Nika Novak

Študijsko gradivo

FINANČNA MATEMATIKA 3

Naloge iz teorije obrestnih mer

Ljubljana, 2023

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

1. Model Ho - Lee

   Na trgu so podane cene brezkuponskih obveznic $P(0,t)$ z nominalno vrednostjo 1 in zapadlostjo t za vse $t = 0,1,2,\dots,T$. Z $P(t,T,x)$ označimo ceno brezkuponske obveznice v času t z nominalno vrednostjo 1, zapadlostjo T in stanju, kjer je cena v času od 0 do t padla x-krat. Razvoj cene je podan z

   $$P(t,T,x) = \begin{cases} u(T-t+1)\,\frac{P(t-1,T,x)}{P(t-1,t,x)} \\ d(T-t+1)\,\frac{P(t-1,T,x-1)}{P(t-1,t,x-1)} \end{cases}$$

   Tedaj na trgu ni arbitraže, če je $d(t) < 1 < u(t)$.

   Do tveganja nevtralna prehodna verjetnost za dvig cene obveznice je enaka

   $$q = \frac{1-d(2)}{u(2)-d(2)}.$$

   Za $k := \dfrac{d(2)}{u(2)}$ velja $\dfrac{d(T)}{u(T)} = k^{T-1}$.

   Izrazi $u(T)$ in $d(T)$ z do tveganja nevtralno verjetnostjo q in k.

   Rešitev:

   Vemo, da velja tudi

   $$q = \frac{1-d(T)}{u(T)-d(T)}.$$

   Ker je $u(T) = \frac{d(T)}{k^{T-1}}$, je

   $$\begin{aligned} q\,\frac{d(T)}{k^{T-1}} - q\,d(T) &= 1 - d(T) \\ d(T)\left(\frac{q}{k^{T-1}} - q + 1\right) &= 1 \\ d(T) &= \frac{k^{T-1}}{q+(1-q)k^{T-1}} \end{aligned}$$

   in

   $$u(T) = \frac{1}{q+(1-q)k^{T-1}}.$$

2. Na trgu so dane cene brezkuponskih obveznic z nominalno vrednostjo 1 in zapadlostjo T

T	1	2	3	4
$P(0,T)$	0.94	0.90	0.87	0.84

   Vemo še, da bo v času 1 cena brezkuponske obveznice $P(1,2)$ enaka 0.94 ali 0.965.

   a) Določi $P(t,4,x)$ za vse čase t in vsa stanja x.

   b) Nariši binomsko drevo za cene obveznice $P(t,4)$ in za obrestno mero $R(t,4)$ pri zveznem obrestovanju.

Rešitev:

a) Najprej izračunajmo parametre modela. Ker sta podani $P(1,2,0) = 0.965$ in $P(1,2,1) = 0.94$, lahko iz enakosti

$$P(1,2,0) = u(2)\,\frac{P(0,2,0}{P(0,1,0)} \quad \text{in} \quad P(1,2,1) = d(2)\,\frac{P(0,2,0}{P(0,1,0)}$$

izračunamo

$$u(2) = P(1,2,0)\,\frac{P(0,1)}{P(0,2)} = 1.007889$$
$$d(2) = P(1,2,1)\,\frac{P(0,1)}{P(0,2)} = 0.981778$$

Tedaj je

$$q = \frac{1-d(2)}{u(2)-d(2)} = 0.6979$$
$$k = \frac{d(2)}{u(2)} = 0.974093$$

S pomočjo enačb, ki smo jih izpeljali v nalogi 1 lahko poračunamo

T	2	3	4
$u(T)$	1.007889	1.015694	1.023414
$d(T)$	0.981778	0.963749	0.945917

Oglejmo si sedaj cene brezkuponske obveznice z zapadlostjo 4.

$t=0$: $P(0,4) = P(0,4,0) = 0.84$ je podana na trgu.

$t=1$: $P(1,4,0) = u(4)\frac{P(0,4,0)}{P(0,1,0)} = 0.914540$
$P(1,4,1) = d(4)\frac{P(0,4,0)}{P(0,1,0)} = 0.845287$

$t=2$: $P(2,4,0) = u(3)\frac{P(1,4,0)}{P(1,2,0)} = 0.962583$
$P(2,4,1) = u(3)\frac{P(1,4,1)}{P(1,2,1)} = d(3)\frac{P(1,4,0)}{P(1,2,0)} = 0.913355$
$P(2,4,2) = d(3)\frac{P(1,4,1)}{P(1,2,1)} = 0.866644$

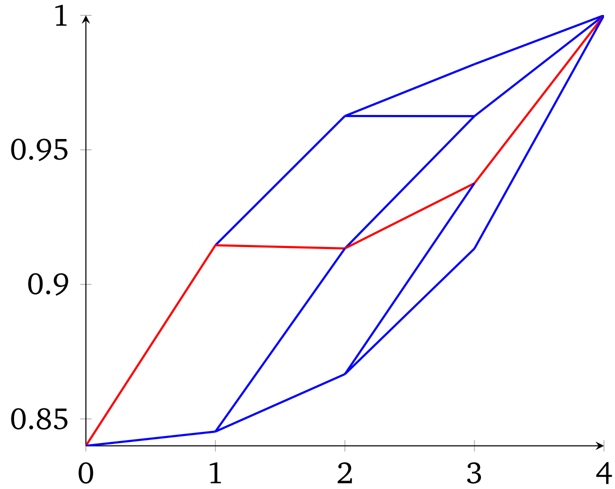
$t=3$: $P(3,4,0) = u(2)\frac{P(2,4,0)}{P(2,3,0)}$
Za izračun potrebujemo $P(2,3,0)$ in za izračun te cene, potrebujemo še $P(1,3,0)$. Tako moramo najprej izračunati cene $P(t,3,x)$
$P(1,3,0) = u(3)\frac{P(0,3,0)}{P(0,1,0)} = 0.940057$
$P(1,3,1) = d(3)\frac{P(0,3,0)}{P(0,1,0)} = 0.891980$

$P(2,3,0) = u(2)\frac{P(1,3,0)}{P(1,2,0)} = 0.981838$
$P(2,3,1) = u(2)\frac{P(1,3,1)}{P(1,2,1)} = d(2)\frac{P(1,3,0)}{P(1,2,0)} = 0.956401$
$P(2,3,2) = d(2)\frac{P(1,3,1)}{P(1,2,1)} = 0.931624$

$$P(3,4,0) = 0.981838$$
$$P(3,4,1) = u(2)\frac{P(2,4,1)}{P(2,3,1)} = 0.962525$$
$$P(3,4,2) = u(2)\frac{P(2,4,2)}{P(2,3,2)} = 0.937589$$
$$P(3,4,3) = d(2)\frac{P(2,4,2)}{P(2,3,2)} = 0.913299$$

