Nika Novak

Študijsko gradivo

FINANČNA MATEMATIKA 1:

Naloge iz enoobdobnega in večobdobnega modela

Ljubljana, 2023

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

7. ENOOBDOBNI MODEL TRGA - cenovni funkcional

1. Obravnavamo enoobdobni model trga z delnico in netveganim bančnim računom s fiksno obrestno mero $R = 5\%$. Začetna cena obeh instrumentov je 1, končna cena delnice pa je podana z $S_1(\omega_1) = 2$ in $S_1(\omega_2) = 0.5$.

   (a) Izpišite podatke in jih prikažite z *binomskim drevesom*.

   Rešitev:
   Izpišemo vektor cen

   $$c = \begin{bmatrix} B_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   in matriko izplačil

   $$M = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(\omega_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 & 2 \\ 1.05 & 0.5 \end{bmatrix}$$

   (b) Dokažite, da je opisani trg poln in ne dopušča arbitraže.

   Rešitev: Trg je poln, če so vse pogojne terjatve dosegljive, tj. za vsako pogojno terjatev $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ lahko najdemo portfelj sestavljen iz B in S, ki ima ob času $t = 1$ enaka izplačila kot X. Za portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ tako velja

   $$M\phi = X.$$

   Ker je matrika M v enostavnem modelu trga obrnljiva, lahko vedno izračunamo $\phi = M^{-1}X$. Trg je poln.
   Za enostavni model trga velja, da ni arbitraže natanko tedaj, kadar velja

   $$d < 1 + R < u,$$

   kjer je $S_1(\omega_1) = S_0 u$ in $S_1(\omega_2) = S_0 d$.
   Pri nas je $u = 2, d = 0.5$ in velja $0.5 < 1.05 < 2$. Zato na trgu ni arbitraže.

(c) Določite izvedbeni portfelj za pogojno terjatev X z izplačili x v stanju ω_1 in y v stanju ω_2.

Rešitev: Ker za izvedbeni portfelj ϕ velja $M\phi = X$ in je M obrnljiva matrika, lahko izračunamo inverz

$$\begin{aligned}\phi &= M^{-1}X = \\ &= \frac{1}{1.05(0.5-2)}\begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ -1.05 & 1.05 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{20}{63}x + \frac{80}{63}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(d) Dokažite, da na opisanem trgu velja zakon ene cene, in določite cenovni funkcional ter vektor cen stanj.

Rešitev:

Zakon ene cene pravi, da morata imeti dva portfelja, ki imata enaka izplačila, tudi enaki ceni. Ker je matrika M obrnljiva, ima vsaka pogojna terjatev enoličen portfelj, zato velja zakon ene cene.

Cenovni funkcional $\pi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vsaki pogojni terjatvi priredi njeno ceno. Pomagamo si z izvedbenim portfeljem:

$$\begin{aligned}V_0(\phi) = \pi_0(X) = \langle \phi, c \rangle &= \\ &= -\frac{20}{63}x + \frac{80}{63}y + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = \\ &= \frac{22}{63}x + \frac{38}{63}y\end{aligned}$$

Vektor cen stanj: $\psi = \begin{bmatrix} \frac{22}{63} \\ \frac{38}{63} \end{bmatrix}$. Zanj velja, da je

$$\pi_0(X) = \langle X, \psi \rangle$$

(e) Na trgu je ponujen finančni instrument C z izplačili $C(\omega_1) = 3$ in $C(\omega_2) = 0.2$ v času 1 ter ceno 1.6 v času 0. Kaj bi storili?

Rešitev:
Poštena cena te terjatve je

$$\pi_0(C) = \frac{22}{63} \cdot 3 + \frac{38}{63} \cdot 0.2 = 1.168.$$

Ker je cena na trgu previsoka, je možna konstrukcija arbitraže.

Ideja: prodamo instrument C po tržni ceni 1.6 in kupimo izvedbeno strategijo ϕ po pošteni ceni $1,1682$.

Izvedbena strategija: Iščemo ϕ, da je $M\phi = C$. Sistem dveh linearnih enačb lahko rešujemo tudi z Gaussovo metodo eliminacije.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1.05 & 2 & 3 \\ 1.05 & 0.5 & 0.2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.05 & 2 & 3 \\ 0 & 1.5 & 2.8 \end{array}\right]$$

$$\beta = \frac{28}{15}, \quad \alpha = -\frac{44}{63}$$

Arbitraža:

$t = 0$:
- sposodim si $\frac{44}{63}$ na banki
- kupim $\frac{28}{15}$ delnice
- prodam en instrument C

$U_0 = \frac{44}{63} - \frac{28}{15} + 1.6 = 0,4317 > 0$

$t = 1$:
- vrni $\frac{44}{63}$ z obrestmi
- prodaj $\frac{28}{15}$ delnice
- izplačam C

$\omega_1: \quad U_1 = -\frac{44}{63} \cdot 1.05 + \frac{28}{15} \cdot 2 - 3 = 0$

$\omega_2: \quad U_1 = -\frac{44}{63} \cdot 1.05 + \frac{28}{15} \cdot 0.5 - 0.2 = 0$

$\Rightarrow$ portfelj ϕ je arbitražeb,

2. Enoobdobni model trga z vrednostnimi papirji B, S in W ima tri možna stanja sveta v času $t = 1$. Vrednostni papirji imajo danes cene $B_0 = 9, S_0 = 13$ in $W_0 = 8$, v času $t = 1$ pa možne vrednosti $B_1 \equiv 12$ ter $S_1(\omega_1) = 24, S_1(\omega_2) = 16, S_1(\omega_3) = 12$ in $W_1(\omega_1) = 12, W_1(\omega_2) = 11, W_1(\omega_3) = x$.

   (a) Naj bo $x = 9$. Dokažite, da je trg poln in da na njem velja zakon ene cene.

   Rešitev: Vektor cen c in matrika izplačil M:

$$c = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 12 & 16 & 11 \\ 12 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

   Z Gaussovo eliminacijo določimo rang matrike M

$$\begin{bmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 12 & 16 & 11 \\ 12 & 12 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Ker je $\operatorname{rang} M = 3$, je trg poln.

   Matrika M je obrnljiva, zato lahko za vsako pogojno terjatev najdemo enoličen izvedbeni portfelj ($\phi = M^{-1}X$) in enolično ceno.

   (b) Določite cenovni funkcional in pokažite, da na trgu ni možna arbitraža.

   Rešitev: Cenovni funkcional lahko določimo s pomočjo vektorja cen stanj $\psi \in \mathbb{R}^2$, za katerega je $M^\top \psi = c$ in $\psi > 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 12 & 9 \\ 24 & 16 & 12 & 13 \\ 12 & 11 & 9 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \end{array}\right]$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \frac{1}{4} > 0$$

   Tedaj je

$$\pi_0(X) = \tfrac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3).$$

   Ker cenovni funkcional obstaja, na trgu ni arbitraže.

   Če obstaja cenovni funkcional, potem trg ne dopušča arbitraže

(c) *Nakupna opcija na razliko (spread call)* med cenama delnic S in W z izvršilno ceno K ob zapadlosti 1 izplača znesek $S_1 - W_1 - K$ pod pogojem, da je ta pozitiven. Določite izvedbeni portfelj in premijo opcije na razliko z izvršilno ceno $K = 5$.

Rešitev:

$$X = \max\{S_1 - W_1 - K, 0\} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iščemo portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, za katerega velja $M\phi = X$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 24 & 12 & 7 \\ 12 & 16 & 11 & 0 \\ 12 & 12 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 24 & 12 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 24 & 12 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\gamma = -\frac{7}{3}, \quad \beta = \frac{7}{12}, \quad \alpha = \frac{7}{4}$$

Premija opcije je tedaj enaka

$$X_0 = V_0(X) = \langle \phi, c \rangle = \tfrac{7}{4} \cdot 9 + \tfrac{7}{12} \cdot 13 - \tfrac{7}{3} \cdot 8 = \tfrac{14}{3}$$

(d) Naj bo $x = 10$. Pokažite, da je na trgu možna arbitraža, in pripravite arbitražni portfelj.

Rešitev:

Poglejmo kaj v tem primeru velja za vektor cen stanj ψ.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 12 & 9 \\ 24 & 16 & 12 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Tedaj je

$$\psi_1 = \frac{1}{2}, \quad \psi_2 = -\frac{1}{2}, \quad \psi_3 = \frac{3}{4}$$

Ker je $\psi_2 < 0$, je na trgu možna arbitraža.

Pogojna terjatev, ki nam bo omogočila arbitražo je na primer $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, saj imamo ob času $t = 1$ nenegativno izplačilo, premija pa je

$$\pi_0(X) = \langle X, \psi \rangle = -\frac{1}{2}.$$

Torej bomo v času $t = 0$ dobili plačano.

Arbitražni portfelj:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 24 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 11 & 1 \\ 12 & 12 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 3$$

3. Enoobdobni model trga sestavljata dva finančna instrumenta in tri možna stanja sveta v času $t = 1$. Prvi instrument je netvegana brezkuponska obveznica s ceno 100 in 5% donosom, drugi pa delnica s ceno $S_0 = 52$ in možnimi prihodnjimi vrednostmi

$$S_1 = \begin{bmatrix} 56 \\ 52 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

(a) Dokažite, da trg ni poln, in določite množico dosegljivih pogojnih terjatev $\mathcal{M}$.

Rešitev:

Najprej izpišemo vektor cen c in matriko izplačil M:

$$c = \begin{bmatrix} 100 \\ 52 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 105 & 56 \\ 105 & 52 \\ 105 & 48 \end{bmatrix}$$

Ker imamo 3 stanja sveta in le 2 vrednostna papirja, tre ni poln (rang $M \leq 2$).

Množica dosegljivih pogojnih terjatev $\mathcal{M}$ vsebuje vse možna linearne kombinacije izplačil

$$B_1 = \begin{bmatrix} 105 \\ 105 \\ 105 \end{bmatrix} \text{ in } S_1 = \begin{bmatrix} 56 \\ 52 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

Zato je $\mathcal{M}$ linearna ogrinjača vektorjev B_1 in S_1

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{L}(B_1, S_1) \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \alpha(105, 105, 105) + \beta(56, 52, 48)\right\} \end{aligned}$$

Ker je linearna ogrinjača dveh neodvisnih vektorjev v $\mathbb{R}^3$ ravnina, lahko zapis za $\mathcal{M}$ poenostavimo. Izračunamo normalni vektor na ravnino, ki vsebuje B_1 in S_1:

$$\vec{n} = \vec{B}_1 \times \vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 56 & 52 & 48 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4)$$

Zato je

$$\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -4x + 8y - 4z = 0\right\},$$

oziroma

$$\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\right\},$$

(b) Katere od spodnjih pogojnih terjatev so na trgu dosegljive?

