VAJE IZ STATISTIKE

Nika Novak

Ljubljana, julij 2020

Naslov: Vaje iz statistike
Avtorica: Nika Novak
1. izdaja
Samozaložba Nika Novak
Dostopno na spletnem naslovu `www.fmf.uni-lj.si/~novakn`

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID=22223619
ISBN 978-961-07-0014-2

Kazalo

Predgovor

Pričujoča zbirka je nastala v študijskih letih od 2016/17 do 2018/19, ko sem vodila vaje pri predmetu Statistika na Fakulteti za matematiko in fiziko, smer Praktična matematika, pri profesorju J. Smrekarju. V njej so zbrane naloge, ki so se pojavile na kolokvijih in izpitih, kakšne pa tudi med poučevanjem.
Želim vam veliko uspeha pri reševanju!

V Ljubljani, julij 2020

Nika Novak

Poglavje 1

Centralni limitni izrek

Če je $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ vsota veliko neodvisnih slučajnih spremenljivk, je porazdelitev S približno normalna $N(\mu, \sigma)$, kjer je

$$\mu = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$\sigma^2 = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)$$

1. Loterija Slovenija proučuje možnost uvedbe nove enostavne spletne igre na srečo s takojšnjim izidom: za eno igro plačate 3 EUR, po vplačilu pa zadanete 10 EUR z verjetnostjo 1/12, 5 EUR z verjetnostjo 1/6, 3 EUR z verjetnostjo 1/3 ter 0 EUR sicer. Oceni verjetnost, da bi imela Loterija Slovenije dobiček pri 1000 vplačanih igrah.

2. Zavarovalnica na trgu ponudi novo zavarovanje. Za težje nezgode izplača 1000 EUR, za lažje pa 50 EUR. Težja nezgoda se zgodi z verjetnostjo $0,05$, lažja pa z verjetnostjo $0,2$. Kakšna naj bo premija za zavarovanje, da zavarovalnica ne bo imela izgube, če proda 500 zavarovanj?

3. Oceni verjetnost, da ob nakupu 100 srečk, ne boš imel izgube, če stane vsaka srečka 1 EUR, dobitek je enak 5 EUR, verjetnost, da srečka zadane pa je $0,1$?

4. Čarovnik med predstavo vleče posamezne karte iz kupa in jih vrača nazaj.

   (a) Čarovnik predlaga naslednjo igro: če izvleče pika, vam plača 5 EUR, če izvleče srce, vam plača 1 EUR, drugače pa ne plača nič. Koliko naj bo vredna igra, da je pričakovana vrednost njegovega zaslužka enaka nič? Upoštevaj, da je v kupu enako število kart različnih barv (pik, križ, srce, karo).

   (b) Oceni verjetnost, da bi čarovnik v 100 odigranih igrah priigral vsaj 10 EUR.

Poglavje 2

Kvantili

Ranžirna vrsta

kvantilni rang $k = Np + \frac{1}{2}$

- $k \geq N \quad \Rightarrow \quad Q_p = X_{(N)}$
- $k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad Q_p = X_{(1)}$
- $1 \leq k \leq N \quad \Rightarrow \quad Q_p = X_{(k)} = X_{([k])} + (k - [k]) \left(X_{([k]+1)} - X_{([k])}\right)$
- $F_{j-1} + 1 \leq k \leq F_j \quad \Rightarrow \quad Q_p = a_{j-1} + \frac{k-(F_{j-1}+1)}{f_j - 1}(a_j - a_{j-1})$

Določimo p, če je Q podan:

- $Q > X_{(N)} \quad \Rightarrow \quad p = 1$
- $Q < X_{(1)} \quad \Rightarrow \quad p = 0$
- $Q = X_{(i)} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\text{št.} X_{(j)} < Q}{N} + \frac{\text{št. } X_{(i)} = Q}{2N}$
- $X_{(i)} < Q < X_{(i+1)} \quad \Rightarrow \quad k = i + \frac{Q - X_{(i)}}{X_{(i+1)} - X_{(i)}}$ in $p = \frac{k - 1/2}{N}$

1. Lastnik lokala je 14 zaporednih sobot beležil porabo piva v litrih:

$$92, 95, 99, 101, 95, 91, 88, 93, 99, 97, 95, 90, 94, 89.$$

Izračunaj cenilki za pričakovano vrednost in varianco porabe. Poišči tretji kvartil.

2. Trgovec je v tednu pred velikonočnimi prazniki opazoval prodajo jajc in barv za pirhe:

število jajc	12	6	18	30	30	42
barve za pirhe	6	1	2	2	5	7

(a) Izračunaj nepristranski cenilki za pričakovani vrednosti in nepristranski cenilki za varianci.

(b) Izračunaj Pearsonov korelacijski koeficient.