$t = 4$: $P(4,4,x) = 1$

$P(t,4,x)$



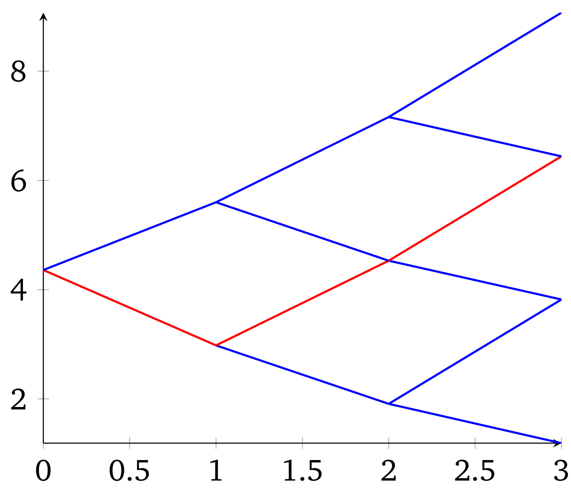
b)

Iz enakosti $P(t,4) = 1e^{-(4-t)R(t,4)}$ izpeljemo

$$R(t,4) = -\frac{1}{4-t}\ln P(t,4).$$

$x \setminus t$	0	1	2	3
0	4.36 %	2.98 %	1.91 %	1.19 %
1		5.60 %	4.53 %	3.82 %
2			7.16 %	6.44 %
3				9.07 %

$R(t,4,x)$



3. Na trgu so dane cene brezkuponskih obveznic z nominalno vrednostjo 1 in zapadlostjo T

T	1	2	3	4	5	6
$P(0,T)$	0.96	0.92	0.87	0.82	0.77	0.73

Cene obveznic zadoščajo Ho - Leejevem binomskem modelu z $u(2) = 1.01$ in $d(2) = 0.96$.

a) Določi do tveganja nevtralno prehodno verjetnost q.

b) Izračunaj $u(T)$ in $d(T)$ za $T = 3, 4, 5, 6$.

c) Na brezkuponsko obveznico z ročnostjo 3 napišemo evropsko prodajno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 0.96. Izračunaj ceno opcije.

d) Poišči izvedbeno strategijo, ki ima enaka izplačila kot prodajna opcija, z obveznico z dospetjem 3.

e) Na obveznico z zapadlostjo 3 napišemo nakupno opcijo z izročitveno ceno $K = 0.94$ in zapadlostjo $T = 2$. Njena cena je $c_0 = 0.02$. Ali je na trgu možna arbitraža? Če je, poišči arbitražno strategijo.

Rešitev:

a) $q = \dfrac{1 - d(2)}{u(2) - d(2)} = \dfrac{1 - 0.96}{1.01 - 0.96} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

b) Iz enačb $k = \frac{d(2)}{u(2)}$, $u(T) = \frac{1}{q + (1-q)k^{T-1}}$, $d(T) = u(T)k^{T-1}$ dobimo

T	2	3	4	5	6
$u(T)$	1.01	1.019692	1.029078	1.038162	1.046945
$d(T)$	0.96	0.921231	0.883686	0.87353	0.812219

Opazimo, da za vsak T velja $d(T) < 1 < u(T)$.

c) Ker je opcija napisana na obveznico z ročnostjo 3 in je čas zapadlosti opcije 2, je izplačilna funkcija
$$p_2^E = \max\{0.96 - P(2,3), 0\}.$$
Najprej izračunajmo vrednosti $P(2,3,x)$ za $x = 0, 1, 2$.

$P(0,1) = 0.96$

$P(0,2) = 0.92$

$P(1,2,0) = u(2)\,\frac{P(0,2)}{P(0,1)} = 0.967917$

$P(1,2,1) = d(2)\,\frac{P(0,2)}{P(0,1)} = 0.92$

$P(0,3) = 0.87$

$P(1,3,0) = u(3)\,\frac{P(0,3)}{P(0,1)} = 0.924096$

$P(1,3,1) = d(3)\,\frac{P(0,3)}{P(0,1)} = 0.834866$

$P(2,3,0) = u(2)\,\frac{P(1,3,0)}{P(1,2,0)} = 0.964273$

$P(2,3,1) = d(2)\,\frac{P(1,3,0)}{P(1,2,0)} = u(2)\,\frac{P(1,3,1)}{P(1,2,1)} = 0.916530$

$P(2,3,2) = d(2)\,\frac{P(1,3,1)}{P(1,2,1)} = 0.871165$

Tedaj za prodajno opcijo velja

stanje	izplačilo p_2	verjetnost	diskontni faktor
u^2	0	q^2	$P(0,1)P(1,2,0)$
ud	0.04347	$q(1-q)$	$P(0,1)(P(1,2,0)+P(1,2,1))$
d^2	0.0888	$(1-q)^2$	$P(0,1)P(1,2,1)$

$$p_0 = 0 \cdot q^2 P(0,1)P(1,2,0) + 0.04347q(1-q)P(0,1)(P(1,2,0)+P(1,2,1)) + \\ + 0.0888(1-q)^2 P(0,1)P(1,2,1)$$
$$p_0 = 0.015743$$

d) u : Iščemo portfelj $\Theta_u = \alpha_u P(1,2,0) + \beta_u P(1,3,0)$, za katerega velja

$$\alpha_u \cdot 1 + \beta_u P(2,3,0) = 0$$
$$\alpha_u \cdot 1 + \beta_u P(2,3,1) = 0.04347$$

Rešitev sistema je $\alpha_u = 0.878023$ in $\beta_u = -0.910557$. Izračunajmo še vrednost portfelja

$$V_u = \alpha_u P(1,2,0) + \beta_u P(1,3,0) = 0.008411.$$

d: Iščemo portfelj $\Theta_d = \alpha_d P(1,2,1) + \beta_d P(1,3,1)$, za katerega velja

$$\alpha_d \cdot 1 + \beta_d P(2,3,1) = 0.04347$$
$$\alpha_d \cdot 1 + \beta_d P(2,3,2) = 0.0888$$

Rešitev sistema je $\alpha_d = 0.959293$ in $\beta_u = -0.999228$. Vrednost portfelja je

$$V_d = \alpha_d P(1,2,1) + \beta_d P(1,3,1) = 0.048328.$$

$t = 0$: Iščemo portfelj $\Theta_d = \alpha_0 P(0,1) + \beta_0 P(0,3)$, za katerega velja

$$\alpha_0 \cdot 1 + \beta_0 P(1,3,0) = 0.008411$$
$$\alpha_0 \cdot 1 + \beta_0 P(1,3,1) = 0.048328$$

Rešitev sistema je $\alpha_0 = 0.421805$ in $\beta_0 = -0.447350$. Vrednost portfelja je

$$V_0 = \alpha_0 P(0,1) + \beta_0 P(0,3) = 0.015738 \approx p_0.$$

e) Izplačilo evropske nakupne opcije ob času zapadlosti je

$$c_2 = \max\{P(2,3) - K, 0\} = \begin{bmatrix} 0.024273 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cena opcije v času 0 bi tako morala biti enaka

$$c_0 = 0.024273q^2 P(0,1)P(1,2,0) = 0.014435 \neq 0.02.$$

Zato je na trgu možna arbitraža.

