W}},$$

po trditvi 3.15 pa tudi

$$\rho_x P|_{\mathsf{W}^\perp} = 0 = P\rho_x|_{\mathsf{W}^\perp}.$$

Odtod sledi, da je $P \in \mathrm{End}_G(\mathsf{V})$, zato je $P = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathsf{V}}$ za nek $\lambda \in \mathbb{C}$. Če je $\lambda = 0$, je $\mathsf{W} = \{0\}$, sicer pa je $\mathsf{W} = \mathsf{V}$. Reprezentacija V je torej ireducibilna. □

Trditev 3.17. *Naj bo* V *unitarna reprezentacija Liejeve grupe* G*. Tedaj obstajajo takšne ireducibilne podreprezentacije* $\mathsf{W}_1, \dots, \mathsf{W}_k$ *reprezentacije* V*, da je*

$$\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{W}_k.$$

Dokaz. Trditev dokažemo z indukcijo na dimenzijo vektorskega prostora V. Če je $\mathsf{V} = \{0\}$, je $k = 0$. Če je $\mathsf{V} \neq \{0\}$, izberemo neničelno podreprezentacijo $\mathsf{W}_1 \subset \mathsf{V}$ najnižje dimenzije, ki je zato ireducibilna. Po trditvi 3.15 lahko reprezentacijo V zapišemo kot direktno vsoto podreprezentacij $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_1^\perp$. Po indukcijski hipotezi je reprezentacija $\mathsf{W}_1^\perp$ direktna vsota ireducibilnih podreprezentacij $\mathsf{W}_1^\perp = \mathsf{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathsf{W}_k$. □

Vaja 3.18. Naj bo V unitarna reprezentacija Liejeve grupe G. Za vsako ireducibilno G-reprezentacijo W definiramo

$$\mathsf{V}(\mathsf{W}) = \sum\{\mathsf{U} \mid \mathsf{U} \text{ podreprezentacija } \mathsf{V},\ \mathsf{U} \cong \mathsf{W}\} \subset \mathsf{V}.$$

Tedaj je $\mathsf{V}(\mathsf{W})$ podreprezentacija G-reprezentacije V, reprezentacijo V pa lahko zapišemo kot ortogonalno direktno vsoto

$$\mathsf{V} = \bigoplus_{[\mathsf{W}] \in \mathrm{Irr}(G,\mathbb{C})} \mathsf{V}(\mathsf{W}).$$

Podreprezentacija $\mathsf{V}(\mathsf{W})$ je W-izotipična in jo imenujemo W-*izotipični sumand* reprezentacije V. Ekvivalentna je direktni vsoti $[\mathsf{V}(\mathsf{W}) : \mathsf{W}]$ kopij reprezentacije W, zato včasih zapišemo $\mathsf{V}(\mathsf{W}) \cong [\mathsf{V}(\mathsf{W}) : \mathsf{W}]\mathsf{W}$. Ker velja $[\mathsf{V}(\mathsf{W}) : \mathsf{W}] = [\mathsf{V} : \mathsf{W}]$, imamo tudi izomorfizem G-reprezentacij

$$\mathsf{V} \cong \bigoplus_{[\mathsf{W}] \in \mathrm{Irr}(G,\mathbb{C})} [\mathsf{V} : \mathsf{W}]\mathsf{W}.$$

ZGLED 3.19. Naj bo $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ reprezentacija Liejeve grupe $\mathbb{R}$, dana s predpisom

$$\rho_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Ker je Liejeva grupa $\mathbb{R}$ abelova, so vse njene ireducibilne reprezentacije enodimenzionalne, zato ρ ni ireducibilna. Edina enodimenzionalna podreprezentacija reprezentacije ρ je dana z $\mathbb{R}$-invariantnim podprostorom $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$. Odtod sledi, da reprezentacije ρ ne moremo zapisati kot direktno vsoto ireducibilnih podreprezentacij. Posebej to pomeni, da ni invariantnih skalarnih produktov na $\mathbb{C}^2$ glede na reprezentacijo ρ.

3.4. Reprezentacije kompaktnih Liejevih grup

3.4.1. Haarov integral. Naj bo G kompaktna Liejeva grupa. Množica $C^0(G)$ vseh zveznih realnih funkcij na G je realen vektorski prostor in komutativna asociativna algebra, na njej pa imamo tudi normo, dano s predpisom

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in G\}$$

za vsako funkcijo $f \in C^0(G)$. Ta norma nam da metriko d na $C^0(G)$, $d(f, h) = \|f - h\|$, glede na katero je $C^0(G)$ poln metrični prostor.

Haarov integral na kompaktni Liejevi grupi G je linearna preslikava $\mathscr{H} = \mathscr{H}_G : C^0(G) \to \mathbb{R}$, za katero velja:

(i) $\mathscr{H}(1) = 1$ *(normiranost)*,
(ii) če sta $f, h \in C^0(G)$ in je $f(x) \le h(x)$ za vsak $x \in G$, potem je $\mathscr{H}(f) \le \mathscr{H}(h)$ *(monotonost)*, in
(iii) $\mathscr{H}(f \circ \mathrm{L}_y) = \mathscr{H}(f)$ za vsak $y \in G$ in za vse $f \in C^0(G)$ *(leva invariantnost)*.

Haarov integral obstaja na vsaki kompaktni Liejevi grupi G in je z zgoraj navedenimi lastnostmi enolično določen (dokaz lahko študent najde na primer v knjigi [**1**]). Haarov integral običajno zapišemo v obliki

$$\mathscr{H}(f) = \int_G f(x)dx.$$

Iz naštetih osnovnih lastnosti Haarovega integrala sledi:

TRDITEV 3.20. *Naj bo G kompaktna Liejeva grupa in $f \in C^0(G)$. Tedaj velja:*
(i) *$\mathscr{H}(f \circ \mathrm{R}_z) = \mathscr{H}(f)$ za vsak $z \in G$* (desna invariantnost)*,*
(ii) *$\mathscr{H}(f \circ \phi) = \mathscr{H}(f)$ za vsak avtomorfizem ϕ Liejeve grupe G,*
(iii) *$\mathscr{H}(f \circ \iota) = \mathscr{H}(f)$,*
(iv) *$|\mathscr{H}(f)| \le \mathscr{H}(|f|)$,*
(v) *$\mathscr{H} : C^0(G) \to \mathbb{R}$ je zvezna preslikava, in*
(vi) *če je $\mathscr{H}(f) = 0$ in $f(x) \ge 0$ za vsak $x \in G$, potem je $f = 0$.*