Frekvenčna porazdelitev

f_i frekvenca x_i, $F_i = f_1 + \cdots + f_i$ kumulativna frekvenca
kvantilni rang $k = Np + \frac{1}{2}$

- $k \geq N = F_r \quad \Rightarrow \quad Q_p = x_r$
- $k < 1 \quad \Rightarrow \quad Q_p = x_1$
- $[k] > F_{j-1}$ in $[k] + 1 \leq F_j \quad \Rightarrow \quad Q_p = x_j$
- $[k] > F_{j-1}$ in $[k] + 1 > F_j \quad \Rightarrow \quad Q_p = x_j + \frac{k-[k]}{(}x_{j+1} - x_j)$

Določimo p, če je Q podan:

- $Q > x_r \quad \Rightarrow \quad p = 1$
- $Q < x_1 \quad \Rightarrow \quad p = 0$
- $Q = x_j \quad \Rightarrow \quad p = \frac{F_{j-1}}{N} + \frac{f_j}{2N}$
- $x_j < Q < X_{j+1} \quad \Rightarrow \quad k = F_j + \frac{Q-x_j}{x_{j+1}-x_j}$ in $p = \frac{k-1/2}{N}$

3. Po zaključku tečaja so udeležence prosili, naj ocenijo tečaj z oceno od 1 do 5. Med vsemi jih je 5 tečaj ocenilo z oceno 1, 6 z oceno 2, 21 z oceno 3, 14 z oceno 4 in 17 z oceno 5.

(a) Izračunaj pričakovano vrednost in standardni odklon.

(b) Izračunaj mediano in kvartilni razmik.

4. V kinu so spemljaii število obiskovalcev posameznih predstav v enem tednu:

Zvezda je rojena	263
Bohemian Rhapsody	311
Zelena knjiga	159
Stotnica Marvel	573
Izbrisana	405
Pisma iz Benetk	114
Slonček Dumbo	496
Kako izuriti svojega zmaja 3	165
Soba pobega	196

(a) Na podlagi zbranih podatkov so se odločili, da četrtino filmov z najslabšim obiskom ne bodo več vrteli. Kakšno je moralo biti najmanjše število obiskovalcev v zadnjem tednu, da je film ostal na programu tudi v prihodnjih dneh?

(b) Kateri kvantil bi predstavljal film z 200 gledalci?

5. V Rekreacijskem centru Sava oddajajo deset prostorov za piknik. Število oddanih prostorov glede na zunanjo temperaturo je podano s tabelo

T v °C	17	20	26	33	30	23	25	28
število piknikov	1	3	8	9	10	4	6	8

Izračunaj mediano in kvartilni razmik števila oddanih mest.

6. V sirarni prodajajo različno dolgo zorjene sire. Pri tem opazujejo, kako dolžina zorjenja vpliva na prodajo sira.

čas zorjenja v mesecih	2	3	4	5	6	7	8
število prodanih hlebcev sira	8	15	11	26	29	18	18

Izračunaj povprečno vrednost in mediano časa zorjenja prodanih sirov. Največ koliko časa zorijo 85% vseh sirov, ki jih prodajo?

7. Občina je v času poletnih počitnic opazovala obisk lokalnega bazena, ki se je spreminjal glede na povprečno temperaturo zraka

T (v °C)	27	30	34	32	31	25	28	22
število obiskovalcev	45	80	133	140	124	77	95	34

Izračunaj povprečno število obiskovalcev in mediano. Kateri percentil predstavlja 100 obiskovalcev?

Frekvenčna porazdelitev po razredih

disjunktni intervali: $A_1 = [a_0, a_1], A_2 = (a_1, a_2], \ldots, A_r = (a_{r-1}, a_r]$
kvantilni rang $k = Np + \frac{1}{2}$, F_j kumulativne frekvence

- $k \geq N = F_r \quad \Rightarrow \quad Q_p = a_r$
- $k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad Q_p = a_0$
- $F_j \leq k \leq F_j + 1 \quad \Rightarrow \quad Q_p = a_j$
- $F_{j-1} + 1 \leq k \leq F_j \quad \Rightarrow \quad Q_p = a_{j-1} + \frac{k-(F_{j-1}+1)}{f_j - 1}(a_j - a_{j-1})$

8. Družba Jadrolinija je en teden opazovala promet na trajektni linijo na otok Cres. V tabeli je predstavljeno število avtomobilov na posamezni vožnji

število avtomobilov	$0-10$	$11-20$	$21-30$	$31-40$	$41-50$
število voženj	4	10	15	8	3

(a) Izračunaj povprečno število avtomobilov na trajektu.

(b) V podjetju želijo trajekt, ki lahko prepelje 50 avtomobilov, zamenjati z manjšim trajektom za 35 avtomobilov. To bodo storili le v primeru, če bo novi trajekt zadostoval v 90% voženj. Ali bodo trajekt zamenjali? (Namig: Izračunaj 90. percentil.)

9. V Planici se je sestala komisija za določanje zaletne višine na posamični tekmi v smučarskih poletih. V tabeli so predstavljene dolžine skokov v prvem skoku:

dolžina poleta	$190-200$	$200-210$	$210-220$	$220-230$	$230-240$	$240-250$
število skakalcev	4	8	11	13	2	3

(a) Izračunaj povprečno vrednost dolžine poleta.