(i) $X = |S_1 - S_0|$,

(ii) $Y = (2,3,4)^T$.

(iii) Z = evropska nakupna opcija, napisana na delnico S, z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 50.

Pri dosegljivih terjatvah izračunajte še njihove poštene cene.

Rešitev:

Za vsako pogojno terjatev preverimo, če zadošča pogoju za $\mathscr{M}$.

(i) $X = |S_1 - S_0| = \begin{bmatrix} |56-52| \\ |52-52| \\ |48-52| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Ker $4 - 0 + 4 \neq 0 \Rightarrow$ X ni dosegljiva.

(ii) $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow$ terjatev Y je dosegljiva

Za določitev poštene cene poiščimo izvedbeni portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, za katerega velja $M\phi = Y$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 105 & 56 & 2 \\ 105 & 52 & 3 \\ 105 & 48 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 105 & 56 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 105 & 56 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zato je

$$\beta = -\frac{1}{4} \text{ in } \alpha = \frac{2 - 56 \cdot -\frac{1}{4}}{105} = \frac{16}{105}.$$

Začetna cena izvedbenega portfelja je

$$V_0(\phi) = \langle \phi, c \rangle = \frac{16}{105} \cdot 100 - \frac{1}{4} \cdot 52 = \frac{47}{21} = 2,24$$

(iii) $Z = \begin{bmatrix} \max\{56-50,0\} \\ \max\{52-50,0\} \\ \max\{48-50,0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$6 - 4 + 0 \neq 0 \Rightarrow$ Z ni dosegljiva.

(c) Določite cenovni funkcional $\pi_0 : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$.

Rešitev:

Izberemo poljubno doseglivo terjatev $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2y - x \end{bmatrix}$, določimo njen izvedbeni portfelj ϕ_X in definiramo cenovni funkcional $\pi_0(X) = \langle \phi_X, c \rangle$.

Izvedbeni portfelj mora zadoščati sistemu enačb $M\phi = X$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 105 & 56 & x \\ 105 & 52 & y \\ 105 & 48 & 2y - x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 105 & 56 & x \\ 0 & -4 & y - x \\ 0 & -8 & 2y - 2x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 105 & 0 & |x + 14(y - x) \\ 0 & -4 & |y - x \\ 0 & 0 & |0 \end{array}\right]$$

$$\alpha = \frac{14y - 13x}{105} \quad \text{in} \quad \beta = \frac{x - y}{4}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \pi_0(X) = \langle \phi, c \rangle &= \frac{14y - 13x}{105} \cdot 100 + \frac{x - y}{4} \cdot 52 = \\ &= \frac{13}{21}x + \frac{1}{3}y \end{aligned}$$

(d) Poiščite vse krepko pozitivne razširitve $\hat{\pi}_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcionala π_0.

Rešitev:

Krepko pozitivne razširitve $\hat{\pi}_0$ predstavimo z vektorji cen stanj $\psi \in \mathbb{R}^3$, ki so rešitve sistema enačb $M^\top \psi = c$ in neenačb $\psi > 0$.

Če je trg poln, potem je $\hat{\pi}_0 = \pi_0$. Na nepolnem trgu pa imamo več enačb kot neznank.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 105 & 105 & 105 & 100 \\ 56 & 52 & 48 & 52 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 21 & 21 & 21 & 20 \\ 0 & -1,5 & -3 & -0,5 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} &\psi_3 \in \mathbb{R} \text{ parameter} \\ &\psi_2 = \tfrac{1}{3} - 2\psi_3 \\ &\psi_1 = \tfrac{13}{21} + \psi_3 \end{aligned}$$

Za krepko pozitivnost mora veljati še

$$\begin{aligned} &\psi_3 > 0 \\ &\psi_2 > 0 \Rightarrow \psi_3 < \tfrac{1}{6} \\ &\psi_1 > 0 \text{ vedno izpolnjeno} \end{aligned}$$

Krepke razširitve so linearni funkcionali določeni z vektorji

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{13}{21} + \psi_3 \\ \frac{1}{3} - 2\psi_3 \\ \psi_3 \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je } \psi_3 \in (0, \tfrac{1}{6})$$

.

Če obstaja družina razširitev, potem trg NI poln.

Če razširitev obstaja, potem trg ne dopušča arbitraže

Zožitev funkcionalov $\hat{\pi}_0$ na $\mathscr{M}$:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_0(X) = \langle X, \psi \rangle = \\ &= (\tfrac{13}{21} + \psi_3)x + (\tfrac{1}{3} - 2\psi_3)y + \psi_3(2y - x) = \\ &= \tfrac{13}{21}x + \tfrac{1}{3}y = \pi_0(X) \end{aligned}$$

To je bljižnica do cenovnega funkcionala.

(e) S funkcionalom $\hat{\pi}_0$ določite take cene pogojnih terjatev iz točke (b), da razširjeni trg ostane brez arbitraže. Pri tem

(i) obravnavajte tri primere, ko dodate po le eno terjatev,

(ii) obravnavajte primer, ko dodate vse terjatve hkrati.

Rešitev:

$$\hat{\pi}_0(X) = 4(\tfrac{13}{21} + \psi_3) + 4\psi_3 = \tfrac{52}{21} + 8\psi_3$$

Ko ψ_3 preteče interval $(0, \frac{1}{6})$, dobimo interval dopustnih cen $(\frac{52}{21}, \frac{80}{21})$. To so vse cene, ki na trg ne prinesejo arbitraže.

$$\hat{\pi}_0(Y) = 2(\tfrac{13}{21} + \psi_3) + 3(\tfrac{1}{3} - 2\psi_3) + 4\psi_3 = \tfrac{47}{21} = \pi_0(Y)$$

Pogojne terjatve so dosegljive natanko tedaj, ko imajo enolično ceno.

$$\hat{\pi}_0(Z) = 6(\tfrac{13}{21} + \psi_3) + 2(\tfrac{1}{3} - 2\psi_3) = \tfrac{92}{21} + 2\psi_3$$

Ko ψ_3 preteče interval $(0, \frac{1}{6})$, dobimo interval dopustnih cen $(\frac{92}{21}, \frac{33}{7})$

Ko na trg dodamo terjatev X ali Z, ga napolnimo. Terjatev Y pa je dosegljiva in ne more napolniti trga.

Če dodajamo vse terjatve hkrati, moramo paziti, da so cene usklajene (dobljene pri istem ψ_3, drugače je na trgu možna arbitraža.

8. ENOOBDOBNI MODEL TRGA - ekvivalentna martingalska verjetnost

1. Obravnavamo enoobdobni model finančnega trga. Ekonomsko negotovost v času 1 opisuje množica stanj $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Začetne cene vrednostnih papirjev B, S^1 in S^2 znašajo $B_0 = 90$, $S_0^1 = 54$ ter $S_0^2 = 48$. Končna izplačila prikazuje spodnja preglednica.

	ω_1	ω_2	ω_3
B_1	100	100	100
S_1^1	100	80	40
S_1^2	100	40	40

(a) Izračunajte netvegano obdobno obrestno mero.

Rešitev:

Vektor cen in matrika izplačil:

$$c = \begin{bmatrix} 90 \\ 54 \\ 48 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 80 & 40 \\ 100 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Netvegana obrestna mera je podana z obveznico. Ker je

$$B_1 = B_0(1+R),$$

dobimo

$$R = \frac{B_1}{B_0} - 1 = \frac{100}{90} - 1 = \frac{1}{9} = 11,11\%.$$

(b) Določite do tveganja nevtralno verjetnost in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže. Ali je trg poln?

Rešitev:

Do tveganja nevtralna verjetnost je poseben primer ekvivalentne martingalske verjetnosti.

Za numerar vzamemo obveznico. Vse cene in izplačila izrazimo v enotah numerarja. Temu rečemo *diskontiranje*:

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{54}{90} \\ \frac{48}{90} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{8}{15} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{100}{100} & \frac{100}{100} \\ 1 & \frac{80}{100} & \frac{40}{100} \\ 1 & \frac{40}{100} & \frac{40}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Za do tveganja nevtralno verjetnost $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ mora veljati:

- $q_i > 0$ za vsak i (ker je ekvivalentna osnovni verjetnosti P
- $\sum_i q_i = 1$, saj je verjetnost
- martingalska lastnost: $\widetilde{X}_0 = E_Q(\widetilde{X}_1)$

Z uporabo martingalske lastnosti za instrumente na našem trgu dobimo

$$\begin{aligned} E_Q(\widetilde{B}_1) = 1 \qquad &\Rightarrow \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ E_Q(\widetilde{S}_1^1) = \frac{3}{5} \qquad &\Rightarrow \quad q_1 + \frac{4}{5}q_2 + \frac{2}{5}q_3 = \frac{4}{5} \\ E_Q(\widetilde{S}_1^2) = \frac{8}{15} \qquad &\Rightarrow \quad q_1 + \frac{2}{5}q_2 + \frac{2}{5}q_3 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Z Gaussovo metodo eliminacije lahko izračunamo q_1, q_2, q_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 15 & 6 & 6 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 11 \end{array}\right]$$

$$q_3 = \frac{11}{18}, \quad q_2 = 2 - 3q_3 = \frac{1}{6}, \quad q_1 = 1 - q_2 - q_3 = \frac{2}{9}$$

Če obstaja do tveganja nevtralna verjetnost, trg ne dopušča arbitraže.
Če je do tveganja nevtralna verjetnost ena sama, potem je trg poln

(c) Pozitivna pogojna terjatev C ima v času 0 ceno $C_0 = 20$, v času 1 pa izplačila

	ω_1	ω_2	ω_3
C_1	x	20	y

Določite pogoje za x in y, da bo razširjeni trg (B, S^1, S^2, C) brez arbitraže.

Rešitev:

Pogojna terjatev je pozitivna, če so vse njene komponente $C_1(\omega_i) \geq 0$ in je vsaj ena strogo pozitivna. Ker je $C_1(\omega_2) = 20 > 0$, je dovolj zahtevati

$$x, y \geq 0.$$

Zaradi martingalske lastnosti do tveganja nevtralne verjetnosti velja

$$E_Q(\widetilde{C_1}) = \widetilde{C_0}$$

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{100} \cdot \frac{11}{18} = \frac{2}{9}$$

$$4x + 11y = 340$$

Za x in y morata veljati pogoja

$$x, y \geq 0 \quad \text{in} \quad 4x + 11y = 340.$$

(d) Izberite delnico S^2 za numerar in izračunajte pripadajočo ekvivalentno martingalsko verjetnost.

Rešitev:

Diskontiramo z numerarjem S^2.