DOKAZ. (i) Definiramo preslikavo $A_z : C^0(G) \to \mathbb{R}$, $A_z(f) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{R}_z)$. Iz linearnosti, normiranosti in monotonosti Haarovega integrala direktno sledi, da je tudi preslikava A_z linearna, normirana in monotona. Za poljuben $y \in G$ velja tudi

$$A_z(f \circ \mathrm{L}_y) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{L}_y \circ \mathrm{R}_z) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{R}_z \circ \mathrm{L}_y) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{R}_z) = A_z(f),$$

torej je preslikava A_z tudi levo invariantna. Iz enoličnosti Haarovega integrala zato sledi $A_z = \mathscr{H}$.

(ii) Definiramo preslikavo $A_\phi : C^0(G) \to \mathbb{R}$, $A_\phi(f) = \mathscr{H}(f \circ \phi)$, ki je linearna, normirana in monotona. Poleg tega je tudi levo invariantna, saj za poljuben $y \in G$ velja

$$A_\phi(f \circ \mathrm{L}_y) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{L}_y \circ \phi) = \mathscr{H}(f \circ \phi \circ \mathrm{L}_{\phi(y)^{-1}}) = \mathscr{H}(f \circ \phi) = A_\phi(f),$$

zaradi enoličnosti Haarovega integrala pa je torej $A_\phi = \mathscr{H}$.

(iii) Definiramo preslikavo $A_\iota : C^0(G) \to \mathbb{R}$, $A_\iota(f) = \mathscr{H}(f \circ \iota)$, ki je spet linearna, normirana in monotona, pa tudi levo invariantna, saj za vsak $y \in G$ velja

$$A_\iota(f \circ \mathrm{L}_y) = \mathscr{H}(f \circ \mathrm{L}_y \circ \iota) = \mathscr{H}(f \circ \iota \circ \mathrm{R}_{y^{-1}}) = \mathscr{H}(f \circ \iota) = A_\iota(f),$$

zaradi enoličnosti Haarovega integrala pa je torej $A_\iota = \mathscr{H}$.

(iv) Funkcijo $f \in C^0(G)$ zapišemo v obliki $f = f^+ - f^-$, kjer sta $f^+, f^- \in C^0(G)$ dani z $f^+ = (|f|+f)/2$ in $f^- = (|f|-f)/2$. Tako sta f^+ in f^- nenegativni v vseh točkah $x \in G$ in velja $|f| = f^+ + f^-$. Iz monotonosti in linearnosti Haarovega integrala sledi

$$|\mathscr{H}(f)| = |\mathscr{H}(f^+) - \mathscr{H}(f^-)| \leq \mathscr{H}(f^+) + \mathscr{H}(f^-) = \mathscr{H}(|f|).$$

(v) Zveznost sledi direktno iz linearnosti in iz točke (iv).

(vi) Naj bo $f \in C^0(G)$ nenegativna v vseh točkah iz G in predpostavimo, da je $f(z) > 0$ za nek $z \in G$. Zaradi kompaktnosti Liejeve grupe G lahko najdemo končno mnogo točk $y_1, \ldots, y_k \in G$, tako da je $\sum_{i=1}^k f(\mathrm{L}_{y_i}(x)) > 0$ za vsak $x \in G$, in ker je pozitivna funkcija $\sum_{i=1}^k f \circ \mathrm{L}_{y_i}$ zvezna, lahko izberemo tak $\varepsilon > 0$, da je $\sum_{i=1}^k f(\mathrm{L}_{y_i}(x)) > \varepsilon$ za vsak $x \in G$. Odtod pa sledi

$$k\mathscr{H}(f) = \sum_{i=1}^k \mathscr{H}(f) = \sum_{i=1}^k \mathscr{H}(f \circ \mathrm{L}_{y_i}) = \mathscr{H}(\sum_{i=1}^k f \circ \mathrm{L}_{y_i}) \geq \mathscr{H}(\varepsilon) = \varepsilon,$$

zato je torej $\mathscr{H}(f) > 0$. □

Haarov integral lahko razširimo na algebro vseh kompleksnih zveznih funkcij $C^0(G, \mathbb{C})$ na G: Poljubno funkcijo $f \in C^0(G, \mathbb{C})$ zapišemo kot vsoto $f = a + \mathrm{i}b$, kjer sta $a, b \in C^0(G)$, in definiramo $\mathscr{H}(f) = \mathscr{H}(a) + i\mathscr{H}(b)$. Tako dobimo kompleksno linearno preslikavo $\mathscr{H} : C^0(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, ki je spet levo in desno invariantna in za katero veljajo tudi lastnosti (ii), (iii) in (iv) iz trditve 3.20. (Točko (iv) posplošimo na kompleksne funkcije na naslednji način: Predpostavimo, da je $\alpha = \mathscr{H}(f) \neq 0$, in vzemimo $\beta = \bar{\alpha}/|\alpha|$. Tako je $|\beta| = 1$ in $\beta\alpha = |\alpha|$. Zapišimo $\beta f = g + ih$, kjer sta $g, h \in C^0(G)$. Sledi

$$|\mathscr{H}(f)| = |\alpha| = \beta\alpha = \beta\mathscr{H}(f) = \mathscr{H}(\beta f) = \mathscr{H}(g) \leq \mathscr{H}(|\beta f|) = \mathscr{H}(|f|),$$

saj je $\mathscr{H}(\beta f)$ realno število in je zato $\mathscr{H}(h) = 0$.) Tudi vektorski prostor $C^0(G, \mathbb{C})$ je normiran z normo $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in G\}$, je poln metrični prostor za pridruženo metriko, razširjena preslikava $\mathscr{H} : C^0(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ pa je zvezna.