Arbitražna strategija:

$t = 0$: prodam opcijo
kupim portfelj Θ_0
$U_0 = 0.02 - 0.014435 > 0$

$t = 1$: prodam Θ_0 (v u in d)
kupim portfelj Θ_u ozr Θ_d
$U_1 = 0$

$t = 2$: prodam Θ_u ozr Θ_d
izplačam opcijo
$U_2 = 0$

4. Binomski model

Binomski model je podan z enoobdobnimi netveganimi obrestnimi merami. Naj $r(t)$ označuje netvegano obrestno mero med t in $t+1$. Model je podan z začetno netvegano obrestno mero $r(0)$, dinamiko

$$r(t+1) = r(t) \pm \delta,$$

za neko konstanto δ, in do tveganja nevtralno prehodno verjetnostjo q, ki pove, kakšna je verjetnost, da je $r(t+1) > r(t)$.

Naj bo $r(0) = 0.05$, $P(0,2) = 0.909407$ in

$$r(t+1) = r(t) + (2I(t+1) - 1) \cdot 0.01,$$

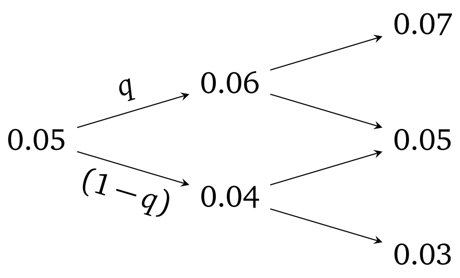
kjer je $I(t+1) = \begin{cases} 1 & ; r(t+1) > r(t) \\ 0 & ; r(t+1) < r(t). \end{cases}$

a) Izračunaj $P(0,3)$.

b) Na $P(t,3)$ napišemo nakupno opcijo z zapadlostjo $T = 2$ in izvršilno ceno $K = 0.95$. Izračunaj ceno opcije v predhodnih časih ($t = 0, 1$).

Rešitev:

Za obrestno mero tedaj velja



a) Oglejmo si cene brezkuponskih obveznic $P(0,T)$.:
$P(0,1) = e^{-r(0)} = e^{-0.05} = 0.951229$

$P(0,2) = [qP(1,2,1) + (1-q)P(1,2,0)]e^{-r(0)}$
$P(1,2,1) = e^{-(r(0)+\delta)} = e^{-0.06} = 0.941765$
$P(1,2,0) = e^{-(r(0)-\delta)} = e^{-0.04} = 0.966789$
Ker poznamo $P(0,2)$, lahko izračunamo verjetnost q.

$$q = \frac{P(0,2)e^{r(0)} - P(1,2,0)}{P(1,2,1) - P(1,2,0)} = 0.25$$

$P(0,3) = [qP(1,3,1) + (1-q)P(1,3,0)]e^{-r(0)}$
$P(1,3,1) = [qP(2,3,2) + (1-q)P(2,3,1)]e^{-0.06}$
$P(1,2,0) = [qP(2,3,1) + (1-q)P(2,3,0)]e^{-0.04}$
$P(2,3,2) = e^{-(r(0)+2\delta)} = e^{-0.07} = 0.932394$
$P(2,3,1) = e^{-r(0)} = e^{-0.05} = 0.951229$
$P(2,3,0) = e^{-(r(0)-2\delta)} = e^{-0.03} = 0.970446$
$\Rightarrow P(1,3,1) = 0.891400$ in $P(1,3,0) = 0.927778$
$\Rightarrow P(0,3) = 0.873878$

b) $C(2,x) = \max\{P(2,3,x) - K, 0\} = \begin{cases} 0 & ; x = 2 \\ 0.001229 & ; x = 1 \\ 0.020446 & ; x = 0 \end{cases}$

$C(1,1) = (qC(2,2) + (1-q)C(2,1))e^{-0.06} = 0.000868$
$C(1,0) = (qC(2,1) + (1-q)C(2,0))e^{-0.04} = 0.015028$

$C(0) = (qC(1,1) + (1-q)C(1,0))e^{-0.05} = 0.010928$
Če razpišemo ceno opcije v času 0, dobimo

$$\begin{aligned} C(0) =& C(2,2)q^2e^{-0.06}\,e^{-0.05} + C(2,1)q(1-q)e^{-0.06}\,e^{-0.05} + \\ &+ C(2,1)(1-q)qe^{-0.04}\,e^{-0.05} + C(2,0)(1-q)^2e^{-0.04}\,e^{-0.05} \end{aligned}$$

5. Dan je binomski model z $r(0) = 0.06, \delta = 0.01$ in $q = P(r(t+1) = r(t) + 0.01) = 0.5$.

   Brezkuponsko obveznico na vpoklic (*callable bond*) z nominalno vrednostjo 100 EUR in časom zapadlosti 4 lahko izdajatelj odpokliče ob časih $t = 1,2,3$ po ceni $100\,e^{-0.055(4-t)}$.

   Izračunaj ceno običajne obveznice in ceno obveznice na vpoklic ob času 0.

   Rešitev:

   Narišimo najperj binomsko drevo za obrestne mere:

$$
\begin{tikzcd}
& & & 0.09 \\
& & 0.08 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& 0.07 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0.07 \\
0.06 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "(1-q)"'] & & 0.06 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& 0.05 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0.05 \\
& & 0.04 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & 0.03
\end{tikzcd}
$$

Vemo, da je $P(4,4,x) = 100$ za vsa stanja x. Cene obveznice izračunamo kot v nalogi 4 in dobimo binomsko drevo

$$
\begin{tikzcd}
& & & 91.3931 \arrow[r] & 100 \\
& & 85.2186 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 81.0787 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 93.2394 \arrow[r] & 100 \\
78.7197 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "(1-q)"'] & & 88.6965 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 86.0923 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 95.1229 \arrow[r] & 100 \\
& & 92.3163 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & & 97.0446 \arrow[r] & 100
\end{tikzcd}
$$

Oglejmo si še obveznico na vpoklic.

$V(4,x) = 100 \quad x = 0,1,2,3,4$

$V(3,x) = \max\{100e^{-0.055(4-3)}, e^{-r(3,x)}(qV(4,x+1) + (1-q)V(4,x))\}$

$V(3,3) = \min\{100e^{-0.055}, 100e^{-0.09}\} = \min\{94.6485, 91.3931\} = 91..3931$

$V(3,2) = \min\{94.6485, 93.2394\} = 93.2394$

$V(3,1) = \min\{94.6485, 95.1229\} = 94.6485$ odpoklic

$V(3,0) = \min\{94.6485, 97.0446\} = 94.6485$ odpoklic

$V(2,x) = \max\{100e^{-0.055(4-2)}, e^{-r(2,x)}(qV(3,x+1) + (1-q)V(3,x))\}$

$V(2,2) = \min\{89.5834, 85.2186\} = 85.2186$

$V(2,1) = \min\{89.5834, \underbrace{e^{-0.06}(\frac{1}{2}\,93.2394 + \frac{1}{2}\,94.6485)}_{88.4731}\} = 88.4731$

$V(2,0) = \min\{89.5834, \underbrace{e^{-0.04}\,94.6485}_{90.9373}\} = 89.5834$ odpoklic

$V(1,x) = \max\{100e^{-0.055(4-1)}, e^{-r(1,x)}(qV(2,x+1) + (1-q)V(2,x))\}$

$V(1,1) = \min\{84.7894, 80.9745\} = 80.9745$

$$V(1,0) = \min\{84.7894, 84.6863\} = 84.6863$$

$$V(0) = e^{-r(0)}(qV(1,1) + (1-q)V(1,0)) = 78.0067$$

Narišimo še drevo za obveznico na odpoklic

$$\begin{tikzcd}
 & & & 91.3931 \arrow[r] & 100 \\
 & & 85.2186 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & 80.9745 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 93.2394 \arrow[r] & 100 \\
78.0067 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "(1-q)"'] & & 88.4731 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & 84.6863 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{94.6485} \arrow[r] & 100 \\
 & & \boxed{89.5834} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & & \boxed{94.6485} \arrow[r] & 100
\end{tikzcd}$$

Opazimo, da je $V(t,x) \leq P(t,x)$.