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{90}{48} \\ \frac{54}{48} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{9}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & \frac{100}{100} & 1 \\ \frac{100}{40} & \frac{80}{40} & 1 \\ \frac{100}{40} & \frac{40}{40} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za $Q = (q_1, q_2, q_3)^\top$ dobimo enačbe

$$\begin{aligned} E_Q(\widetilde{B}_1) = \frac{15}{8} \quad &\Rightarrow \quad q_1 + \frac{5}{2}q_2 + \frac{5}{2}q_3 = \frac{15}{8} \\ E_Q(\widetilde{S_1^1}) = \frac{9}{8} \quad &\Rightarrow \quad q_1 + 2q_2 + q_3 = \frac{9}{8} \\ E_Q(\widetilde{S_1^2}) = 1 \quad &\Rightarrow \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 16 & 8 & 9 \\ 8 & 20 & 20 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 12 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & \frac{11}{2} \end{array}\right]$$

$$q_3 = \frac{11}{24}, \quad q_2 = \frac{1}{8}, \quad q_1 = \frac{5}{12}$$

(e) Z uporabo točke (d) ponovno rešite nalogo (c). Kaj opazite?

Rešitev:

Pogoj $x, y \geq 0$ ni odvisen od numerarja. Iz martingalske enakosti pa dobimo

$$E_Q(\widetilde{C_1}) = \widetilde{C_0}$$

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{40} \cdot \frac{11}{24} = \frac{5}{12}$$

$$4x + 11y = 340$$

Dobimo enak rezultat.

Različne izbire numerarja prinesejo različne ekvivalentne martingalske verjetnosti, rezultati vrednotenja pa so enaki.

2. Na trgu so podane obveznica B z začetno ceno $B_0 = 10$ in netveganim donosom 10% ter delnici S^1 in S^2 s cenama $S_0^1 = 20$ ter $S_0^2 = 30$. Za končne vrednosti delnic velja $S_1^i = S_0^i(1+r)$, kjer ima r verjetnostno funkcijo

$$r \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \overset{\omega_1}{1/2} & \overset{\omega_2}{0} & \overset{\omega_3}{-1/2} \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Določite do tveganja nevtralno verjetnost Q in dokažite, da trg ni poln.

Rešitev:
Vektor cen in matrika izplačil:

$$c = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 11 & 30 & 45 \\ 11 & 20 & 30 \\ 11 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Ker sta drugi in tretji stolpec matrike odvisna, je $\operatorname{rang} M = 2 < 3$ in zato trg ni poln.
Opazimo, da tako ob $t = 0$ kot ob $t = 1$ velja $S^2 = \frac{3}{2}S^1$. Instrumenta sta odvisna in v analizi lahko brez škode za splošnost spustimo tretji element.
Opazovani trg je tako

$$c = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 11 & 20 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

Za numerar vzamemo obveznico in diskontiramo cene in izplačila

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{30}{11} \\ 1 & \frac{20}{11} \\ 1 & \frac{10}{11} \end{bmatrix}$$

Martingalska lastnost

$$\begin{aligned} E_Q(\widetilde{B}_1) = \widetilde{B}_0 \quad &\Rightarrow \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ E_Q(\widetilde{S}_1^1) = \widetilde{S}_0^1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{30}{11}q_1 + \frac{20}{11}q_2 + \frac{10}{11}q_3 = 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 30 & 20 & 10 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 20 & 8 \end{array}\right]$$

$$q_3 \in \mathbb{R} \text{ parameter}, \quad q_2 = \frac{4}{5} - 2q_3, \quad q_1 = q_3 + \frac{1}{5}$$

Veljati mora še $q_i > 0$:

$$\begin{aligned} &q_3 > 0 \\ &q_2 = \frac{4}{5} - 2q_3 > 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 < \frac{2}{5} \\ &q_1 = q_3 + \frac{1}{5} > 0 \end{aligned}$$

Tako dobimo omejitev za parameter $0 < q_3 < \frac{2}{5}$
Družina do tveganja nevtralnih verjetnosti

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} q_3 + \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} - 2q_3 \\ q_3 \end{bmatrix} \ ; \ 0 < q_3 < \frac{2}{5} \right\}$$

Ker do tveganja nevtralna verjetnost ni enolična, trg ni poln .

(b) Določite take cene naslednjih pogojnih terjatev, da trg ostane brez arbitraže. Pri tem obravnavajte vsako pogojno terjatev posebej.

(i) $X = \max\{S_1^1, S_1^2\}$,

(ii) $Y = (S_1^1)^2$.

Ali je katera pogojna terjatev dosegljiva?

Rešitev:

(i) $X = \max\{S_1^1, S_1^2\} = \max\{S_1^1, \frac{3}{2}S_1^1\} = \frac{3}{2} \cdot S_1^1$

Terjatev je dosegljiva. Njena cena je $\frac{3}{2} \cdot S_0^1 = 30$.

(ii) $Y = (S_1^1)^2 = \begin{bmatrix} 900 \\ 400 \\ 100 \end{bmatrix}$

Iz martingalske enakosti $\widetilde{Y}_0 = E_Q(\widetilde{Y})$ dobimo

$$\frac{Y_0}{10} = \frac{900}{11}\,q_1 + \frac{400}{11}\,q_2 + \frac{100}{11}\,q_3$$

$$\begin{aligned} \pi_0(Y) = Y_0 &= \frac{1000}{11}\left(9(q_3 + \frac{1}{5}) + 4(\frac{4}{5} - 2q_3) + q_3\right) = \\ &= \frac{1000}{11}(5 + 2q_3) \end{aligned}$$

Ker cena ni enolična, terjatev Y ni dosegljiva.

Ko q_3 preteče interval $(0, \frac{2}{5})$, dobimo interval dopustnih cen na katerem ni arbitraže:

$$Y_0 \in \left(\frac{5000}{11}, \frac{5800}{11}\right)$$

(c) *Problem prodajalca*. Finančnik je prodal instrument z izplačili Y. Poiščite njegov superzaščitni portfelj na trgu (B, S^1). Kakšna so njegova cena in izplačila?

Rešitev:

Prodajalec mora v času $t = 1$ izplačati Y, t.j. $Y(\omega_1) = 900, Y(\omega_2) = 400$ ali $Y(\omega_3) = 100$, odvisno od stanja v katerem bo svet. Na trgu (B, S^1) bi rad ustvaril portfelj, ki ponuja taka izplačila. Ker Y ni dosegljiv, izvedbeni portfelj zanj ne obstaja. Ujemanje ne more biti popolno. Išče najcenejši portfelj, ki v vseh stanjih izplača dovolj, da pokrije svoje obveznosti in ima najmanjšo možno ceno.

Problem: poišči $\phi \in \mathbb{R}^2$, za katerega je

$$\min\langle \phi, c\rangle$$

pri pogojih $M\phi \geq Y$.

Iščemo torej minimum funkcije

$$10\alpha + 20\beta$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} 11\alpha + 30\beta &\geq 900 \\ 11\alpha + 20\beta &\geq 400 \\ 11\alpha + 10\beta &\geq 100 \end{aligned}$$

Minimum je dosežen pri

$$\alpha = -\frac{300}{11}, \quad \beta = 40$$

in znaša $\frac{5800}{11}$, kar je ravno zgornja meja brezarbitražnega intervala.

Izplačila portfelja znašajo

$$M\phi = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 11 & 20 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{300}{11} \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 500 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Poštena cena $\frac{5800}{11}$ za Y pomeni arbitražo, saj je to prava cena za zgornje izplačilo, ki je večje od Y.

(d) *Enostavni donos* portfelja θ je slučajna spremenljivka $r_\theta = \frac{V_1(\theta)-V_0(\theta)}{V_0(\theta)}$. Njeno matematično upanje je *pričakovani donos* portfelja.
Izračunajte pričakovana donosa obveznice in delnice S^1

(i) glede na naravno verjetnost P,
(ii) glede na do tveganja nevtralno verjetnost Q.

Rešitev:

Enostavni donos obveznice B

$$r_B = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{11-10}{10} = 0,1$$

je neodvisen od stanja. Zato je pričakovani donos

$$E_P(r_B) = 0,1 = 10\%$$

$$E_Q(r_B) = 0,1 = 10\%$$

Enostavni donos za S^1:

$$r_{S^1} = \frac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1} = \frac{S_0^1\,(1+r) - S_0^1}{S_0^1} = r$$

Ker je

$$r \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

dobimo

$$E_P(r_{S^1}) = -\frac{1}{8} = -12,5\%.$$

Glede na do tveganja nevtralno verjetnost Q je r porazdeljen

$$r \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ q_3 + \frac{1}{5} & \frac{4}{5} - 2q_3 & q_3 \end{pmatrix}, \quad 0 < q_3 < \frac{2}{5}.$$

Zato je

$$E_Q(r_{S^1}) = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Pričakovani donos tvegane delnice glede na do tveganja nevtralno verjetnost je enak pričakovanemu donosu netveganega instrumenta.

9. VEČOBDOBNI MODEL TRGA - izvedbene strategije

1. Obravnavamo model trga s tremi datumi ($T = 2$) in dvema vrednostnima papirjema. Prvi je bančni račun B, na katerem se stanje v obdobju od 0 do 1 obrestuje z obrestno mero 2%, v obdobju od 1 do 2 pa z obrestno mero 3%.

   Drugi vrednostni papir je delnica z začetno ceno $S_0 = 50$. Do trenutka 1 vrednost delnice naraste za 10% ali pade za 10%. Za nadaljnje cene pa velja naslednje pravilo: če je cena v preteklem obdobju narasla, bo v prihodnjem obdobju narasla za nadaljnjih 10% ali padla za 5%. če pa je cena v preteklem obdobju padla, bo v prihodnjem obdobju narasla za 5% ali padla za nadaljnjih 10%.

   (a) Narišite drevo dogodkov, ki prikazuje opisano negotovost.

   Rešitev:

$$B:\ 1 \;\text{———}\; 1.02 \;\text{———}\; 1.02 \cdot 1.03$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 50 \cdot 1.1 \cdot 1.1 \\
 & 50 \cdot 1.1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 50 \cdot 1.1 \cdot 0.95 \\
S: 50 \arrow[uur, dash] \arrow[ddr, dash] & & \\
 & & 50 \cdot 0.9 \cdot 1,05 \\
 & 50 \cdot 0.9 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 50 \cdot 0.9 \cdot 0.9
\end{tikzcd}$$

   Poračunamo

$$B:\ 1 \;\text{———}\; 1.02 \;\text{———}\; 1.0506$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 60.5 \\
 & 55 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 52.25 \\
S: 50 \arrow[uur, dash] \arrow[ddr, dash] & & \\
 & & 47.25 \\
 & 45 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 40.5
\end{tikzcd}$$

(b) Ob času 0 na delnico S napišemo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 50. Določite njeno izvedbeno strategijo.