Splošneje, če je V poljuben končno dimenzionalen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, lahko preslikavo $\mathscr{H}$ razširimo na vektorski prostor $C^0(G, \mathsf{V})$ vseh zveznih preslikav iz G v V. Izberemo namreč bazo $\mathcal{B} = [v_1, \ldots, v_m]$ vektorskega prostora V, poljubno funkcijo $f \in C^0(G, \mathsf{V})$ razvijemo po tej bazi kot $f = f_1 v_1 + \cdots + f_m v_m$, kjer so $f_1, \ldots, f_m \in C^0(G, \mathbb{F})$, in definiramo $\mathscr{H}(f) = \mathscr{H}(f_1)v_1 + \cdots + \mathscr{H}(f_m)v_m \in \mathsf{V}$. Dobljena linearna preslikava $\mathscr{H} : C^0(G, \mathsf{V}) \to \mathsf{V}$ je neodvisna od izbire baze $\mathcal{B}$, je levo in desno invariantna, zanjo pa veljajo tudi lastnosti (ii) in (iii) iz trditve 3.20. Iz linearnosti Haarovega integrala direktno sledi, da za vsako linearno preslikavo

$A : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ med vektorskimi prostori in za vsako zvezno funkcijo $f \in C^0(G, \mathsf{W})$ velja $\mathscr{H}(A \circ f) = A\mathscr{H}(f)$.

Zgled 3.21. (1) Naj bo G končna grupa in V končno dimenzionalni vektorski prostor. Tedaj je

$$\mathscr{H}(f) = \int_G f(x)dx = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)$$

za poljubno funkcijo $f \in C^0(G, \mathsf{V})$.

(2) Na Liejevi grupi S^1 je Haarov integral dan s predpisom

$$\mathscr{H}(f) = \int_{S^1} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})dt,$$

za poljubno zvezno funkcijo f na S^1 z vrednostmi v končno dimenzionalnem vektorskem prostoru V.

(3) Naj bosta G, H kompaktni Liejevi grupi. Za poljubno zvezno funkcijo $f \in C^0(G \times H)$ je funkcija $H \to \mathbb{R}$,

$$y \mapsto \int_G f(x, y)dx,$$

zvezna, zato lahko izračunamo $A(f) = \int_H \int_G f(x, y)dxdy$. Direktno lahko preverimo, da je preslikava $A : C^0(G \times H) \to \mathbb{R}$ linearna, normirana, monotona in levo invariantna, zato velja $A = \mathscr{H}_{G\times H}$ oziroma

$$\int_{G\times H} f(x, y)d(x, y) = \int_H \int_G f(x, y)dxdy$$

za vsako zvezno funkcijo $f \in C^0(G \times H)$.

Trditev 3.22. *Naj bo V reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G. Tedaj obstaja G-invarianten skalarni produkt na V.*

Dokaz. Izberimo poljuben skalarni produkt $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ na V in definirajmo

$$\langle v, w\rangle_G = \int_G \langle xv, xw\rangle dx.$$

Ni se težko prepričati, da je $\langle \text{-}, \text{-} \rangle_G$ spet skalarni produkt na V, ki je tudi G-invarianten, saj velja

$$\langle yv, yw\rangle_G = \int_G \langle xyv, xyw\rangle dx = \int_G \langle xv, xw\rangle dx = \langle v, w\rangle_G$$

zaradi desne invariantnosti Haarovega integrala. □

Zgled 3.23. (1) Naj bo G kompaktna Liejeva grupa. Ker za poljubno reprezentacijo V lahko izberemo G-invarianten skalarni produkt na V, je glede na ta skalarni produkt reprezentacija V unitarna. Reprezentacijo V lahko zapišemo tudi kot ortogonalno direktno vsoto ireducibilnih (unitarnih) podreprezentacij.

Z izbiro ortonormirane baze vektorskega prostora V dobimo izomorfizem med reprezentacijo V in matrično unitarno reprezentacijo $R : G \to \mathrm{U}(m)$. Vsaka reprezentacija kompaktne Liejeve grupe je torej ekvivalentna neki unitarni matrični reprezentaciji. Če ortonormirano bazo na V primerno izberemo, je R direktna vsota ireducibilnih unitarnih matričnih reprezentacij $R_1, \ldots, R_k$ oziroma

$$R = (R_1, \ldots, R_k) : G \to \mathrm{U}(m_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(m_k) \subset \mathrm{U}(m),$$

kjer je $m_1+\dots+m_k = m$. Pri tem smo identificirali element produkta $(x_1,\dots,x_k) \in \mathrm{U}(m_1)\times\dots\times\mathrm{U}(m_k)$ z bločno matriko $\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_k) \in \mathrm{U}(m)$ glede na razcep $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{m_1}\oplus\dots\oplus\mathbb{C}^{m_k}$.

Če je kompaktna Liejeva grupa G abelova, so vse njene ireducibilne reprezentacije enodimenzionalne. Vsaka reprezentacija Liejeve grupe G je zato ekvivalentna unitarni matrični reprezentaciji $G \to \mathrm{U}(1)\times\dots\times\mathrm{U}(1)$.

(2) Ireducibilne unitarne matrične reprezentacije Liejeve grupe $S^1 = \mathrm{U}(1)$ so natanko endomorfizmi Liejeve grupe $\mathrm{U}(1)$, ti pa so oblike $z \mapsto z^\alpha$, kjer je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Vsaka reprezentacija Liejeve grupe S^1 je torej ekvivalentna matrični reprezentaciji $R : S^1 \to \mathrm{U}(1)\times\dots\times\mathrm{U}(1)$ oblike

$$R(z) = (z^{\alpha_1},\dots,z^{\alpha_m})$$

za $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{Z}$.

(3) Ireducibilne unitarne matrične reprezentacije Liejeve grupe $T^n = \mathrm{U}(1)^n$ so natanko homomorfizmi Liejevih grup $\mathrm{U}(1)^n \to \mathrm{U}(1)$, takšni homomorfizmi pa so oblike $(z_1, z_2 \dots, z_n) \mapsto (z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}\cdots z_n^{\beta_n})$, kjer so $\beta_1,\beta_2\dots,\beta_n \in \mathbb{Z}$. Poljubna reprezentacija Liejeve grupe T^n je torej ekvivalentna neki matrični reprezentaciji $R : T^n \to \mathrm{U}(1)\times\dots\times\mathrm{U}(1)$ oblike

$$R(z_1,z_2,\dots,z_n) = (z_1^{\beta_{11}} z_2^{\beta_{12}}\cdots z_n^{\beta_{1n}},\dots,z_1^{\beta_{m1}} z_2^{\beta_{m2}}\cdots z_n^{\beta_{mn}})$$

za $\beta_{11},\dots,\beta_{mn} \in \mathbb{Z}$.