6. Dan je binomski model obrestnih mer $r(0) = 0.06, r(n+1) = r(n) + 0.005(1-2I_{n+1})$ in $q = 0.4$.

   a) Poišči cene obveznic z zapadlostmi $T = 1,2,3,4$ ob času 0.

   b) Poišči nominalno obrestno mero letnih kuponov ρ_4 za kuponsko obveznico z zapadlostjo 4 in ceno enako nominalni vrednosti.

   c) Zamenjava SWAP je pogodba trajajoča T let, v kateri investitor A (*payer*) plača fiksno obrestno mero R^* ob času $t = n+1$, v zameno B (*receiver*) izplača spremenljivo obrestno mero $R_n = e^{r(n)} - 1$.

      i. Za $T = 4$ pokaži, da je vrednost SWAP-a enaka 0, če je $R^* = \rho_4$.

      ii. Naj bo $R^* = 0.06$. Kakšna je vrednost pogodbe za investitorja, ki vplačuje fiksno obrestno mero?

   d) Opcijska zamenjava SWAPTION da investitorju A, ki plačuje fiksno obrestno mero, pravico (in ne obveze), da ob času T (ko se prične SWAP - pride do prve zamenjave obveznic) vstopi v SWAP.

      Izračunaj ceno opcijske zamenjave v času 0, če je prvi čas zamenjave $T = 1$, navidezna glavnica $\widetilde{N} = 1$, $R^* = 0.06$ in časi zamenjav $t = 1,2,3,4$

   e) Zamenljiva brezkuponska obveznica (*convertible zero-coupon bond*) z zapadlostjo 3 investitorju ponuja možnost, da ob času 2 zamenja eno zamenljivo obveznico za 1.06 navadne brezkuponske obveznice, ki ima čas zapadlosti 4. Drugače ob času 3 izplača 1.

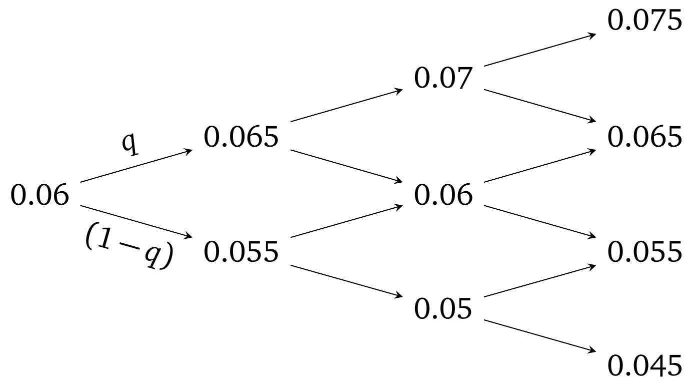
      i. Poišči vrednost obveznic ob času 2.

      ii. Izračunaj vrednost zamenljive obveznice v času 0.

iii. Poišči izvedbeno strategijo med časoma 0 in 2, ki ima enake vrednosti kot zamenljiva obveznica. Pri tem uporabi obveznico z zapadlostjo 3 in netvegani račun na trgu.

Rešitev:

Binomsko drevo obrestnih mer



a) Uporabimo enak postopek kot v nalogi 4, da dobimo
$P(0,1) = 0.941765$
$P(0,2) = 0.887818$
$P(0,3) = 0.837830$
$P(0,4) = 0.791494$

b) Kuponsko obveznico lahko zapišemo kot vsoto brezkuponskih obveznic

$$CB_1 + CB_2 + CB_3 + (N+C)B_4,$$

kjer je $C = \rho_4 N$ letni kupon in B_i brezkuponska obveznica z zapadlostjo i.
Tedaj je cena kuponske obveznice enaka

$$P = N = \rho_4 NP(0,1) + \rho_4 NP(0,2) + \rho_4 NP(03) + (N + \rho_4 N)P(0,4).$$

$$\rho_4 = \frac{1 - P(0,4)}{P(0,1) + P(0,2) + P(0,3) + P(0,4)} = 0.060281$$

c) (i) Ker jo izplačilo v času $t = n+1$ enako $N(n+1-n)(R^* - R_n)$, je vrednost SWAP-a v času 0 enaka

$$\begin{aligned} V(0) =& N(R^* - R_0)P(0,1) + N(R^* - R_1)P(0,2) \\ &+ N(R^* - R_2)P(0,3) + N(R^* - R_3)P(0,4) \end{aligned}$$

Če je $V(0) = 0$, lahko izrazimo

$$R^* \sum_{n=1}^{4} P(0,n) = R_0 P(0,1) + R_1 P(0,2) + R_2 P(0,3) + R_3 P(0,4).$$

Za obrestne mere velja

$R_0 = e^{r(0)} - 1 = \dfrac{1}{P(0,1)} - 1$

$P(0,n+1) = P(0,n)e^{-r(n)} \quad \Rightarrow \quad R_n = e^{r(n)} - 1 = \dfrac{P(0,n)}{P(0,n+1)} - 1$

Zato je

$$
\begin{aligned}
R^* \sum_{n=1}^{4} P(0,n) = & \left(\frac{1}{P(0,1)} - 1\right) P(0,1) + \left(\frac{P(0,1)}{P(0,2)} - 1\right) P(0,2) \\
& + \left(\frac{P(0,2)}{P(0,3)} - 1\right) P(0,3) + \left(\frac{P(0,3)}{P(0,4)} - 1\right) P(0,4) = \\
& = 1 - P(P(0,1) + P(0,1) - P(0,2) + P(0,2) - P(0,3) + P(0,3) - P(0,4) = \\
& = 1 - P(0,4)
\end{aligned}
$$

Tako je

$$R^* = \frac{1 - P(0,4)}{P(0,1) + P(0,2) + P(0,3) + P(0,4)} = \rho_4.$$

(ii) Vrednost pogodbe za invetitorja A je

$$
\begin{aligned}
V_0^A &= \sum_{n=1}^{4} \widetilde{N}(R_n - R^*)P(0,n) = \\
&= \widetilde{N} \sum_{n=1}^{4} (R_n - \rho_4 + \rho_4 - R^*)P(0,n) = \\
&= \widetilde{N} \sum_{n=1}^{4} (R_n - \rho_4)P(0,n) + \widetilde{N} \sum_{n=1}^{4} (\rho_4 - R^*)P(0,n) = \\
&= \widetilde{N}(\rho_4 - R^*) \sum_{n=1}^{4} P(0,n) = \\
&= 0.000972\widetilde{N}
\end{aligned}
$$

d) Oglejmo si izplačila in vrednos SWAPa za investitorja A v posameznem obdobju.