Rešitev:

stanje	S_2	$X = \max\{S_2 - 50, 0\}$
uu	60.5	10.5
ud	52.25	2.25
du	47.25	0
dd	40.5	0

Izvedbeno strategijo začnemo graditi na koncu

$$\begin{aligned} \alpha = &\ \text{stanje na banki} \\ \beta = &\ \text{število delnic v portfelju} \end{aligned}$$

$t = 1$: stanje u:

Iščemo portfelj $\phi_u = \begin{bmatrix} \alpha_u \\ \beta_u \end{bmatrix}$, za katerega velja

$$\begin{aligned} \alpha_u B_2 + \beta_u S_{uu} &= X_{uu} \\ \alpha_u B_2 + \beta_u S_{ud} &= X_{ud} \end{aligned}$$

Če vstavimo številke našega primera:

$$\begin{aligned} 1.0506\alpha_u + 60.5\beta_u &= 10.5 \\ 1.0506\alpha_u + 52.25\beta_u &= 2.25 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \beta_u &= 1 \\ \alpha_u &= \frac{10.5 - 60.5}{1.0506} = -47.5919 \end{aligned}$$

Dobili smo portfelj $\phi_u = \begin{bmatrix} -47.5919 \\ 1 \end{bmatrix}$. Njegova vrednost ob času 1 (v stanju u) je enaka

$$V_u = \alpha_u B_1 + \beta_u S_u = -47.5919 \cdot 1.02 + 1 \cdot 55 = 6.4563$$

Toliko rabimo v stanju u, da kupimo portfelj ϕ_u in v času 2 dobimo ustrezna izplačila. Hkrati je to cena opcije v tem stanju.

stanje d:

Iščemo portfelj $\phi_d = \begin{bmatrix} \alpha_d \\ \beta_d \end{bmatrix}$, za katerega velja

$$\begin{aligned} \alpha_d B_2 + \beta_d S_{du} &= X_{du} \\ \alpha_d B_2 + \beta_d S_{dd} &= X_{dd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.0506\alpha_d + 47.25\beta_d &= 0 \\ 1.0506\alpha_d + 40.5\beta_d &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_d = \beta_d = 0 \quad \text{in} \quad V_d = 0$$

$t = 0:$ Konstruiramo portfelj $\phi_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$, za katerega velja

$$\begin{aligned} \alpha_0 B_1 + \beta_0 S_u &= V_u \\ \alpha_0 B_1 + \beta_0 S_d &= V_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.02\alpha_0 + 55\beta_0 &= 6,4563 \\ 1.02\alpha_0 + 45\beta_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_0 = 0.6456, \quad \alpha_0 = -28.4837$$

Za nakup portfelja ϕ_0 potrebujemo

$$V_0 = \alpha_0 B_0 + \beta_0 S_0 = 3.7978$$

Izvedbena strategija je stohastični dinamični portfelj

$$\begin{tikzcd} & \phi_u = \begin{bmatrix} -47.5919 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \phi_0 = \begin{bmatrix} -28.4837 \\ 0.6456 \end{bmatrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & \phi_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{tikzcd}$$

(c) Določite premijo opcije iz naloge (b).

Rešitev:

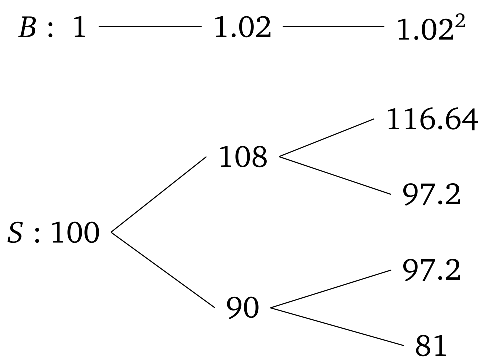
Cena opcije je nabavna vrednost izvedbene strategije

$$\pi_0(X) = V_0(\phi_0) = 3.7978$$

2. *Binomski model*. V modelu z dvema obdobjema nastopata dva instrumenta. Prvi je bančni račun s konstantno obdobno obrestno mero 2%, drugi pa delnica z začetno ceno 100. Vrednost delnice lahko v vsakem obdobju naraste za 8% ali pade za 10%.

   (a) Narišite drevo dogodkov, ki prikazuje opisano negotovost.

   Rešitev:



   (b) Določite začetno ceno pogojne terjatve X, ki v trenutku $t \in \{1, 2\}$ izplača

$$X_t = S_t \cdot 1_{\{S_t < S_{t-1}\}},$$

   torej izplača ceno delnice S_t pod pogojem, da je cena delnice padla.

   Rešitev:

stanje	S_t	$X_t = S_t \cdot 1_{\{S_t < S_{t-1}\}}$
uu	116.64	0
ud	97.2	97.2
du	97.2	0
dd	81	81
u	108	0
d	90	90

Ceno bomo določilo z izvedbeno strategijo.

$t = 1$: stanje u:

Iščemo portfelj $\phi_u = \begin{bmatrix} \alpha_u \\ \beta_u \end{bmatrix}$, za katerega velja

$$\alpha_u B_2 + \beta_u S_{uu} = X_{uu}$$
$$\alpha_u B_2 + \beta_u S_{ud} = X_{ud}$$

Če vstavimo številke našega primera:

$$1.0404\alpha_u + 116.64\beta_u = 0$$
$$1.0404\alpha_u + 97.2\beta_u = 97.2$$

$$\alpha_u = 560.554$$
$$\beta_u = -5$$
$$V_u = 31.7647$$

stanje d:

Iščemo portfelj $\phi_d = \begin{bmatrix} \alpha_d \\ \beta_d \end{bmatrix}$, za katerega velja

$$\alpha_d B_2 + \beta_d S_{du} = X_{du}$$
$$\alpha_d B_2 + \beta_d S_{dd} = X_{dd}$$

$$1.0404\alpha_d + 97.2\beta_d = 0$$
$$1.0404\alpha_d + 81\beta_d = 81$$

$$\alpha_d = 467.128$$
$$\beta_d = -5$$
$$V_d = 26.4706$$

$t = 0:$ Portfelj $\phi_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$ sestavimo tako, da bomo v času 1 imeli dovolj za izplačilo terjatve in nadaljevanje strategije

$$\alpha_0 B_1 + \beta_0 S_u = V_u + X_u$$
$$\alpha_0 B_1 + \beta_0 S_d = V_d + X_d$$

To ni strategija samofinanciranja!

$$1.02\alpha_0 + 108\beta_0 = 31.7647 + 0$$
$$1.02\alpha_0 + 490\beta_0 = 26.4706 + 90$$

$$\alpha_0 = 529.412$$
$$\beta_0 = -4.7059$$
$$V_0 = 58.8235$$

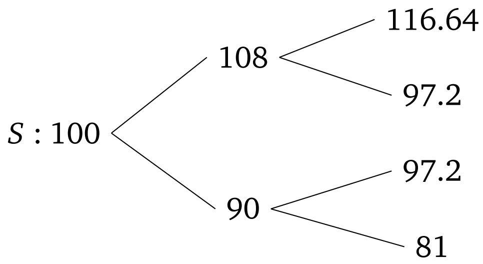
Cena pogojne terjatve je 89.8235.

10. VEČOBDOBNI MODEL TRGA - ekvivalentna martingalska verjetnost

1. *V nalogi je predstavljena alternativna rešitev naloge 2 iz sklopa 9.*

   V modelu z dvema obdobjema nastopata dva instrumenta. Prvi je bančni račun s konstantno obdobno obrestno mero 2%, drugi pa delnica z začetno ceno 100. Vrednost delnice lahko v vsakem obdobju naraste za 8% ali pade za 10%.

$$B:\ 1 \text{ ——— } 1.02 \text{ ——— } 1.02^2$$



   (a) Izračunajte do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti.

Rešitev:

Za iskanje ekvivalentnih martingalskih verjetnosti si izberemo numerar, ki je enak skozi celoten model. Verjetnost Q podamo z vsemi prehodnimi verjetnostmi q_i. Ker je Q ekvivalentna naravni verjtnosti P, so vse prehodne verjetnosti $q_i \neq 0$. Diskontirani cenovni procesi pa so glede na mero Q martingali, t.j.

$$E_Q(\widetilde{S}_j|\mathscr{F}_s) = \widetilde{S}_s, \qquad \text{za vsak } s \leq t.$$

Ker je slučajni proces X_t v diskretnem času martingal natanko tedaj, ko je

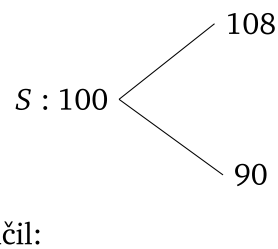
$$E(X_{t+1}|\mathscr{F}_t) = X_t$$

za vse smiselne čase t, lahko večobdobni model obravnavamo kot zlepek enoobdobnih modelov.

Obravnavamo posamezne enoobdobne modele.

$t = 0 \longrightarrow t = 1:$

$$B:\ 1 \text{ ——— } 1.02$$



Vektor cen in matrika izplačil:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1.02 & 108 \\ 1.02 & 90 \end{bmatrix}$$

Za numerar vzamemo bančni račun

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{108}{1.02} \\ 1 & \frac{90}{1.02} \end{bmatrix}$$

Z uporabo martingalske lastnosti dobimo

$$\begin{aligned} E_Q(\widetilde{B}_1) = \widetilde{B}_0 \quad &\Rightarrow \quad q_1 + q_2 = 1 \\ E_Q(\widetilde{S}_1) = \widetilde{S}_0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{108}{1.02} q_1 + \frac{90}{1.02} q_2 = 100 \end{aligned}$$

Rešimo dobljeni sistem enačb za q_1 in q_2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 108 & 90 & 102 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

$$q_1 = \frac{2}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{3}$$

$t = 1 \longrightarrow t = 2$: Najprej si oglejmo stanje u.

$$B: \ 1.02 \longrightarrow 1.02^2$$

$$S: 108 \begin{cases} 116.64 \\ 97.2 \end{cases}$$

Vektor cen in matrika izplačil:

$$c = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 108 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1.02^2 & 116.64 \\ 1.02^2 & 97.2 \end{bmatrix}$$

Za numerar vzamemo bančni račun

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{108}{1.02} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{116.64}{1.02^2} \\ 1 & \frac{97.2}{1.02^2} \end{bmatrix}$$

Z uporabo martingalske lastnosti dobimo

$$\begin{aligned} E_Q(\widetilde{B}_2) = \widetilde{B}_1 \quad &\Rightarrow \quad q_3 + q_4 = 1 \\ E_Q(\widetilde{S}_2) = \widetilde{S}_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{116.64}{1.02^2} q_3 + \frac{97.2}{1.02^2} q_4 = \frac{108}{1.02} \end{aligned}$$

Rešimo dobljeni sistem enačb za q_3 in q_4

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 116.64 & 97.2 & 110.16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 19.44 & 6.48 \end{array}\right]$$

$$q_3 = \frac{2}{3}, \quad q_4 = \frac{1}{3}$$

Opazimo, da je rezultat enak kot prej.