3.4.2. Ortogonalnostne relacije. Naj bo G kompaktna Liejeva grupa. Za poljubno (kompleksno) reprezentacijo V definiramo *podprostor negibnih točk*

$$\mathsf{V}^G = \{v \in \mathsf{V} \mid xv = v \text{ za vse } x \in G\}$$

reprezentacije V, ki je največja podreprezentacija reprezentacije V, na kateri G deluje trivialno. Definirajmo linearno preslikavo $P_{\mathsf{V}} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ s predpisom

$$P_{\mathsf{V}}(v) = \int_G xv dx.$$

Komentar 3.24. Za poljubno reprezentacijo (ρ,V) kompaktne Liejeve grupe G velja tudi

$$P_{\mathsf{V}} = \int_G \rho_x dx \in \mathrm{End}(\mathsf{V}),$$

saj zaradi linearnosti Haarovega integrala velja $P_{\mathsf{V}}(v) = \int_G \rho_x(v)dx = \big(\int_G \rho_x dx\big)v$ za vsak $v \in \mathsf{V}$.

Trditev 3.25. *Naj bo* V *reprezentacija kompaktne Liejeve grupe* G*. Tedaj je* $P_{\mathsf{V}}(\mathsf{V}) = \mathsf{V}^G$ *in* $P_{\mathsf{V}}^2 = P_{\mathsf{V}}$*. Linearna preslikava* $P_{\mathsf{V}} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *je torej projektor na podprostor negibnih točk.*

Dokaz. Zaradi linearnosti in leve invariantnosti Haarovega integrala je

$$y(P_{\mathsf{V}}(v)) = y\int_G xv dx = \int_G yxv dx = \int_G xv dx = P_{\mathsf{V}}(v)$$

za vsak $v \in \mathsf{V}$ in vsak $y \in G$, zato je $P_{\mathsf{V}}(v) \in \mathsf{V}^G$. Če je $v \in \mathsf{V}^G$, potem velja $P_{\mathsf{V}}(v) = \int_G xv dx = \int_G v dx = v$. $\square$

Zgled 3.26. Naj bosta U in V reprezentaciji Liejeve grupe G. Spomnimo se, da je tedaj tudi $\mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{U})$ reprezentacija Liejeve grupe G za delovanje $(xA)v = x(A(x^{-1}v))$, za $x \in G$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{U})$ in $v \in \mathsf{V}$. To pomeni, da velja

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{U})^G = \mathrm{Hom}_G(\mathsf{V},\mathsf{U}),$$

projektor $P_{\mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{U})}$ na podprostor $\mathrm{Hom}_G(\mathsf{V},\mathsf{U})$ pa je dan s predpisom

$$P_{\mathrm{Hom}(\mathsf{V},\mathsf{U})}(A) = \int_G xA dx.$$

Trditev 3.27. *Naj bo V ireducibilna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G. Tedaj za vsako linearno preslikavo $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ velja*

$$\int_G xA dx = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}} \, \mathrm{id}_{\mathsf{V}} \, .$$

Dokaz. Po trditvi 3.25 je $\int_G xA dx \in \mathrm{End}_G(\mathsf{V})$. Ker je reprezentacija V ireducibilna, je po trditvi 3.11 $\int_G xA dx = \lambda \, \mathrm{id}_{\mathsf{V}}$ za nek $\lambda \in \mathbb{C}$. Ob tem velja

$$\lambda \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V} = \mathrm{tr}(\lambda \, \mathrm{id}_{\mathsf{V}}) = \mathrm{tr}\Big(\int_G xA dx\Big) = \int_G \mathrm{tr}(xA) dx = \int_G \mathrm{tr}(A) dx = \mathrm{tr}(A). \quad \square$$

Posledica 3.28. *Naj bo V ireducibilna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G. Tedaj velja*

$$\int_G f(x(A(x^{-1}v)))dx = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}} f(v).$$

za vse $f \in \mathsf{V}^*$, $v \in \mathsf{V}$ in $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$.

Dokaz. Na enakosti iz trditve 3.27 uporabimo linearno preslikavo $\mathrm{End}(\mathsf{V}) \to \mathbb{C}$, $B \mapsto f(Bv)$, in upoštevamo linearnost Haarovega integrala. $\square$

Izrek 3.29. *Naj bo V ireducibilna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G in naj bo $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ poljuben skalarni produkt na vektorskem prostoru V.*

(i) Za vse $A \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ in $v, w \in \mathsf{V}$ je

$$\int_G \langle x(A(x^{-1}v)), w \rangle dx = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}} \langle v, w \rangle.$$

(ii) Za vse $v, w, a, b \in \mathsf{V}$ velja

$$\int_G \langle x^{-1}v, a \rangle \langle xb, w \rangle dx = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}} \langle b, a \rangle \langle v, w \rangle.$$

Dokaz. Točka (i) sledi iz posledice 3.28, pri čemer vzamemo $f = \langle \text{-}, w \rangle$. Točka (ii) sledi iz točke (i), kjer za A vzamemo endomorfizem $u \mapsto \langle u, a \rangle b$. $\square$

Komentar 3.30. Če je skalarni produkt $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ na V G-invarianten, potem točko (ii) lahko zapišemo v obliki

$$\int_G \overline{\langle xa, v \rangle} \langle xb, w \rangle dx = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}} \overline{\langle a, b \rangle} \langle v, w \rangle.$$