$t = 4$: izplačila: $0.015, 0.005, -0.005, -0.015$

$t = 3$: $V(3,3) = 0.015e^{-0.075}$
$V(3,2) = 0.005e^{-0.065}$
$V(3,1) = -0.005e^{-0.055}$
$V(3,0) = 0.015e^{-0.045}$
$+$ izplačila: $0.01, 0, -0.01$

$t = 2$: $V(2,2) = (qV(3,3) + (1-q)V(3,2) + 0.01)\, e^{-0.07}$
$V(2,1) = (qV(3,2) + (1-q)V(3,1) + 0)\, e^{-0.06}$

$V(2,0) = (qV(3,1) + (1-q)V(3,0) - 0.01)\, e^{-0.05}$
+ izplačili: 0.005, −0.005

$t = 1$: $V(1,1) = (qV(2,2) + (1-q)V(2,1) + 0.005)\, e^{-0.065} = 0.010597$
$V(1,0) = (qV(2,1) + (1-q)V(2,0) + 0)\, e^{-0.055} = -0.016150$

A izvrši opcijo, če je $V(1,x) \geq 0$. Zato je $W_1 = \max\{V(1,x), 0\}$ in vrednost SWAPTIONa v času 0 je

$$W_0 = (qV(1,1) + (1-q)\cdot 0)e^{-0.06} = 0.003992.$$

Pogodba ima lahko v kasnejših obdobjih tudi negativna izplačila za investitorja A.

e) (i) Vrednosti brezkuponskih obveznic v času 2:

$P(2,3,2) = 0.932394$ $\quad$ $P(2,4,2) = 0.870238$
$P(2,3,1) = 0.941765$ $\quad$ $P(2,4,1) = 0.887819$
$P(2,3,0) = 0.951229$ $\quad$ $P(2,4,0) = 0.905753$

Zamenljiva obveznica:

$V(2,2) = \max\{P(2,3,2), 1.06P(2,4,2)\} =$
$= \max\{0.932394, 0.922452\} = 0.932394$ ne menjamo

$V(2,1) = \max\{P(2,3,1), 1.06P(2,4,1)\} =$
$= \max\{0.941765, 0.941088\} = 0.941765$ ne menjamo

$V(2,0) = \max\{P(2,3,0), 1.06P(2,4,0)\} =$
$= \max\{0.951229, 0.960098\} = 0.960098$ zamenjamo

(ii) $V(1,1) = (qV(2,2) + (1-q)V(2,1))e^{-0.065} = 0.878985$
$V(1,0) = (qV(2,1) + (1-q)V(2,0))e^{-0.055} = 0.901778$
$\Rightarrow \quad V(0) = (qV(1,1) + (1-q)V(1,0))e^{-0.06} = 0.840676$

Opazimo, da je $P(0,3) = 0.837830 < V(0)$.

(iii) Sestavimo portfelje iz obveznice z zapadlostjo 3 in obveznic $P(t,t+1,x) = e^{-r(t,x)}$, ki so ob čsasiu t netvegana naložba.

$t = 1, x = 1$: kupimo portfelj $\alpha_1 P(1,2,1) + \beta_1 P(1,3,1)$
v času $t = 2$ je vrednost portfelja

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot 1 + \beta_1 P(2,3,2) &= V(2,2) \\ \alpha_1 \cdot 1 + \beta_1 P(2,3,1) &= V(2,1) \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $\alpha_1 = 0$ in $\beta_0 = 1$. Vrednost portfelja je $P(1,3,1)$

$t = 1, x = 0$: kupimo portfelj $\alpha_0 P(1,2,0) + \beta_0 P(1,3,0)$
v času $t = 2$ je vrednost portfelja

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot 1 + \beta_0 P(2,3,1) &= V(2,1) \\ \alpha_0 \cdot 1 + \beta_0 P(2,3,0) &= V(2,0) \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $\alpha_0 = -0.882574$ in $\beta_0 = 1.937149$.
Vrednost portfelja je

$$\alpha_0 P(1,2,0) + \beta_0 P(1,3,0) = 0.901778$$

$t = 0$: kupimo portfelj $\alpha P(0,1) + \beta P(0,3)$
v času $t = 1$ je vrednost portfelja

$$\alpha \cdot 1 + \beta P(1,3,1) = V(1,1) = P(1,3,1)$$
$$\alpha \cdot 1 + \beta P(1,3,0) = V(1,0) = 0.901778$$

Rešitev sistema je $\alpha = -0.249349$ in $\beta_0 = 1.283679$.
Vrednost portfelja v času 0 je

$$V(0) = \alpha P(0,1) + \beta P(0,3) = 0.840676$$

$t = 2$: $x = 2: \ P(2,3,2) = V(2,2)$

$x = 1: \ P(2,3,1) = V(2,1)$

$x = 0: \ 1.06\, P(2,4,0) = V(2,0)$

$t = 3$: Če ni prišlo do zamenjave, obveznica zapade in izplača 1.
Če je prišlo do zamenjave, ostane portfelj nespremenjen.

7. Terminski posli in terminske pogodbe

- Terminski posli = forward agreements

$$K = \widetilde{f}(t,S,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,S)}$$

- Terminske pogodbe = future agreements

$$f(t,S,T) = E_Q[P(S,T)|\mathscr{F}_t]$$

Obravnavamo model obrestnih mer podan s slučajnim sprehodom $r(0) = 0.05, \delta = 0.01$ in $q = 0.6$. Izračunaj izročitveni ceni terminske pogodbe in terminskega posla z zapadlostjo $S = 2$, kjer kupimo obveznico z zapadlostjo $T = 3$.

Rešitev:

Terminski posel:

Izračunamo ceni obveznic $P(0,2) = 0.903073$ in $P(0,3) = 0.855765$. Tedaj je

$$K = \frac{P(0,3)}{P(0,2)} = 0.947614.$$

Terminska pogodba:

$t = 2$: Terminska obrestna mera v času 2 je kar enaka ceni obveznice, saj je $t = T$

x	$r(2)$	$P(2,3,x)$	$f(2,2,3,x) = P(2,3,x)$
2	0.07	0.932394	0.932394
1	0.05	0.951229	0.951229
0	0.03	0.970446	0.970446

$t = 1$: f je martingal, zato je $f(1,2,3;x) = E_Q[f(2,2,3;x)|\mathscr{F}_t]$

$$x = 1: \quad f(1,2,3;1) = 0.6f(2,2,3;2) + 0.4f(2,2,3;1) = 0.939928$$

$$x = 0: \quad f(1,2,3;0) = 0.6f(2,2,3;1) + 0.4f(2,2,3;0) = 0.958916$$

$t = 1: \quad f(0,2,3) = 0.6f(1,2,3;1) + 0.4f(2,2,3;0) = 0.947523$

8. Model Heath - Jarrow - Morton

HJM je model terminskih obrestnih mer. Naj bo

$$f_{k,j} = F(k, k+j, k+j+1)$$

terminska obrestna mera določena v času k za eno obdobje, ki se bo začelo čez j korakov. Za realne funkcije u_1, v_1, u_2, v_2 in parametre $a_i, b_i \in \{0,1\}$ je podan model terminskih obrestnih mer

$$\begin{aligned} f_{k,j} := f_{0,k+j} &+ \sum_{i=1}^{k} (a_i[u_1(i,k+j) - v_1(i,k+j)] + v_1(i,k+j)) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} (b_i[u_2(i,k+j) - v_1(i,k+j)] + v_2(i,k+j)), \end{aligned}$$

kjer so $f_{0,j}$ trenutne terminske obrestne mere podane na trgu.