Oglejmo si splošen primer.

$$c = \begin{bmatrix} B_t \\ S_t \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} B_t(1+R) & S_t u \\ B_t(1+R) & S_t d \end{bmatrix}$$

Za numerar izberemo netvegan bančni račun (ali obveznico):

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{S_t}{B_t} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_t u}{B_t(1+R)} \\ 1 & \frac{S_t d}{B_t(1+R)} \end{bmatrix}$$

Z uporabo martingalske lastnosti dobimo

$$E_Q(\widetilde{B}_{t+1}) = \widetilde{B}_t \quad \Rightarrow \quad q_1 + q_2 = 1$$
$$E_Q(\widetilde{S}_{t+1}) = \widetilde{S}_t \quad \Rightarrow \quad \frac{S_t u}{B_t(1+R)} q_1 + \frac{S_t d}{B_t(1+R)} q_2 = \frac{S_t}{B_t}$$

Dobimo sistem enačb

$$q_1 + q_2 = 1$$
$$u q_1 + d q_2 = 1 + R$$

V binomskem modelu s konstantnimi parametri tako velja

$$q_1 = \frac{1+R-d}{u-d}, \qquad q_2 = \frac{u-(1+R)}{u-d}$$

Trg je brez arbitraže natanko tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost. V binomskem primeru je to natanko tedaj, ko je

$$d < 1 + R < u.$$

V našem primeru so tako vse do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti v višja stanja enake $q_1 = \frac{2}{3}$ in vse prehodnje verjetnosti v nižja stanja $q_2 = \frac{1}{3}$.

(b) Izračunajte do tveganja nevtralne verjetnosti vseh stanj v modelu.

Rešitev:

stanje	Q
$t = 0$	1
u	$\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{3}$
uu	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
ud	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
dd	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(c) Določite začetno ceno pogojne terjatve X, ki v trenutku $t \in \{1, 2\}$ izplača

$$X_t = S_t \cdot 1_{\{S_t < S_{t-1}\}},$$

torej izplača ceno delnice S_t pod pogojem, da je cena delnice padla.

Rešitev:
Ko vrednotimo pogojno terjatev s pomočjo ekvivalentne martingalske verjetnosti, diskontiramo vsa izplačila in določimo pričakovano vrednost

$$\widetilde{X}_0 = E_Q(\widetilde{X}).$$

stanje	S_t	$X_t = S_t \cdot 1_{\{S_t < S_{t-1}\}}$	Q
uu	116.64	0	$\frac{4}{9}$
ud	97.2	97.2	$\frac{2}{9}$
du	97.2	0	$\frac{2}{9}$
dd	81	81	$\frac{1}{9}$
u	108	0	$\frac{2}{3}$
d	90	90	$\frac{1}{3}$

$$X_0 = \frac{90}{1.02} \cdot \frac{1}{3} + \frac{97.2}{1.02^2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{81}{1.02^2} \cdot \frac{1}{9} = 58.8235$$

2. Obravnavamo dvoobdobni model trga, na katerem trgujemo z dvema enotskima brezkuponskima obveznicama. Prva brezkuponska obveznica ima dospetje 1 in ceno $0 < D(0,1) < 1$. Druga ima dospetje 2 in ob času 0 ceno $0 < D(0,2) < 1$. Njena cena v času 1 je lahko $D(1,2)_u$ (če obrestna mera pade) ali $D(1,2)_d$ (če obrestna mera naraste), kjer je $0 < D(1,2)_d < D(1,2)_u < 1$.

   (a) Naričite drevo dogodkov, ki pripada opisanemu trgu.

   Rešitev:

$$B^1 :\ D(0,1) \text{ —— } 1$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & D(1,2)_u \arrow[r, dash] & 1 \\
B^2 : D(0,2) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & D(1,2)_d \arrow[r, dash] & 1
\end{tikzcd}$$

   (b) Določite omejitve za $D(0,1)$, $D(0,2)$, $D(1,2)_u$ in $D(1,2)_d$, pod katerimi je trg brez arbitraže, in izračunajte do prihodnosti nevtralno verjetnost.

   Rešitev:

   Izbrati moramo numerar. Ker mora biti definiran v celotnem modelu, vzamemo obveznico B^2. Obravnavamo 3 enoobdobne modele:

   u : Obstaja le en instrument, ki je numerar, in le eno stanje.

$$c = D(1,2)_u, \quad M = 1 \quad \Rightarrow \quad q_3 = 1$$

   Ker je končno izplačilo pozitivno, mora biti $D(1,2)_u > 0$.

   d : Obstaja en instrument in eno končno stanje.

$$c = D(1,2)_d, \quad M = 1 \quad \Rightarrow \quad q_4 = 1$$

   Zaradi pozitivnostiizplačil ob koncu, mora biti $D(1,2)_d > 0$.

$t = 0$: Imamo dva instrumenta in dve možni stanji ob koncu

$$c = \begin{bmatrix} D(0,1) \\ D(0,2) \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & D(1,2)_u \\ 1 & D(1,2)_d \end{bmatrix}$$

Numerar je druga obveznica

$$\widetilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{D(0,1)}{D(0,2)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D(1,2)_u} & 1 \\ \frac{1}{D(1,2)_d} & 1 \end{bmatrix}$$

Za q_1 in q_2 mora veljati

$$\frac{D(0,1)}{D(0,2)} = \frac{1}{D(1,2)_u}\, q_1 + \frac{1}{D(1,2)_d}\, q_2 1 \qquad\qquad = q_1 + q_2$$

$$q_1 = \frac{\frac{D(0,1)}{D(0,2)} - \frac{1}{D(1,2)_d}}{\frac{1}{D(1,2)_u} - \frac{1}{D(1,2)_d}}$$

$$q_2 = \frac{\frac{1}{D(1,2)_u} - \frac{D(0,1)}{D(0,2)}}{\frac{1}{D(1,2)_u} - \frac{1}{D(1,2)_d}}$$

Veljati mora še $q_1, q_2 > 0$. Ker je

$$D(1,2)_u > D(1,2)_d$$

sta imenovalca negativna. Zato morata biti tudi števca negativna.

$$\frac{D(0,1)}{D(0,2)} - \frac{1}{D(1,2)_d} < 0 \quad \text{in} \quad \frac{1}{D(1,2)_u} - \frac{D(0,1)}{D(0,2)} < 0$$

$$\frac{D(0,1)}{D(0,2)} < \frac{1}{D(1,2)_d} \quad \text{in} \quad \frac{1}{D(1,2)_u} < \frac{D(0,1)}{D(0,2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{D(1,2)_u} < \frac{D(0,1)}{D(0,2)} < \frac{1}{D(1,2)_d}$$

Skupni pogoj:

$$0 < D(1,2)_d < \frac{D(0,2)}{D(0,1)} < D(1,2)_u$$

(c) Ali je opisani trg poln?

Rešitev:

Vse prehodne verjetnosti q_i so ob danih pogojih singletoni, zato je trg poln.

(d) Naj bo $R(0,1,2)$ terminska obrestna mera v času 0 za obdobje $[1,2]$. Kako se $R(0,1,2)$ izraža z $D(0,1)$ in $D(0,2)$?

Rešitev:

Za diskontne faktorje velja enakost

$$D(0,2) = D(0,1,2) \cdot D(0,1)$$

$$D(0,2) = \frac{1}{1+R(0,1,2)} \cdot D(0,1)$$

$$R(0,1,2) = \frac{D(0,1)}{D(0,2)} - 1$$

(e) Naj bo $D(1,2)_u = \frac{1}{1+R(1,2)_u}$ in $D(1,2)_d = \frac{1}{1+R(1,2)_d}$. Izrazite pogoj za neobstoj arbitraže z uporabo $R(0,1,2)$, $R(1,2)_u$ in $R(1,2)_d$.

Rešitev:

Pogoj za neobstoj arbitraže:

$$0 < D(1,2)_d < \frac{D(0,2)}{D(0,1)} < D(1,2)_u < 1$$

$$0 < \frac{1}{1+R(1,2)_d} < \frac{1}{1+R(0,1,2)} < \frac{1}{1+R(1,2)_u} < 1$$

$$1 < 1+R(1,2)_u < 1+R(0,1,2) < 1+R(1,2)_u$$

$$0 < R(1,2)_u < R(0,1,2) < R(1,2)_d$$

Binomski model trga

(Domača naloga)

Podjetje (delniška družba) v času 0 izda (tvegano) brezkuponsko obveznico (*defaultable zero-coupon bond*) z dospetjem T in nominalno vrednostjo N. Privzemite, da podjetje ob izdaji obveznice nima drugih neplačanih dolgov in da do časa T ne bo izdalo novih dolžniških vrednostnih papirjev.

Naj bo v času t, $0 \leq t \leq T$, vrednost podjetja V_t, vrednost obveznice pa P_t^{dZCB}. Skupna vrednost delnic podjetja je zato $E_t = V_t - P_t^{\text{dZCB}}$.

Ob dospetju obveznice v času T se lahko zgodi naslednje:

Solventnost (*plačilna sposobnost*) Če je $V_T \geq N$, lastniki obveznice skupaj prejmejo nominalno vrednost N, delničarjem podjetja pa ostane preostanek vrednosti podjetja.

Insolventnost (*plačilna nesposobnost*) Če je $V_T < N$, lastniki obveznice skupaj prejmejo vrednost V_T, delničarji pa ostanejo brez vsega (*absolute priority rule*[1])

(a) Zapišite izplačila, do katerih so upravičeni delničarji in obvezničarji v času T, kot funkcijo vrednosti podjetja V_T.

(b) Pokažite, da položaj obvezničarjev lahko predstavimo kot portfelj, ki vsebuje ali dolgo pozicijo v premoženju podjetja in kratko pozicijo v opciji, ali dolgo pozicijo v netvegani brezkuponski obveznici in kratko pozicijo v opciji. Natančno opredelite vse uporabljene instrumente.

(c) Privzemite, da vrednost podjetja lahko opišete z binomskim modelom. Če je vrednost podjetja v trenutku t enaka V_t, je v trenutku $t+1$ vrednost lahko le $V_t u$ ali $V_t d$, kjer je $0 < d < u$ in $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Naj bo obdobna netvegana obrestna mera na bančnem računu enaka R, kjer je $d < 1 + R < u$. Določite začetno ceno obveznice P_0^{dZCB}.