Izrek 3.31. *Naj bosta V in W neekvivalentni ireducibilni unitarni reprezentaciji kompaktne Liejeve grupe G. Tedaj za vse $v, a \in \mathsf{V}$ in $w, b \in \mathsf{W}$ velja*

$$\int_G \overline{\langle xa, v \rangle} \langle xb, w \rangle dx = 0.$$

Dokaz. Označimo z $\beta : \mathsf{V} \times \bar{\mathsf{W}} \to \mathbb{C}$ bilinearno preslikavo

$$\beta(v, w) = \int_G \overline{\langle xa, v\rangle}\langle xb, w\rangle dx.$$

Iz G-invariantnosti skalarnih produktov na V in W ter iz leve invariantnosti Haarovega integrala sledi, da je $\beta(yv, yw) = \beta(v, w)$ za vsak $y \in G$ in vse $v \in \mathsf{V}$ ter $w \in \mathsf{W}$. Bilinearna preslikava β nam da linearno preslikavo $\theta : \mathsf{V} \to \mathrm{Hom}(\bar{\mathsf{W}}, \mathbb{C})$, $v \mapsto \beta(v, \text{-})$, ki je G-ekvivariantna. A ker je $\mathrm{Hom}(\bar{\mathsf{W}}, \mathbb{C}) = \bar{\mathsf{W}}^* \cong W$ in ker sta reprezentaciji V in W neekvivalentni in ireducibilni, po trditvi 3.11 sledi $\theta = 0$ in zato tudi $\beta = 0$. □

Komentar 3.32. Naj bo V reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G. Gladki funkciji $G \to \mathbb{C}$ oblike $x \mapsto f(xv)$, za neka izbrana $f \in \mathsf{V}^*$ in $v \in \mathsf{V}$, pravimo *reprezentativna funkcija* reprezentacije V. Če izberemo poljuben skalarni produkt $\langle \text{-}, \text{-}\rangle$ na V, lahko reprezentativne funkcije zapišemo v obliki $x \mapsto \langle xv, w\rangle$, za $v, w \in \mathsf{V}$. Komponente matrične reprezentacije $R : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ so primeri reprezentativnih funkcij reprezentacije R, saj velja $R_{ij}(x) = \langle xe_j, e_i\rangle$ glede na standardni skalarni produkt in standardno bazo prostora $\mathbb{C}^n$.

Če je reprezentacija $R : G \to \mathrm{U}(n)$ unitarna in ireducibilna, nam izrek 3.29 pove, da velja:

$$\int_G R_{ij}(x)\overline{R_{pq}(x)}dx = \begin{cases} 1/n & ; \quad i = p,\ j = q \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Če je $T : G \to \mathrm{U}(m)$ še ena ireducibilna unitarna matrična G-reprezentacija s komponentami T_{kl}, ki ni ekvivalentna reprezentaciji R, potem iz izreka 3.31 sledi

$$\int_G R_{ij}(x)\overline{T_{kl}(x)}dx = 0$$

za vse $i, j = 1, \dots, n$ in $k, l = 1, \dots, m$.

Na vektorskem prostoru $C^0(G, \mathbb{C})$ definiramo skalarni produkt s predpisom

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx$$

za vse $f, g \in C^0(G, \mathbb{C})$. Zgornji dve enakosti lahko razumemo kot ortogonalnost reprezentativnih funkcij glede na ta skalarni produkt, torej

$$\langle R_{ij}, R_{pq}\rangle = \begin{cases} 1/n & ; \quad i = p,\ j = q \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$\langle R_{ij}, T_{kl}\rangle = 0.$$

3.4.3. Karakterji. Naj bo G poljubna Liejeva grupa. *Karakter* (kompleksne) reprezentacije (ρ, V) Liejeve grupe G je funkcija $\chi_{\mathsf{V}} : G \to \mathbb{C}$, dana s predpisom

$$\chi_{\mathsf{V}}(x) = \mathrm{tr}(\rho_x)$$

za vsak $x \in G$. Očitno je $\chi_{\mathsf{V}} \in C^\infty(G, \mathbb{C})$.

Trditev 3.33. *Naj bo V reprezentacija Liejeve grupe G. Tedaj velja $\chi_{\mathsf{V}}(e) = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}$ in $\chi_{\mathsf{V}}(yxy^{-1}) = \chi_{\mathsf{V}}(x)$ za vse $x, y \in G$.*

Dokaz. Naj bo V dana s homomorfizmom $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathsf{V})$. Po vaji 3.6(1i) sledi $\chi_{\mathsf{V}}(yxy^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_{yxy^{-1}}) = \mathrm{tr}(\rho_y\rho_x\rho_y^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_x) = \chi_{\mathsf{V}}(x)$. □

TRDITEV 3.34. *Če sta* V *in* W *ekvivalentni reprezentaciji Liejeve grupe* G*, potem je* $\chi_{\mathsf{V}} = \chi_{\mathsf{W}}$.

DOKAZ. Če sta reprezentaciji $\mathsf{V} = (\rho, \mathsf{V})$ in $\mathsf{W} = (\tau, \mathsf{W})$ ekvivalentni, lahko izberemo izomorfizem G-reprezentacij $A : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$. To pomeni, da je $A\tau_x = \rho_x A$ za vsak $x \in G$. Po vaji 3.6(1i) sledi $\chi_{\mathsf{V}}(x) = \mathrm{tr}(\rho_x) = \mathrm{tr}(A\tau_x A^{-1}) = \mathrm{tr}(\tau_x) = \chi_{\mathsf{W}}(x)$. $\square$

VAJA 3.35. Naj bosta V in W reprezentaciji Liejeve grupe G. Tedaj je

(i) $\chi_{\mathsf{V}\oplus\mathsf{W}}(x) = \chi_{\mathsf{V}}(x) + \chi_{\mathsf{W}}(x)$,
(ii) $\chi_{\mathsf{V}\otimes\mathsf{W}}(x) = \chi_{\mathsf{V}}(x)\chi_{\mathsf{W}}(x)$,
(iii) $\chi_{\mathsf{V}^*}(x) = \chi_{\mathsf{V}}(x^{-1})$ in
(iv) $\chi_{\bar{\mathsf{V}}}(x) = \overline{\chi_{\mathsf{V}}(x)}$

za vsak $x \in G$.