Ker je

$$f_{1,j} = f_{0,j+1} + a_0[u_1(0,j) - v_1(0,j)] + v_{(}0,j) + b_0[u_2(0,j) - v_2(0,j)] + v_2(0,j),$$

se terminska obrestna mera f v vsakem koraku razvije v štiri možna stanja

$$f_{0,j+1} \quad \begin{cases} f_{0,j+1} + u_1(0,j) + v_1(0,j) \\ f_{0,j+1} + u_1(0,j) + v_2(0,j) \\ f_{0,j+1} + u_2(0,j) + v_1(0,j) \\ f_{0,j+1} + u_2(0,j) + v_2(0,j) \end{cases}$$

Za obrestno mero je

$$\begin{aligned} r_k = f_{k,0} = f_{0,k} &+ \sum_{i=0}^{k} (a_i[u_1(i,k) - v_1(i,k)] + v_1(i,k)) \\ &+ \sum_{i=0}^{k} (b_i[u_2(i,k) - v_1(i,k)] + v_2(i,k)) \end{aligned}$$

Za cena obveznice $P(k,l)$ z zapadlostjo l ob času k velja

$P(k,k)=1$

$P(k,l+1)=P(k,l)\,e^{-F(k,l,l+1)}=P(k,l)\,e^{-f_{k,l-k}}$

$\Rightarrow \quad P(k,l)=e^{-\sum_{j=k}^{l-1}F(k,j,j+1)}=e^{-\sum_{i=0}^{l-k-1}f_{k,i}}$

Oglejmo si še diskontiran proces cene obveznice z zapadlostjo l ob času k

$$\begin{aligned} Z(k,l) &= P(k,l)D_k = \\ &= \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1} f_{k,j}\right)\cdot\exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1} r_j\right) \end{aligned}$$

Vstavimo terminske obrestne mere in obrestne mere

$$\begin{aligned} Z(k,l) = \exp\Bigg(&-\sum_{j=0}^{l-k-1}\Bigg(f_{0,k+j}+\sum_{i=1}^{k}(a_i[u_1(i,k+j)-v_1(i,k+j)]+v_1(i,k+j))+ \\ &+\sum_{i=1}^{k}(b_i[u_2(i,k+j)-v_2(i,k+j)]+v_2(i,k+j))\Bigg) \\ &-\sum_{j=0}^{k-1}\Bigg(f_{0,j}+\sum_{i=1}^{j}(a_i[u_1(i,j)-v_1(i,j)]+v_1(i,j))+ \\ &+\sum_{i=1}^{j}(b_i[u_2(i,j)-v_2(i,j)]+v_2(i,j))\Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

V prvi del vstavimo $k+j=n$ in zamenjamo vrstni red seštevanja.

$$\begin{aligned} Z(k,l) = \exp\Bigg(&-\sum_{j=0}^{l-1}f_{0,j}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=k}^{l-1}(a_i[u_1(i,n)-v_1(i,n)]+v_1(i,n))- \\ &-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(a_i[u_1(i,j)-v_1(i,j)]+v_1(i,j))-\cdots\Bigg) \end{aligned}$$

Zdaj lahko združimo vrste

$$\begin{aligned} Z(k,l) = \exp\Bigg(&-\sum_{j=0}^{l-1}f_{0,j}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{l-1}(a_i[u_1(i,j)-v_1(i,j)]+v_1(i,j))- \\ &-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{l-1}(b_i[u_2(i,j)-v_2(i,j)]+v_2(i,j))\Bigg) \end{aligned}$$

in krajše zapišemo

$$\begin{aligned} Z(k,l) = Z(k-1,l)\ \exp\Bigg(&-\sum_{j=k}^{l-1}(a_k[u_1(k,j)-v_1(k,j)]+v_1(k,j))- \\ &-\sum_{j=k}^{l-1}(b_k[u_2(k,j)-v_2(k,j)]+v_2(k,j))\Bigg) \end{aligned}$$

Na trgu ni bo arbitraže natano tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost Q, za katero je $E_Q[Z(k,l)] = E_Q[Z(k-1,l)]$, t.j.

$$q_{00}(k)\exp\left(-\sum_{j=1}^{l-1}[v_1(k,j)+v_2(k,j)]\right)+q_{01}(k)\exp\left(-\sum_{j=1}^{l-1}[v_1(k,j)+u_2(k,j)]\right)+$$
$$+q_{10}(k)\exp\left(-\sum_{j=1}^{l-1}[u_1(k,j)+v_2(k,j)]\right)+q_{11}\exp\left(-\sum_{j=1}^{l-1}[u_1(k,j)+u_2(k,j)]\right)=1$$

9. Oglejmo si proces terminskih obrestnih mer z enim slučajnim šokom.

$$f_{k,j} := f_{0,k+j} + \sum_{i=1}^{k}(a_i[u(i,k+j)-v(i,k+j)]+v(i,k+j))$$

Kaj velja za cene brezkuponskih obveznic v HJM modelu, kjer so $b_i = 0$?

Rešitev:

Vemo, da je

$$\begin{aligned} P(k,k) &= 1 \\ P(k,l) &= e^{-F(k,l-1,l)}P(k,l-1) = \exp\left(-\sum_{j=k}^{l-1}F(k,j,j+1)\right) = \\ &= \exp\left(-\sum_{j=k}^{l-1}f_{k,j-k}\right) = \exp\left(-\sum_{i=0}^{l-k-1}f_{k,i}\right) \end{aligned}$$

$P(0,1) = \exp(-f_{0,0})$

$P(0,2) = \exp(-f_{0,0} - f_{0,1})$

$P(1,2) = \exp(-f_{1,0}) = \exp(-f_{0,1} - a_1(u(1,1)-v(1,1)) - v(1,1))$

$\Rightarrow e^{-f_{0,1}} = \frac{P(0,2)}{P(0,1)}$

$$P(1,2) = \frac{P(0,2)}{P(0,1)}\exp(-a_1(u(1,1)-v(1,1))-v(1,1)) = \begin{cases} \frac{P(0,2)}{P(0,1)}e^{-u(1,1)} \\ \frac{P(0,2)}{P(0,1)}e^{-v(1,1)} \end{cases}$$

$P(2,3) = \exp(-f_{2,0}) = \exp(-f_{0,2} - a_1(u(1,2)-v(1,2)) - v(1,2) - a_2(u(2,2)-v(2,2)) - v(2,2))$

$P(1,3) = \exp(-f_{1,0} - f_{1,1})$

$\Rightarrow e^{-f_{1,1}} = \frac{P(1,3)}{P(1,2)} = \exp(-f_{0,2} - a_1(u(1,2)-v(1,2)) - v(1,2))$

$P(2,3) = \frac{P(1,3)}{P(1,2)}\exp(-a_2(u(2,2)-v(2,2))-v(2,2))$

Na trgu ni arbitraže, če velja

$$\begin{aligned} (1-q(1))e^{-v(1,1)} + q(1)e^{-u(1,1)} &= 1 \\ (1-q(2))e^{-v(2,2)} + q(2)e^{-u(2,2)} &= 1 \end{aligned}$$

Če vzamemo $u(i,i) = u(1,1)$ in $v(i,i) = v(1,1)$ za vsak i, potem je $q(i) = q(1) = q$.