(d) Izračunajte P_0^{dZCB} pri $T = 10$, $V_0 = 100$, $u = 1.15$, $d = 0.92$, $R = 5\%$ in različnih vrednostih N: $N_1 = 50$, $N_2 = 60$ in $N_3 = 70$.

[1] Absolute priority rule določa vrstni red upnikov in terjatev v primeru insolventnosti podjetja (prisilna poravnava, stečaj). Upniki imajo prednost pred lastniki.

Binomski model trga

(Rešitve nalog)

(a) Označimo izplačilo obvezničarjev ob dospetju obveznice s P_T^{dZCB}. Ker je obveznica tvegana, $P_T^{\text{dZCB}} \not\equiv N$, ampak je končna vrednost obveznice odvisna od takratne vrednosi podjetja. Velja

$$P_T^{\text{dZCB}} = \begin{cases} N; & V_T \geq N \\ V_T; & V_T < N \end{cases} = \min\{V_T, N\}$$

Izplačilo delničarjev (le v primeru, da v času T svoje delnice prodajo) bo znašalo

$$E_T = \begin{cases} V_T - N; & V_T \geq N \\ 0; & V_T < N \end{cases} = \max\{V_T - N, 0\}.$$

Očitno je položaj delničarjev ekvivalenten dolgi poziciji v evropski nakupni opciji na premoženje podjetja z zapadlostjo T in izvršilno ceno N.

(b) Računamo

$$\min\{V_T, N\} = V_T + \min\{0, N - V_T\} = V_T - \max\{0, V_T - N\}$$

in ugotovimo, da je položaj obvezničarjev ekvivalenten dolgi poziciji v premoženju podjetja in kratki poziciji v evropski nakupni opciji na premoženje podjetja z zapadlostjo T in izvršilno ceno N.

(c) Vrednost podjetja V_t modeliramo z binomskim modelom s T obdobji in parametri V_0, u, d in R. Pri vrednotenju tvegane brezkuponske obveznice bomo uporabili samo končna izplačila

$$P_T^{\text{dZCB}} = \min\{V_T, N\},$$

zato zadostuje, če možna končna stanja prikažemo s tabelo.

Privzemimo, da je $V_0 d^T < N < V_0 u^T$. Stolpcu cen in izplačil dodamo še stolpec do tveganja nevtralnih verjetnosti Q. Te izračunamo s pomočjo do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti

$$q = \tfrac{1+R-d}{u-d},$$

ki je neodvisna od časa in stanja.

Stanje	Vrednost podjetja V_T	Izplačilo P_T^{dZCB}	Verjetnost Q
u^T	$V_0 u^T$	N	q^T
$u^{T-1}d$	$V_0 u^{T-1} d$	N	$T q^{T-1}(1-q)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u^{n+1}d^{T-n-1}$	$V_0 u^{n+1} d^{T-n-1}$	N	$\binom{T}{n+1} q^{n+1}(1-q)^{T-n-1}$
$u^n d^{T-n}$	$V_0 u^n d^{T-n}$	$V_0 u^n d^{T-n}$	$\binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ud^{T-1}	$V_0 u d^{T-1}$	$V_0 u d^{T-1}$	$T q (1-q)^{T-1}$
d^T	$V_0 d^T$	$V_0 d^T$	$(1-q)^T$

Število n je največje naravno število, za katerega je

$$V_0 u^n d^{T-n} \leq N.$$

Rešimo neenačbo

$$V_0 d^T (\tfrac{u}{d})^n \leq N$$

$$(\tfrac{u}{d})^n \leq \tfrac{N}{V_0 d^T}$$

$$n \ln \tfrac{u}{d} \leq \ln \tfrac{N}{V_0 d^T}$$

$$n \leq \frac{\ln \frac{N}{V_0 d^T}}{\ln \frac{u}{d}} = \frac{\ln N - \ln(V_0 d^T)}{\ln u - \ln d}$$

Pri tem smo upoštevali, da je naravni logaritem strogo naraščajoča funkcija, zato logaritmiranje ohranja (smeri) neenakosti. Nato upoštevamo še, da je $u > d$ in zato $\frac{u}{d} > 1$ in $\ln \frac{u}{d} > 0$. Deljenje z izrazom $\ln \frac{u}{d}$ zato prav tako ohranja neenakosti.
Največji ustrezni n je

$$n = \left\lfloor \frac{\ln N - \ln(V_0 d^T)}{\ln u - \ln d} \right\rfloor.$$

Cena tvegane brezkuponske obveznice je tako

$$P_0^{\mathrm{dZCB}} = \tfrac{1}{(1+R)^T} \, \mathrm{E}_Q(P_T^{\mathrm{dZCB}}) =$$

$$= \tfrac{1}{(1+R)^T} \left(\textstyle\sum_{j=0}^{n} V_0 u^j d^{T-j} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} + \sum_{j=n+1}^{T} N \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{(1+R)^T} \left(V_0 \textstyle\sum_{j=0}^{n} \binom{T}{j} u^j q^j d^{T-j} (1-q)^{T-j} + N \sum_{j=n+1}^{T} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \right)$$

Posebej še omenimo možnosti, ko $N \leq V_0 d^T$ in $N \geq V_0 u^T$. V prvem primeru vrednost podjetja vselej presega nominalno vrednost obveznice, zato je obveznica v resnici netvegana in obvezničarji zanjo ob izdaji plačajo $P_0^{\mathrm{dZCB}} = \frac{N}{(1+R)^T}$.

V drugem primeru je vrednost podjetja vselej manjša od nominalne vrednosti obveznice, zato je podjetje plačilno nesposobno in obvezničarji ob dospetju prejmejo V_T. V tem primeru so ob izdaji za obveznico pripravljeni plačati $P_0^{\mathrm{dZCB}} = V_0$.

(d) Pri danih podatkih najprej izračunamo $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1.05-0.92}{1.15-0.92} = \frac{13}{23}$ in uporabimo formulo iz (c).

(i) $n = 0$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 30.6947$.
(ii) $n = 1$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 36.8214$.
(iii) $n = 2$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 42.9158$.

Če obveznica ne bi bila tvegana, bi bilo $P_0^{\mathrm{ZCB}} = \frac{N}{(1+R)^T}$ in bi dobili

(i) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 30.6957$.
(ii) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 36.8348$.
(iii) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 42.9739$.

Nizke cene obveznic so posledica visokih obrestnih mer, vpliv tveganosti na ceno je pri danih podatkih zelo majhen.

12. BLACK-SCHOLESOVA FORMULA

1. Na delnico s trenutno ceno S_0 in volatilnostjo σ napišemo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo T in izvršilno ceno K. Naj bo netvegana moč obresti danes in v prihodnje enaka Y in naj bo c premija opcije, določena z Black-Scholesovo formulo.

   (a) Dokažite, da je $\Delta \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial c}{\partial S_0} = \Phi(d_1)$.

   Rešitev:
   Black-Scholesova formula za premijo evropske nakupne opcije je

$$c_0^E = S\Phi(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2),$$

kjer je

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + YT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Izračunamo parcialni odvod

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\Phi'(d_1)\cdot\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-YT}\Phi'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Upoštevamo, da je $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1) + \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\left(S\Phi'(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2)\right)$$

Če pokažemo, da je izraz v oklepaju enak nič, smo dokazali željeno enakost. Pri tem upoštevamo, da je odvod kumulativne porazdelitvene funkcije Φ kar enak gostoti verjetnosti:

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
S\Phi'(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2) &= S\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} - Ke^{-YT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Se^{-\frac{d_1^2}{2}} - Ke^{-YT}e^{-\frac{d_1^2-2\sigma\sqrt{T}d_1+\sigma^2T}{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(S - Ke^{-YT-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{\sigma\sqrt{T}d_1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(S - Ke^{-YT-\frac{\sigma^2T}{2}}e^{\ln\frac{S}{K}+YT+\frac{\sigma^2}{2}T}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(S - K\cdot\frac{S}{K}\right) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial S_0} = \Phi(d_1)$

(b) Dokažite, da je $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 c}{\partial S_0^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sqrt{2\pi}S_0\sigma\sqrt{T}}$

Rešitev:
Upoštevamo enakost iz naloge (a):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} = \\
&= \Phi'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial S} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}\,\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}},
\end{aligned}
$$

kar je željena enakost.

(c) Dokažite, da je premija nakupne opcije naraščajoča in konveksna funkcija parametra S_0.

Rešitev:
Ker sta prvi in drugi parcialni odvod strogo pozitiven, je funkcija naraščajoša in koveksna,

2. Cena delnice danes znaša 55 EUR, netvegana moč obresti pa je konstantna pri 6%. Prihodnjo dinamiko cene delnice lahko modeliramo z Black-Scholesovim modelom s *tendenco* (*drift*) 15% in *nestanovitnostjo/volatilnostjo* (*volatility*) 30%. Na delnico je napisana evropska nakupna opcija z zapadlostjo čez 3 mesece in izvršilno ceno 50 EUR. Delnica v tem obdobju ne bo izplačala dividend.

   (a) Določite opcijsko premijo z uporabo Black-Scholesove formule.

   Rešitev:
   Black-Scholesova formula za premijo evropske nakupne opcije je

$$c_0^E = S\Phi(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2),$$

   kjer je

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + YT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

   V našem primeru je

$$d_1 = \frac{\ln\frac{55}{50} + 0.06\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0.3^2\cdot\frac{1}{4}}{0.3\sqrt{\frac{1}{4}}} = 0.8104 \quad \Rightarrow \quad \Phi(d_1) = 0.7912$$

$$d_2 = 0.8104 - 0.3\sqrt{\frac{1}{4}} = 0.6604 \quad \Rightarrow \quad \Phi(d_2) = 0.7455$$

   Dobimo:

$$c_0^E = 55\cdot 0.7912 - 50e^{-0.06\cdot\frac{1}{4}}\cdot 0.7455 = 6.7982 \text{ EUR}$$

(b) Ocenite opcijsko premijo z uporabo aproksimativnega binomskega modela z mesečnimi obdobji.