IZREK 3.36. *Za poljubni reprezentaciji* V *in* W *kompaktne Liejeve grupe* G *velja*

$$\int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)dx = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}^G$$

in

$$\int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)\overline{\chi_{\mathsf{W}}(x)}dx = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V}).$$

DOKAZ. Spomnimo se, da imamo projektor $P_{\mathsf{V}} \in \mathrm{End}(\mathsf{V})$ na podreprezentacijo V^G negibnih točk reprezentacije $\mathsf{V} = (\rho, \mathsf{V})$. Zaradi linearnosti Haarovega integrala velja

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}^G = \mathrm{tr}(P_{\mathsf{V}}) = \mathrm{tr}(\int_G \rho_x dx) = \int_G \mathrm{tr}(\rho_x)dx = \int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)dx.$$

S tem smo dokazali prvo enakost. Če to enakost uporabimo na primeru reprezentacije $\mathrm{Hom}(\mathsf{W}, \mathsf{V})$, dobimo torej

$$\int_G \chi_{\mathrm{Hom}(\mathsf{W},\mathsf{V})}(x)dx = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\mathsf{W}, \mathsf{V})^G.$$

Odtod pa sledi druga enakost iz trditve, saj je $\mathrm{Hom}(\mathsf{W}, \mathsf{V})^G = \mathrm{Hom}_G(\mathsf{W}, \mathsf{V})$, poleg tega pa je $\mathrm{Hom}(\mathsf{W}, \mathsf{V}) \cong \mathsf{W}^* \otimes \mathsf{V}$ in zato

$$\chi_{\mathrm{Hom}(\mathsf{W},\mathsf{V})}(x) = \chi_{\mathsf{W}^*\otimes\mathsf{V}}(x) = \chi_{\mathsf{W}^*}(x)\chi_{\mathsf{V}}(x) = \overline{\chi_{\mathsf{W}}(x)}\chi_{\mathsf{V}}(x)$$

za vsak $x \in G$. $\square$

POSLEDICA 3.37. *Naj bosta* V *in* W *reprezentaciji kompaktne Liejeve grupe* G.
(i) Če je reprezentacija W *ireducibilna, potem je*

$$\langle \chi_{\mathsf{V}}, \chi_{\mathsf{W}} \rangle = \int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)\overline{\chi_{\mathsf{W}}(x)}dx = [\mathsf{V} : \mathsf{W}].$$

(ii) Reprezentacija V *je ireducibilna če, in samo če, velja*

$$\langle \chi_{\mathsf{V}}, \chi_{\mathsf{V}} \rangle = \int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)\overline{\chi_{\mathsf{V}}(x)}dx = 1.$$

(iii) Če sta reprezentaciji V *in* W *obe ireducibilni, potem velja:*

$$\langle \chi_{\mathsf{V}}, \chi_{\mathsf{W}} \rangle = \int_G \chi_{\mathsf{V}}(x)\overline{\chi_{\mathsf{W}}(x)}dx = \begin{cases} 1 & ; \quad \mathsf{V} \cong \mathsf{W} \\ 0 & ; \quad \mathsf{V} \ncong \mathsf{W} \end{cases}$$

Komentar 3.38. Karakterji ireducibilnih reprezentacij Liejeve grupe G torej tvorijo ortonormiran sistem v prostoru $C^0(G, \mathbb{C})$ s skalarnim produktom $\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx$.

Dokaz. Direktna posledica izreka 3.36, posledice 3.12 in trditve 3.16. □

Izrek 3.39. *Reprezentaciji* V *in* W *kompaktne Liejeve grupe* G *sta ekvivalentni če, in samo če, velja* $\chi_{\mathsf{V}} = \chi_{\mathsf{W}}$.

Dokaz. Če sta reprezentaciji V in W ekvivalentni, potem je $\chi_{\mathsf{V}} = \chi_{\mathsf{W}}$ po trditvi 3.34. Da bi dokazali še obratno, predpostavimo, da je $\chi_{\mathsf{V}} = \chi_{\mathsf{W}}$. Po trditvi 3.22, trditvi 3.17 in vaji 3.18 lahko reprezentaciji V in W zapišemo kot (končni) direktni vsoti

$$\mathsf{V} \cong \bigoplus_{[\mathsf{U}]\in \mathrm{Irr}(G,\mathbb{C})} [\mathsf{V} : \mathsf{U}]\mathsf{U}, \qquad \mathsf{W} \cong \bigoplus_{[\mathsf{U}]\in \mathrm{Irr}(G,\mathbb{C})} [\mathsf{W} : \mathsf{U}]\mathsf{U}.$$

Ker je $\chi_{\mathsf{V}} = \chi_{\mathsf{W}}$, po posledici 3.37 velja

$$[\mathsf{V} : \mathsf{U}] = \langle \chi_{\mathsf{V}}, \chi_{\mathsf{U}}\rangle = \langle \chi_{\mathsf{W}}, \chi_{\mathsf{U}}\rangle = [\mathsf{W} : \mathsf{U}]$$

za vsak $[\mathsf{U}] \in \mathrm{Irr}(G, \mathbb{C})$, odtod pa sledi $\mathsf{V} \cong \mathsf{W}$. □

Zgled 3.40. Vsaka reprezentacija Liejeve grupe S^1 je ekvivalentna matrični reprezentaciji $R_\alpha : S^1 \to \mathrm{U}(1) \times \ldots \times \mathrm{U}(1)$ oblike

$$R_\alpha(z) = (z^{\alpha_1}, \ldots , z^{\alpha_m})$$

za $\alpha = (\alpha_1, \ldots , \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$. Pripadajoči karakter je torej dan s predpisom

$$\chi_\alpha(z) = z^{\alpha_1} + \cdots + z^{\alpha_m}.$$

Za nek $\beta \in \mathbb{Z}^n$ je reprezentacija R_β ekvivalentna reprezentaciji R_α, če, in samo če, sta karakterja χ_α, χ_β enaka, torej tedaj, ko je $n = m$ in imata α, β do vrstnega reda natančno enake komponente. Reprezentacija R_α je ireducibilna, če je $m = 1$, kar pomeni, da so karakterji ireducibilnih reprezentacij Liejeve grupe S^1 natančno homomorfizmi Liejevih grup $\chi_k : S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}^\times$,

$$\chi_k(z) = z^k,$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Iz izreka 3.36 sledi $\langle \chi_k, \chi_l\rangle = \delta_{kl}$, kjer je $\delta_{kl} = 0$ za $k \neq l$ in $\delta_{kk} = 1$. Z eksplicitno formulo za Haarov integral iz zgleda 3.21 to pomeni