Poglejmo si ceno obveznice z zapadlostjo l v času k

$$P(k,l) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1} f_{k,j}\right).$$

$P(k-1,l) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k} f_{k-1,j}\right)$
$P(k-1,k) = \exp(-f_{k-1,0})$

$$\frac{P(k-1,l)}{P(k-1,k)} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{l-k} f_{k-1,j}\right) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1} f_{k-1,j+1}\right) =$$
$$= \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1}\left[f_{0,k+j} + \sum_{i=1}^{k-1}(a_i(u(i,k+j) - v(i,k+j)) - v(i,k+j))\right]\right)$$

Ker je

$$P(k,l) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1}\left[f_{0,k+j} + \sum_{i=1}^{k}(a_i(u(i,k+j) - v(i,k+j)) - v(i,k+j))\right]\right),$$

dobimo zvezo

$$P(k,l) = \frac{P(k-1,l)}{P(k-1,k)} \exp\left(-\sum_{j=0}^{l-k-1}(a_k(u(k,k+j) - v(k,k+j)) - v(k,k+j))\right)$$

10. Naj bo $P(t,T)$ cena brezkuponske obveznice s časom zapadlosti T. Stohastična diferencialna enačba, ki ji zadošča P je enaka

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)\,dt + \sigma(t)P(t,T)\,dW_t,$$

kjer je $r(t)$ netvegana obrestna mera in $\sigma(t,T)$ volatilnost cene $P(t,T)$ in W_t Brownovo gibanje.

Poišči stohastično diferencialno enačbo terminsko obrestno mero $F(t,T_1,T_2)$ in intenzivnost terminske obrestne mere $f(t,T)$.

Rešitev:

Ker za $t < T_1 < T_2$ velja

$$P(t,T_2) = P(t,T_1)e^{-(T_2-T_1)F(t,T_1,T_2)},$$

lahko izrazimo terminsko obrestno mero

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{\ln P(t,T_2) - \ln P(t,T_1)}{T_1 - T_2}.$$

Z uporabo Itôve leme dobimo:

$$d\ln P(t,T_1) = \tfrac{1}{P(t,T_1)}\, r(t)P(t,T_1)\,dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{P^2(t,T_1)}\, P^2(t,T_1)\sigma^2(t)\,dt + \tfrac{1}{P(t,T_1)}\, P(t,T_1)\sigma(t)\,dW_t =$$
$$= \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)\,dW_t.$$

Enako velja za $P(t,T_2)$.

SDE za terminsko obrestno mero je

$$dF(t,T_1,T_2) = \frac{\sigma^2(t,T_2)-\sigma^2(t,T_1)}{2(T_2-T_1)}\,dt - \frac{\sigma(t,T_2)-\sigma(t,T_1)}{T_2-T_1}\,dW_t$$

Intenzivnost terminske obrestne mere je definirana kot

$$f(t,T_1) = \lim_{T_2 \searrow T_1} F(t,T_1,T_2).$$

Tako je SDE za intenzivnost terminske obrestne mere enaka

$$df(t,T) = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\sigma^2(t,T)\right)}{\partial T}\,dt - \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}\,dW_t$$
$$df(t,T) = \sigma(t,T)\,\frac{\partial\sigma}{\partial T}(t,T)\,dt - \frac{\partial\sigma}{\partial T}(t,T)\,dW_t$$

11. Black - Scholes - Merton

Za slučajno spremenljivko V, ki je porazdeljena logaritemsko normalno, je $\ln V \sim N(\mu,\sigma)$. Izračunaj

$$E\left[\max\{V-K,0\}\right].$$

Rešitev:

Ker je $\ln V \sim N(\mu,\sigma)$, je $X = \frac{\ln V-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ in $V = e^{\sigma X+\mu}$. Tedaj je

$$E\left[\max\{V-K,0\}\right] = E\left[\max\{e^{\sigma X+\mu}-K,0\}\right] =$$
$$= \int_{x_1}^{\infty}\left(e^{\sigma x+\mu}-K\right)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{x_1}^{\infty} e^{\sigma x+\mu}\varphi(x)\,dx - \int_{x_1}^{\infty} K\varphi(x)\,dx,$$

kjer je $x_1 = \frac{\ln K-\mu}{\sigma}$ in $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ gostota standardne normalne poradelitve.

Funkcijo v prvem integralu lahko poenostavimo

$$e^{\sigma x+\mu}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-x^2+2\sigma x+2\mu)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-(x-\sigma)^2/2}e^{\mu+\sigma^2/2} = \varphi(x-\sigma)e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Drugi integral izrazimo s komulativno porazdelitveno funkcijo standardne normalne porazdelitve

$$K\int_{x_1}^{\infty}\varphi(x)\,dx = K\left(1-N\left(\tfrac{\ln K-\mu}{\sigma}\right)\right) = KN\left(-\tfrac{\ln K-\mu}{\sigma}\right)$$

Podobno velja za prvi integral

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\varphi(x-\sigma)\,dx = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-N\left(\tfrac{\ln K-\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}N\left(-\tfrac{\ln K-\mu}{\sigma}+\sigma\right)$$

Za V izračunajmo še prva momenta

$$\begin{aligned} E(V) = E(e^{\sigma X+\mu}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x+\mu}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \\ &= \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2}\,dx = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ E(V^2) = E(e^{2\sigma X+2\mu}) &= e^{2\mu+2\sigma^2} \end{aligned}$$

Če logaritmiramo obe enačbi, dobimo $\ln E(V) = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ in $\ln E(V^2) = 2\mu + 2\sigma^2$. Od tod lahko izračunamo

$$\mu = 2\ln E(V) - \frac{1}{2}\ln E(V^2) \quad \text{in} \quad \sigma^2 = \ln E(V^2) - 2\ln E(V)$$

Uporabimo zvezo

$$\mu = \ln E(V) - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

da dobimo

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{\ln K-\mu}{\sigma}+\sigma = \frac{\ln\frac{E(V)}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}+\sigma = \frac{\ln\frac{E(V)}{K}+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \\ d_2 &= -\frac{\ln K-\mu}{\sigma} = d_1-\sigma. \end{aligned}$$

Tako lahko krajše zapišemo

$$E[\max\{V_K,0\}] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}N(d_1) - KN(d_2).$$

12. Funkciji f in g zadoščata stohastičnima deferencialnima enačbama

$$\begin{aligned} df &= \mu_f f\,dt + \sigma_f f\,dW_t \\ dg &= \mu_g g\,dt + \sigma_g g\,dW_t. \end{aligned}$$

Naj bo r do tveganja nevtralna obrestna mera in $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$ cena tržnega tveganja *(market price of risk)*. Naj bo $\lambda = \sigma_g$. Izpelji stohastično diferencialno enačbo za $\frac{f}{g}$ in pokaži, da je martingal.