Rešitev:

Čas do zapadlosti razdelimo na tri mesečna obdobja. Zato uporabimo binomski model z $n = 3$ obdobji in parametri

$$
\begin{aligned}
R &= e^{\frac{YT}{n}} - 1 = e^{\frac{0.06}{4\cdot 3}} - 1 = 0.5013\% \\
u &= e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{0.3\sqrt{\frac{1}{3\cdot 4}}} = 1.09046 \\
d &= 1/u = 0.91704
\end{aligned}
$$

Za numerar izberemo bančni račun in izračunamo do tveganja nevtralno prehodno verjetnost

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = 0.5073.$$

Možne končne cene delnice, pripadajoča izplačila

$$X_3 = \max\{S_3 - K, 0\}$$

in verjetnosti Q prikažemo s tabelo

stanje	cena delnice S_3	izplačilo X_3	verjetnost$Q$
u^3	$S_0 u^3 = 71.3168$	21.3168	$q^3 = 0.13054$
$u^2 d$	$S_0 u^2 d = 59.9752$	9.9752	$3q^2(1-q) = 0.38038$
ud^2	$S_0 u d^2 = 50.4372$	0.4372	$3q(1-q)^2 = 0.36946$
d^3	$S_0 d^3 = 42.4161$	0	$(1-q)^3 = 0.11962$

Tako dobimo premijo

$$
\begin{aligned}
c_0^E &= \frac{1}{(1+R)^3}\, E_Q(X_3) = \\
&= \frac{21.3168 \cdot 0,13054 + 9.9752 \cdot 0.38038 + 0.4372 \cdot 0.36946}{(1+0.005013)^3} = \\
&= 6.6382 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

(c) Določite Δ z uporabo Black-Scholesove formule ter njeno aproksimacijo z uporabo binomskega modela.

Rešitev:

Iz prve naloge vemo, da je za Black-Scholesov model

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial c}{\partial S_0} = \Phi(d_1) = 0.7912$$

V binomskem modelu je premija v našem primeru enaka

$$c_0^E = \frac{1}{(1+R)^3}\left((S_0u^3 - K)q^3 + (S_0u^2d - K)\cdot 3q^2(1-q) + (S_0ud^2 - K)\cdot 3q(1-q)^2\right)$$

Δ dobimo s parcialnim odvajanjem po S_0

$$\begin{aligned}\Delta_{Bin} &= \frac{1}{(1+R)^3}\left(u^3q^3 + u^2d\cdot 3q^2(1-q) + ud^2\cdot 3q(1-q)^2\right) = \\ &= \frac{1.09046^3\cdot 0.5073^3 + 1.09046^2\cdot 0.91704\cdot 3\cdot 0.5073^2\cdot 0.4927 + 1.09046\cdot 0.91704^2\cdot 3\cdot 0.5073\cdot 0.4927^2}{1.005013^3} = \\ &= 0.9092\end{aligned}$$

3. Na delnico s trenutno ceno S_0 in volatilnostjo σ napišemo opcijo denar ali nič z zapadlostjo T, izvršilno ceno K in izplačilom C. To je finančni instrument, ki lastniku v času T omogoča izplačilo v višini C pod pogojem, da je tedaj cena delnice (strogo) višja od K. Netvegana moč obresti je enaka Y.

   Določite premijo opcije denar ali nič v Black-Scholesovem modelu.

   Rešitev:

   V Black-Sholesovem modelu je cena delnice S_T enaka

$$S_T = S_0 e^H,$$

   kjer je H normalna slučajna spremenljivka s parametri

$$\begin{aligned} E(H) &= YT - \frac{1}{2}\sigma^2 T \\ \mathrm{var}(H) &= \sigma^2 T \end{aligned}$$

   Tedaj je premija opcije denar ali nič z izplačilom $X_T = C \cdot 1_{\{S_T > K\}}$ enaka

$$\begin{aligned} X_0 &= e^{-YT} E(X_T) = \\ &= e^{-YT} E(C \cdot 1_{\{S_T > K\}}) = \\ &= Ce^{-YT} E(1_{\{S_T > K\}}) = \\ &= Ce^{-YT} Q(S_T > K) = \\ &= Ce^{-YT} Q(S_0 e^H > K) = \\ &= Ce^{-YT} Q\left(H > \ln \tfrac{K}{S_0}\right) \end{aligned}$$

   Ker je H normalna slučajna spremenljivka, jo lahko s primerno transformacijo spremenimo v standardno normalno

$$\begin{aligned} X_0 &= Ce^{-YT} Q\left(\frac{H - E(H)}{\sqrt{\mathrm{var} H}} > \frac{\ln \frac{K}{S_0} - E(H)}{\sqrt{\mathrm{var} H}}\right) = \\ &= Ce^{-YT}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{K}{S_0} - YT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right) \end{aligned}$$

   Oziroma, če zapišemo krajše

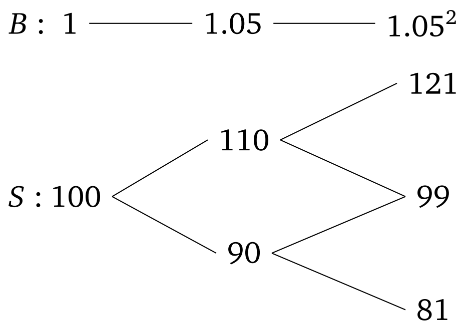
$$X_0 = Ce^{-YT}(1 - \Phi(d)),$$

   kjer je

$$d = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - YT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

13. VEČOBDOBNI MODEL TRGA - pogojne terjatve ameriškega tipa

1. Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model z dvema obdobjema in faktorjema $u = 1.1$ in $d = 0.9$. Danes je delnica vredna 100 EUR, obdobna obrestna mera na netveganem bančnem računu pa znaša 5% in se v prihodnosti ne bo spreminjala.



   (a) Na delnico v trenutku 0 napišemo ameriško prodajno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 102 EUR. Izračunajte njeno premijo in opišite optimalno strategijo izvrševanja.

Rešitev:
Najprej izračunajmo do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1.05-0.9}{1.1-0.9} = \frac{3}{4} \quad \text{in} \quad 1-q = \frac{1}{4}.$$

Pri vrednostenju ameriških terjatev z obratno indukcijo definiramo vrednostni proces

$$\mathscr{U}_T = Z_T$$
$$\mathscr{U}_t = \max\{Z_t, \tfrac{1}{1+R}E(\mathscr{U}_{t+1}|\mathscr{F}_t)\},$$

kjer je Z_t vrednost ob takojšnji izvršitvi, ki jo primerjamo z vrednostjo nadaljevanja.
V našem primeru je

$$Z_t = \max\{102 - S_t, 0\}$$

izplačilo ob izvršitvi (notranja vrednost opcije).

$t = 2$: uu: $Z_{uu} = \max\{102-121, 0\} = 0$
$\mathscr{U}_{uu} = 0$ in ne izvršimo

ud: $Z_{ud} = \max\{102-99, 0\} = 3$
$\mathscr{U}_{ud} = 3$ in izvršimo

dd: $Z_{dd} = \max\{102-81, 0\} = 21$
$\mathscr{U}_{dd} = 21$ in izvršimo

$t = 1$: u: izvršitev: $Z_u = \max\{102 - 110, 0\} = 0$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(0 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4}) = 0.7143$
$\mathscr{U}_u = 0.7143$ in ne izvršimo

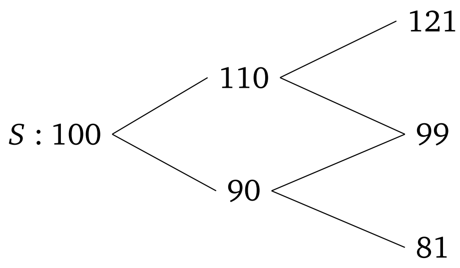
d: izvršitev: $Z_d = \max\{102 - 90, 0\} = 12$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(3 \cdot \frac{3}{4} + 21 \cdot \frac{1}{4}) = 7.1429$
$\mathscr{U}_d = 12$ in izvršimo

$t = 0$: izvršitev: $Z_0 = \max\{102 - 100, 0\} = 2$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(0.7143 \cdot \frac{3}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4}) = 3.3674$
$\mathscr{U}_0 = 3.3674$ in ne izvršimo

Tedaj je premija ameriške prodajne opcije

$$p_0^A = 3.3674 \text{ EUR}.$$

Optimalna strategija izvrševanja



Minimalni čas ustavljanja je slučajni čas $\tau^*_{\min} : \Omega \to \{0, 1, 2\}$ definiran s predpisom

$$\tau^*_{\min} \min\{t \ ; \ \mathscr{U}_t = Z_t\}$$

dogodek	strategija	$\tau^*_{\min}$
uu	ne izvrši	2
ud	izvrši ob 2	2
du	izvrši ob 1	1
dd	izvrši ob 1	1

(b) Za opcijo iz naloge (a) določite izdajateljevo zaščitno strategijo.

Rešitev:

Ker smo že poračunali vrednostni proces, lahko strategijo začnemo računati v času 0.

$t = 0$: $\alpha_0 \cdot 1.05 + \beta_0 \cdot 110 = 0.7143$
$\alpha_0 \cdot 1.05 + \beta_0 \cdot 90 = 12$

$\alpha_0 = 59.7959$
$\beta_0 = -0.5643$
$V_0 = 3.3674$

$t = 1$: u: $\alpha_u \cdot 1.05^2 + \beta_u \cdot 121 = 0$
$\alpha_u \cdot 1.05^2 + \beta_u \cdot 99 = 3$

$\alpha_0 = 14.9660$
$\beta_0 = -0.1364$
$V_0 = 0,7143$

d:
- Kupec izvrši opcijo, mi izplačamo 12, kolikor je vreden naš star portfelj. Nadaljna zaščita ni več potrebna.
- Kupec ne izvrši opcije - ne sledi optimalni strategiji. Pripravimo nov zaščitni portfelj.
  $\alpha_d \cdot 1.05^2 + \beta_d \cdot 99 = 3$
  $\alpha_d \cdot 1.05^2 + \beta_d \cdot 81 = 21$

  $\alpha_d = 92.5170$
  $\beta_0 = -1$
  $V_0 = 7.1429$
  Naš stari portfelj je vreden 12. Od tega 7.1429 porabimo za gradnjo novega portfelja, 4.8571 pa potrošimo. Ne glede na kupćevo strategijo, imamo vedno dovolj denarja, da izplačamo pogojno terjatev.

Če seštejemo diskontirane vrednosti izplačil ob optimalnem času ustavljanja; dobimo

$$\frac{12}{1.05} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{1.05^2} \cdot 34\frac{1}{4} = 3.3673$$

(c) Na isto delnico hkrati napišemo še ameriško nakupno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 102 EUR. Izračunajte njeno premijo in opišite optimalno strategijo izvrševanja.