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lt}dt = \delta_{kl},$$

to pa je enakost, ki jo spoznamo pri študiju Fourierove vrste periodične funkcije ene spremenljivke. Poljubno zvezno periodično funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periodo 2π lahko gledamo kot zvezno funkcijo $f_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C}$, $f(t) = f_{S^1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, za Fourierove koeficiente $\hat{f}(k)$ funkcije f pa velja

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}dt = \int_{S^1} f_{S^1}(z)\overline{\chi_k(z)}dz = \langle f_{S^1}, \chi_k\rangle.$$

Fourierova vrsta funkcije f je torej ravno razvoj funkcije f_{S^1} po ortonormiranem sistemu karakterjev ireducibilnih reprezentacij na Liejevi grupi S^1,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f_{S^1}, \chi_k\rangle \chi_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

3.4.4. Reprezentacije Liejeve grupe SU(2)**.** Naj bo V_n vektorski prostor vseh kompleksnih homogenih polinomov stopnje n v dveh spremenljivkah z_1, z_2, za vsak $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Drugače povedano, V_n je $(n+1)$-dimenzionalen kompleksen vektorski prostor z bazo $[p_0, p_1, \ldots, p_n]$, kjer je p_k homogen polinom

$$p_k = z_1^k z_2^{n-k},$$

za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$. Poljuben polinom $p \in \mathsf{V}_n$ je torej oblike

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Tak homogen polinom p lahko gledamo kot preslikavo $p : \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, ki poljubni vrstici $z = [z_1, z_2] \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C})$ priredi kompleksno število $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}$. Liejeva grupa SU(2) deluje z desne na prostoru $\mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C})$ z množenjem matrik: za vsak $z \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C})$ in $q \in \mathrm{SU}(2)$ je $zq \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C})$. Za $z = [z_1, z_2]$ in

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$

je torej

$$zq = [\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2, \beta z_1 + \bar{\alpha} z_2].$$

Odtod dobimo levo delovanje Liejeve grupe SU(2) na V_n s predpisom

$$(qp)(z) = p(zq),$$

za vsak $q \in \mathrm{SU}(2)$, $p \in \mathsf{V}_n$ in $z \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{C})$. Eksplicitno,

$$qp = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k} \Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2)^k (\beta z_1 + \bar{\alpha} z_2)^{n-k}.$$

Tako je V_n reprezentacija Liejeve grupe SU(2), za vsak $n \in \mathbb{N}_0$. Vse te reprezentacije so seveda med seboj neekvivalentne, saj imajo različne dimenzije, $\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}_n = n+1$.

TRDITEV 3.41. *Reprezentacije* V_n *Liejeve grupe* SU(2) *so ireducibilne.*

DOKAZ. Za vsak $\alpha \in S^1 \subset \mathbb{C}$ naj bo $q_\alpha = \mathrm{diag}(\alpha, \bar{\alpha}) \in \mathrm{SU}(2)$. Direktno lahko izračunamo, da za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$ velja

$$q_\alpha p_k = (\alpha z_1)^k (\bar{\alpha} z_2)^{n-k} = (\alpha z_1)^k (\alpha^{-1} z_2)^{n-k} = \alpha^{2k-n} z_1^k z_2^{n-k} = \alpha^{2k-n} p_k.$$

To pomeni, da je p_k lastni vektor za lastno vrednost α^{2k-n} linearnega endomorfizma $Q_\alpha \in \mathrm{End}(\mathsf{V}_n)$, $Q_\alpha(p) = q_\alpha p$. Število $\alpha \in S^1$ izberimo tako, da so števila α^{2k-n}, $k = 0, 1, \ldots, n$, paroma različna. Tedaj so torej vsi lastni podprostori endomorfizma Q_α enodimenzionalni.

Ker je Liejeva grupa SU(2) kompaktna, po trditvi 3.22 obstaja nek SU(2)-invarianten skalarni produkt na V_n. Po trditvi 3.16 je zato dovolj dokazati, da je vsak SU(2)-ekvivarianten endomorfizem reprezentacije V_n skalarni večkratnih identitete. Naj bo torej $A \in \mathrm{End}_{\mathrm{SU}(2)}(\mathsf{V}_n)$. Tedaj velja

$$q_\alpha(Ap_k) = A(q_\alpha p_k) = A(\alpha^{2k-n} p_k) = \alpha^{2k-n}(Ap_k).$$

Polinom Ap_k je torej lastni vektor endomorfizma Q_α pri lastni vrednosti α^{2k-n}, ker pa je lastni podprostor endomorfizma Q_α pri lastni vrednosti α^{2k-n} enodimenzionalen in generiran s polinomom p_k, mora biti

$$Ap_k = \lambda_k p_k$$

za nek $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Za poljuben $\varphi \in \mathbb{R}$ označimo še

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

Tedaj velja

$$\begin{aligned} A(r_\varphi p_n) &= A\big((\cos\varphi)z_1 + (\sin\varphi)z_2\big)^n \\ &= A\Big(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(\cos\varphi)^k z_1^k (\sin\varphi)^{n-k} z_2^{n-k}\Big) \\ &= A\Big(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(\cos\varphi)^k (\sin\varphi)^{n-k} p_k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(\cos\varphi)^k (\sin\varphi)^{n-k} A p_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(\cos\varphi)^k (\sin\varphi)^{n-k} \lambda_k p_k. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} r_\varphi(Ap_n) &= r_\varphi(\lambda_n p_n) \\ &= \lambda_n(r_\varphi p_n) \\ &= \lambda_n \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(\cos\varphi)^k (\sin\varphi)^{n-k} p_k. \end{aligned}$$

Ker je $A(r_\varphi p_n) = r_\varphi(Ap_n)$ za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$, iz zgornjih enakosti sledi $\lambda_k = \lambda_n$ za vsak k, zato je $Ap_k = \lambda_k p_k = \lambda_n p_k$ za vsak k in torej $A = \lambda_n \,\mathrm{id}$. $\square$

Komentar 3.42. Izkaže se, da je vsaka ireducibilna reprezentacije Liejeve grupe SU(2) ekvivalentna eni od reprezentacij V_n, glej knjigo [**1**].