Rešitev:

V SDE vstavimo $\mu = \lambda\sigma + r$

$$\begin{aligned} df &= (\sigma_g\sigma_f + r)f\,dt + \sigma_f f\,dW_t \\ dg &= (\sigma_g^2 + r)g\,dt + \sigma_g g\,dW_t. \end{aligned}$$

Itôva lema nam pove, da je SDE za funkcijo $G(x,t)$, kjer x zadošča SDE $dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dW_t$, enaka

$$dG = G_t\,dt + G_x a\,dt + G_x b\,dW_t + \frac{1}{2}G_{xx}^2\,dt.$$

Zato po Itôvi lemi velja

$$\begin{aligned} d\ln f &= (\sigma_g\sigma_f + r - \frac{1}{2}\sigma_f^2)\,dt + \sigma_f\,dW_t \\ d\ln g &= (\sigma_g^2 + r - \frac{1}{2}\sigma_g^2)\,dt + \sigma_g\,dW_t. \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo

$$d(\ln f - \ln g) = d\ln\frac{f}{g} = -\frac{1}{2}(\sigma_f - \sigma_g)^2\,dt + (\sigma_f - \sigma_g)\,dW_t$$

in še enkrat uporabimo Itoôvo lemo

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{f}{g}\left(-\frac{1}{2}(\sigma_f - \sigma_g)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{f}{g}(\sigma_f - \sigma_g)^2\right)dt + \frac{f}{g}(\sigma_f - \sigma_g)\,dW_t \\ &== \frac{f}{g}(\sigma_f - \sigma_g)\,dW_t. \end{aligned}$$

Iz SDE vidimo, da je $\frac{f}{g}$ martingal, zato je $\frac{f_0}{g_0} = E^*(\frac{f_T}{g_T})$

13. Blackov model

Za numerara g vzemimo brezkuponsko obveznico z zapadlostjo T. Tedaj je $g_0 = P(0,T)$ in $g_T = P(T,T) = 1$. V nalogi 12 smo dokazali, da je tedaj

$$f_0 = g_0 E^*\left(\frac{f_T}{g_T}\right) = P(0,T)E^*(f_T).$$

Označimo z F_t terminsko ceno osnovnega premoženja (t.j. izročitvena cena za nakup osnovnega premoženja v času T izračunana v času t). Tedaj je

$$F_0 = (B_0 - I(0,T))A(0,T) = \frac{B_0 - I(0,T)}{P(0,T)},$$

kjer je $I(0,T)$ diskontirana vsota vseh kuponov (dividend, stroškov,...) , ki jih med današnjim dnem in zapadlostjo T izplača osnovno premoženje.

Predpostavimo, da je F_T porazdeljena log-normalno, ozr. $\ln F_T \sim N(\mu_F, \sigma_F\sqrt{T})$.

Izpelji ceno evropske nakupne in prodajne opcije napisane na obveznico B.

Rešitev:

Uporabimo formulo, ki smo jo izpeljali v nalogi 11, ter upoštevamo, da je $F_T = B_T$

$$\begin{aligned} c_0^E &= P(0,T)E^*[c_T] = P(0,T)E^*[\max\{B_T - K, 0\}] = \\ &= P(0,T)E^*[\max\{F_T - K, 0\}] = P(0,T)\left[E^*(F_T)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right] \\ c_0^E &= P(0,T)\left[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right], \end{aligned}$$

kjer je

$$d_1 = \frac{\ln \frac{E^*(F_T)}{K} + \sigma_F^2 \frac{T}{2}}{\sigma_F \sqrt{T}} \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

S pomočjo paritetne enačbe lahko izpeljemo še premijo evropske prodajne opcije

$$p_0^E = P(0,T)\left[K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)\right].$$

14. Izračunaj premijo desetmesečne evropske nakupne opcije napisane na 9.75-letno obveznico z izvršilno ceno $K = 1000$ EUR Cena obveznice je $B_0 = 960$ EUR, nominalna vrednost pa je 1000 EUR. Obveznica letno izplača 10% kupone s plačili vsakega pol leta. Kupona v višini 50 EUR bomo dobili čez 3 oziroma 9 mesecev.

    Netvegana obrestna mera za 3 mesece je 9.0%, za 9 mesecev pa 9.5%, za 10 mesecev pa 10%.

    Volatilnost terminske cene je $\sigma_F = 9\%$.

    Rešitev: Za $T = \frac{10}{12}$ izračunamo $P(0,T) = e^{-0.1\cdot\frac{10}{12}} = 0.92$ in $I(0,T) = 50e^{-0.09\cdot\frac{1}{4}} + 50e^{-0.095\cdot\frac{3}{4}} = 95.45$. Tako je terminska cena $F_0 = \frac{B_0 - I(0,T)}{P(0,T)} = 929.68$.

    V nalogi 13 smo pokazali, da je cena evropske nakupne opcije

    $$c_0^E = P(0,T)\left[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right],$$

    kjer je $d_1 = \dfrac{\ln \frac{F_0}{K} + \sigma_F^2 \frac{T}{2}}{\sigma_F \sqrt{T}}$ in $d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{T}$.

    Ker je $d_1 = -0.716$ in $d_2 = -0.798$, je $\Phi(d_1) = 0.2358, \Phi(d_2) = 0.2119$ in

    $$c_0^E = 8.89 \text{ EUR}.$$

15. Kapica (*cap*)

    Izplačila kapice so v v obdobjih $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = T$. Izplačilo v času t_{k+1} je enako

    $$C_k = N\Delta_k \max\{L_k - L, 0\},$$

    kjer je N navidezna glavnica, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ in $L_k = L(t_k, t_{k+1})$ obrestna mera pri navadnem obrestovanju.

    (Posamezno izplačilo se imenuje *caplet*.)

    Določi premijo kapice.

    Rešitev:

Kapico lahko zapišemom kot portfelj opcij na obveznico. Vrednost izplačila C_k v času t_k je enaka

$$\begin{aligned}
C_k D(t_k, t_{k+1}) &= \frac{N\Delta_k}{1+L_k\Delta_k} \max\{L_k - L, 0\} \\
&= \max\left\{\frac{N\Delta_k(L_k - L)}{1+L_k\Delta_k}, 0\right\} \\
&= \max\left\{N\frac{\Delta_k L_k + 1 - 1 - \Delta_k L)}{1+L_k\Delta_k}, 0\right\} \\
&= \max\left\{N - \frac{N(1+\Delta_k L)}{1+L_k\Delta_k}, 0\right\}
\end{aligned}$$

Izplačilo $C_k D(t_k, t_{k+1})$ je enako izplačilu prodajne opcije z izročitveno ceno N napisane na brezkuponsko obveznico z zapadlostjo t_{k+1} in nominalno vrednostjo $N(1+\Delta_k L)$.