Rešitev:

Za ameriško nakupno opcijo velja

$$Z_t = \max\{S_t - 102, 0\}.$$

$t = 2$: uu: $Z_{uu} = \max\{121 - 102, 0\} = 19$
$\mathscr{U}_{uu} = 19$ in izvršimo

ud: $Z_{ud} = \max\{99 - 102, 0\} = 0$
$\mathscr{U}_{ud} = 0$ in ne izvršimo

dd: $Z_{dd} = \max\{81 - 102, 0\} = 0$
$\mathscr{U}_{dd} = 0$ in ne izvršimo

$t = 1$: u: izvršitev: $Z_u = \max\{110 - 102, 0\} = 8$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(19 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}) = 13.5714$
$\mathscr{U}_u = 13.5714$ in ne izvršimo

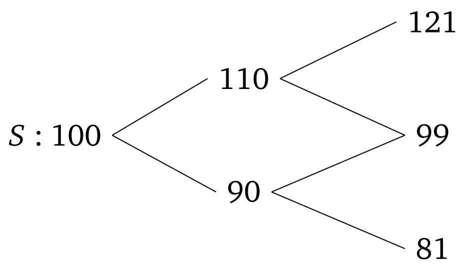
d: izvršitev: $Z_d = \max\{90 - 102, 0\} = 0$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(0 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}) = 0$
$\mathscr{U}_d = 0$ in ne izvršimo

$t = 0$: izvršitev: $Z_0 = \max\{100 - 102, 0\} = 0$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(13.5714 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}) = 9.6939$
$\mathscr{U}_0 = 9.6939$ in ne izvršimo

Tedaj je premija ameriške nakupne opcije

$$c_0^A = 9.6939 \text{ EUR}.$$

Optimalna strategija izvrševanja



Ameriške nakupne opcije se nikoli ne splača izvršiti pred zapadlostjo.

dogodek	strategija	$\tau^*_{\min}$
uu	izvrši ob 2	2
ud	ne izvrši	2
du	ne izvrši	1
dd	ne izvrši	1

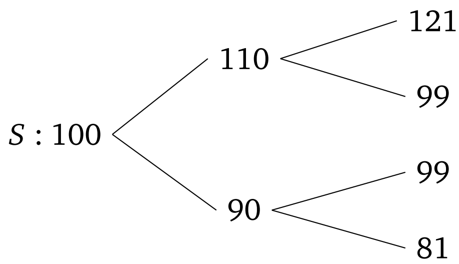
(d) Določite premijo ameriške pogojne terjatve z zapadlostjo 2, ki ob izvršitvi v času $t \in \{1,2\}$ izplača $S_t - S_{t-1}$, oziroma ne izplača ničesar, če jo izvršimo v trenutku 0. Izvršitev pogojne terjatve ni obvezna.

Rešitev:

Ameriška opcija na razliko

$$Z_t = \max\{S_t - S_{t-1}, 0\} = (S_t - S_{t-1}) \cdot 1_{\{S_t > S_{t-1}\}}.$$

Ker je izplačilo odvisno od poti, ne združujemo vozlišč.



$t = 2$: uu: $Z_{uu} = \max\{121 - 110, 0\} = 11$
$\mathcal{U}_{uu} = 11$ in izvršimo

ud: $Z_{ud} = \max\{99 - 110, 0\} = 0$
$\mathcal{U}_{ud} = 0$ in nr izvršimo

du: $Z_{du} = \max\{99 - 90, 0\} = 9$
$\mathcal{U}_{ud} = 9$ in izvršimo

dd: $Z_{dd} = \max\{81 - 90, 0\} = 0$
$\mathcal{U}_{dd} = 0$ in ne izvršimo

$t = 1$: u: izvršitev: $Z_u = \max\{110 - 100, 0\} = 10$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(11 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}) = 7.8571$
$\mathcal{U}_u = 10$ in izvršimo

d: izvršitev: $Z_d = \max\{90 - 100, 0\} = 0$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(9 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}) = 6.4286$
$\mathcal{U}_d = 6.4286$ in ne izvršimo

$t = 0$: izvršitev: $Z_0 = 0$
nadaljevanje : $\frac{1}{1.05}(10 \cdot \frac{3}{4} + 6.4286 \cdot \frac{1}{4}) = 8.6735$
$\mathcal{U}_0 = 8.6735$ in ne izvršimo

Tedaj je premija ameriške opcije na razliko

$$X_0^A = 8.6735 \text{ EUR}.$$

Optimalna strategija izvrševanja

dogodek	strategija	$\tau^*_{\min}$
uu	izvrši ob 1	1
ud	izvrši ob 1	1
du	izvrši ob 2	2
dd	ne izvrši	2

Maksimalni optimalni čas ustavljanja

Pri nalogah (a) in (c) bomo določili še maksimalni optimalni čas ustavljanja.

(a) Diskontiramo notranje vrednosti

$$\widetilde{Z}_t = \frac{1}{(1+R)^t}\, Z_t$$

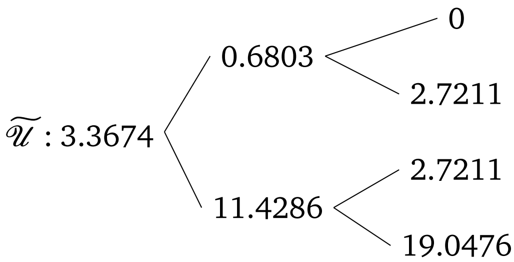
Definiramo Snellovo ovojnico procesa $\widetilde{Z}_t$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{U}_T} &= \widetilde{Z}_T \\ \widetilde{\mathcal{U}_t} &= \max\{\widetilde{Z}_t, E_Q(\widetilde{Z}_{t+1}|\mathcal{F}_t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 2:\ uu&:\ \widetilde{\mathcal{U}_{uu}} = 0 \\ ud&:\ \widetilde{\mathcal{U}_{ud}} = \tfrac{3}{1.05^2} = 2.7211 \\ dd&:\ \widetilde{\mathcal{U}_{dd}} = \tfrac{21}{1.05^2} = 19.0476 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 1:\ u&:\ \widetilde{\mathcal{U}_u} = \max\{0, 0\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{1.05^2}\cdot\tfrac{1}{4}\} = \tfrac{3}{1.05^2}\cdot\tfrac{1}{4} = 0.6803 \\ d&:\ \widetilde{\mathcal{U}_d} = \max\{\tfrac{12}{1.05}, \tfrac{3}{1.05^2}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{21}{1.05^2}\cdot\tfrac{1}{4}\} = \tfrac{12}{1.05} = 11.4286 \end{aligned}$$

$$t = 0:\ \widetilde{\mathcal{U}_0} = \max\{2, \tfrac{3}{1.05^2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{12}{1.05}\cdot\tfrac{1}{4}\} = 3.3674$$



Doobov razcep nam pove, da lahko diskontirani vrednostni proces opcije $\widetilde{\mathcal{U}_t}$ zapišemo kot vsoto martingala M_t in napovedljivega procesa A_t.

$$\widetilde{\mathcal{U}_t} = M_t + A_t$$

$$\begin{aligned} M_0 &= \widetilde{\mathcal{U}_0} \qquad & M_{t+1} &= M_t + \widetilde{\mathcal{U}_{t+1}} - E_Q(\widetilde{\mathcal{U}_{t+1}}|\mathcal{F}_t) \\ A_0 &= 0 \qquad & A_{t+1} &= A_t - \widetilde{\mathcal{U}_t} + E_Q(\widetilde{\mathcal{U}_{t+1}}|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 3.3674 \\ A_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + \widetilde{\mathcal{U}_1} - E_Q(\widetilde{\mathcal{U}_1}|\mathcal{F}_0) = M_0 + \widetilde{\mathcal{U}_1} - M_0 = \widetilde{\mathcal{U}_1} \\ A_1 &= 0 \end{aligned}$$

$M_2 = M_1 + \widetilde{\mathscr{U}_2} - E(\widetilde{\mathscr{U}_2}|\mathscr{F}_1)$

$$
\begin{aligned}
M_{uu} &= \frac{3}{1.05^2}\cdot\frac{1}{4} + 0 - \frac{3}{1.05^2}\cdot\frac{1}{4} = 0\\
M_{ud} &= \frac{3}{1.05^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{1.05^2} - \frac{3}{1.05^2}\cdot 14 = 2.7211\\
M_{du} &= \frac{12}{1.05} + \frac{3}{1.05^2} - \frac{3}{1.05^2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{21}{1.05^2}\cdot\frac{1}{4} = 7.3469\\
M_{dd} &= \frac{12}{1.05} + \frac{21}{1.05^2} - \frac{3}{1.05^2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{21}{1.05^2}\cdot\frac{1}{4} = 23.6735
\end{aligned}
$$

$A_2 = \widetilde{\mathscr{U}_2} - M_2$

$$
M : 3.3674 \begin{cases} 0.6803 \begin{cases} 0 \\ 2.7211 \end{cases} \\ 11.4286 \begin{cases} 7.3469 \\ 23.6735 \end{cases} \end{cases}
$$

$$
A : 0 \begin{cases} 0 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \\ 0 \begin{cases} -4.6258 \\ -4.6258 \end{cases} \end{cases}
$$

Maksimalni optimalni čas ustavljanja definiramo kot

$$
\tau^*_{\max} = \begin{cases} \min\{t : A_{t+1} < 0\} & \text{, če tak } t \text{ obstaja} \\ T & \text{, sicer} \end{cases}
$$

dogodek	$\tau^*_{\min}$	$\tau^*_{\max}$
uu	2	2
ud	2	2
du	1	1
dd	1	1

Dobimo: $\tau^*_{\min} = \tau^*_{\max}$

(c) Diskontirani vrednostni proces

$$
\widetilde{\mathscr{U}} : 9,6939 \begin{cases} 12.9252 \begin{cases} 17.2336 \\ 0 \end{cases} \\ 0 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}
$$

Doobov razcep

$M_0 = \widetilde{\mathscr{U}}_0 = 9.6939$

$A_0 = 0$

$M_1 = M_0 + \widetilde{\mathscr{U}}_1 - E_Q(\widetilde{\mathscr{U}}_1 | \mathscr{F}_0) = M_0 + \widetilde{\mathscr{U}}_1 - M_0 = \widetilde{\mathscr{U}}_1$

$A_1 = 0$

$M_2 = M_1 + \widetilde{\mathscr{U}}_2 - E(\widetilde{\mathscr{U}}_2 | \mathscr{F}_1)$

$$
\begin{aligned}
M_{uu} &= 12.9252 + 17.2336 - 12.9252 = 17.2336 \\
M_{ud} &= 12.9252 + 0 - 12.9252 = 0 \\
M_{du} &= 0 + 0 - 0 = 0 \\
M_{dd} &= 0 + + - 0
\end{aligned}
$$

$A_2 = \widetilde{\mathscr{U}}_2 - M_2$

$$
M : 9,6939 \begin{cases} 12.9252 \begin{cases} 17.2336 \\ 0 \end{cases} \\ 0 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}
$$

$$
A : 0 \begin{cases} 0 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \\ 0 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}
$$

$\tau^*_{\max} = 2$ po definiciji

dogodek	$\tau^*_{\min}$	$\tau^*_{\max}$
uu	2	2
ud	2	2
du	1	2
dd	1	2