V dokazu zadnje trditve smo definirali elemente $q_\alpha = \mathrm{diag}(\alpha, \bar{\alpha}) \in \mathrm{SU}(2)$, za vse $\alpha \in S^1$, in dokazali, da velja $q_\alpha p_k = \alpha^{2k-n} p_k$ za vse $k = 0, 1, \ldots, n$. Ker polinomi $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sestavljajo bazo prostora V_n, odtod sledi

$$\chi_{\mathsf{V}_n}(q_\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k-n}.$$

Naj bo q poljubna matrika iz Liejeve grupe SU(2). Matrika q ima neko lastno vrednost $\alpha \in S^1$, ob tem pa je tudi $\bar{\alpha}$ lastna vrednost matrike q. Ker je matrika q unitarna, je unitarno diagonalizabilna, zato obstaja matrika $x \in \mathrm{SU}(2)$, za katero je $q = xq_\alpha x^{-1}$. Odtod sledi, da je

$$\chi_{\mathsf{V}_n}(q) = \chi_{\mathsf{V}_n}(xq_\alpha x^{-1}) = \chi_{\mathsf{V}_n}(q_\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k-n}.$$

S tem smo torej izračunali vrednost karakterja reprezentacije V_n na poljubni matriki $q \in \mathrm{SU}(2)$.

Množica T elementov oblike q_α sestavlja kompaktno povezano Liejevo podgrupo Liejeve grupe SU(2), ki je izomorfna Liejevi grupi S^1. Pri izračunu karakterja reprezentacije V_n smo uporabili dejstvo, da vsak $q \in \mathrm{SU}(2)$ leži v vsaj eni od konjugirank xTx^{-1}, $x \in \mathrm{SU}(2)$, in seveda to, da karakter poznamo na podgrupi T. Podobno lahko postopamo v primeru poljubne povezane kompaktne Liejeve grupe G, pri tem pa za podgrupo T Liejeve grupe G vzamemo maksimalno povezano abelovo podgrupo Liejeve grupe G (maksimalni torus v G).

3.4.5. Maksimalni torusi. Liejevo grupo, ki je izomorfna Liejevi grupi $T^k = (S^1)^k$ za neko nenegativno celo število k, bomo na kratko imenovali torus. Podgrupi Liejeve grupe G, ki je torus, bomo rekli *torus v Liejevi grupi G*.

Naj bo G kompaktna Liejeva grupa. Liejeva podgrupa T Liejeve grupe G je *maksimalen torus* v Liejevi grupi G, če je torus in če za vsak torus T' v G, za katerega je $T \subset T'$, velja $T = T'$. Zaradi dimenzijskih razlogov v vsaki kompaktni Liejevi grupi obstaja vsaj en maksimalen torus. Ker je zaprtje poljubne povezane abelove podgrupe Liejeve grupe G torus, so maksimalni torusi v G natanko maksimalne povezane abelove podgrupe Liejeve grupe G. Dokaz naslednjega izreka lahko študent najde v knjigi [**1**]:

IZREK 3.43. *Naj bo G povezana kompaktna Liejeva grupa. Tedaj velja:*
(i) Poljubna dva maksimalna torusa v G sta si konjugirana.
(ii) Vsak element grupe G je vsebovan v nekem maksimalnem torusu v G.

POSLEDICA 3.44. *Eksponentna preslikava povezane kompaktne Liejeve grupe je surjektivna.*

DOKAZ. Naj bo G povezana kompaktna Liejeva grupa in naj bo $x \in G$. Po izreku 3.43(ii) obstaja tak maksimalni torus T v G, da je $x \in T$. Eksponentna preslikava torusa surjektivna, zato je element x v njeni sliki. Ker je eksponentna preslikava torusa zožitev eksponentne preslikave Liejeve grupe G, je torej element x tudi v sliki eksponentne preslikave Liejeve grupe G. □

Naj bo T maksimalen torus v kompaktni povezani Liejevi grupi G. *Normalizator* maksimalnega torusa T v Liejevi grupi G je podgrupa

$$N = \{x \in G \mid xTx^{-1} = T\}$$

grupe G. Ker je podgrupa N zaprta, je torej kompakta Liejeva podgrupa v G. Torus T je podgrupa edinka v N, kvocientno Liejevo grupo

$$W = N/T$$

pa imenujemo *Weylova grupa* Liejeve grupe G. Ker so si maksimalni torusi v G med seboj konjugirani, so si tudi njihovi normalizatorji med seboj konjugirani, zato je Weylova grupa W Liejeve grupe G enolično določena do izomorfizma natančno.

TRDITEV 3.45. *Weylova grupa povezane kompaktne Liejeve grupe je končna.*

DOKAZ. Naj bo G kompaktna povezana Liejeva grupa, naj bo T maksimalni torus v G dimenzije k in naj bo $W = N/T$ Weylova grupa Liejeve grupe G. Konjugiranje s poljubnim elementom $x \in N$ nam da avtomorfizem torusa $\theta(x) : T \to T$, $t \mapsto xtx^{-1}$. Grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(T)$ torusa T je diskretna in izomorfna grupi $\mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ vseh matrik dimenzije $k \times k$ s celimi koeficienti in z determinanto ± 1.

Ker je preslikava $\theta : N \to \mathrm{Aut}(T)$ v diskretno grupo zvezna, je trivialna na komponenti nevtralnega elementa N° Liejeve grupe N. Odtod sledi, da je za poljubno enoparametrično podgrupo $\alpha : \mathbb{R} \to N^\circ$ produkt

$$\alpha(\mathbb{R})T = \{\alpha(s)t \mid s \in \mathbb{R},\, t \in T\}$$

povezana abelova podgrupa Liejeve grupe G, ki vsebuje T. Iz maksimalnosti torusa T sledi $\alpha(\mathbb{R})T = T$ in zato posebej $\alpha(\mathbb{R}) \subset T$. Ker to velja za vsako enoparametrično podgrupo povezane Liejeve grupe N°, odtod sledi $N^\circ = T$.

Ker je grupa N zaprta podgrupa kompaktne Liejeve grupe G, je kompaktna, zato je grupa njenih komponent $\pi_0(N) = N/N^\circ = N/T = W$ končna. $\square$

Literatura

[1] Bröcker, T., Dieck T. T. (2003). *Representations of Compact Lie Groups*. Springer, New York.

[2] Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C. (2000). *Lie Groups*. Springer, Berlin.

[3] Jacobson, Nathan (1979). *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York.

[4] Warner, F. W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York-Berlin.