(b) Komisija bo zaletišče pustila nespremenjeno le v primeru, če bo največ 10% skakalcev preskočilo 235 metrov. Poišči 90. percentil in utemelji odločitev komisije.

10. Podjetje želi posodobiti svoj vozni park. V ta namen pregledajo vsa vozila in njihovo porabo:

poraba na 100 km	$5,5-6$	$6-6,5$	$6,5-7$	$7-8$	$8-9$	$9-11$
število vozil	5	7	8	4	1	2

(a) Izračunaj povprečno porabo vozil podjetja in mediano.

(b) Podjetje želi zamenjati 20% vozil z najvišjo porabo. Kako velika naj bo poraba vozil, ki jih bodo zamenjali?

11. V podjetju so morali zaposleni predčasno sporočiti, koliko dni bodo na počitnicah v avgustu.

število prostih dni	$0-5$	$6-10$	$11-15$	$16-20$	$21-25$	$26-31$
število zaposlenih	6	14	15	5	1	2

(a) Izračunaj povprečno dolžino prostih dni v avgustu, ki jih bojo imeli zaposleni v podjetju.

(b) Zaradi ocene produktivnosti želi vodstvo ugotoviti, največ koliko dni bo odsotnih 80 % zaposlenih. (Izračunaj ustrezen kvantil).

Poglavje 3

Intervali zaupanja

3.1 Binomska slučajna spremenljivka

Clopper - Pearsonov interval zaupanja

Naj bo slučajni vzorec $X_1, X_2, \ldots, X_n$ porazdeljen Bernoullijevo. Interval zaupanja za parameter p pri stopnji zaupanja β je oblike $L(K) \leq p \leq U(K)$, kjer je $K = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

$$L(K) = \begin{cases} F^{-1}_{\mathrm{Beta}(K, n-K+1)}(\frac{1-\beta}{2}) & \text{za } K > 0 \\ 0 & \text{za } K = 0 \end{cases}$$

$$U(K) = \begin{cases} F^{-1}_{\mathrm{Beta}(K+1, n-K)}(\frac{1+\beta}{2}) & \text{za } K < n \\ 1 & \text{za } K = n \end{cases}$$

1. Spomladi v vrtnariji pripravljajo semena in sadike za novo setveno sezono. V vzorcu enajstih semen jih je vzklilo 9. Poišči Clopper-Pearsonov interval zaupanja za verjetnost, da bo seme vzklilo, če je stopnja zaupanja $0,95$.

2. V kampu so izvedli anketo med obiskovalci. Povprašali so jih, kako so zadovoljni s čistočo in prijaznostjo osebja. V vzorcu devetih ljudi jih je 7 odgovorilo, da so s čistočo zadovoljni, s prijaznostjo pa jih je zadovoljnih 5. Poišči interval zaupanja za verjetnot, da bo gost zadovoljen s čistočo in interval zaupanja, da bo gost zadovoljen s prijaznostjo uslužbencev, če je stopnja zaupanja $0,95$.

3. Anketarji so spraševali mimoidoče na ulici, ali so letos odšli na morje. Med enajstimi vprašanimi jih je 8 odgovorilo pritrdilno. Poišči interval zaupanja za delež ljudi, ki so letovali na morju, če je stopnja zaupanja $0,95$.

4. Na festivalu so za posladek prodajali carski praženec in palačinke. Med prvimi devetimi kupci so trije izbrali carski praženec, ostali pa palačinke. Poišči interval zaupanja za delež ljudi, ki so izbrali carski praženec, če je stopnja zaupanja $0,95$.

5. Igralec meče običajno kocko in v desetih metih vrže štirikrat 6. Poišči interval zaupanja za verjetnost, da pri enem metu vrže 6, če je stopnja zaupanja $0,95$.

6. Mladi statistik kupi devet srečk in med njimi sta dve dobitni. Poišči Clopper-Pearsonov interval zaupanja za verjetnost, da je srečka dobitna, če je stopnja zaupanja $0,95$.

7. Anketar na ulici preverja, koliko ljudi ima pameten telefon. Med devetimi mimoidočimi jih 7 odgovori pritrdilno. Poišči interval zaupanja za verjetnost, da ima oseba pameten telefon, če je stopnja zaupanja $0,95$.

8. Na tržnici med nakupovalci sadja izvedejo anketo kaj imajo raje: češnje ali jagode. Med enajstimi vprašanimi so štirje izbrali češnje, ostali pa jagode. Poišči interval zaupanja za delež ljudi, ki imajo raje češnje, če je stopnja zaupanja $0,95$.

9. Jaka je v igralnici opazoval ruleto in opazil, da je v osmih zaporednih igrah šestkrat padla rdeča številka. Poišči interval zaupanja za verjetnost, da pade rdeča številka, če je stopnja zaupanja $0,95$.

10. Čarovnik med predstavo vleče posamezne karte iz kupa in jih vrača nazaj. Med enajstimi izvlečenimi kartami je pet pikov. Poišči Clopper-Pearsonov interval zaupanja za verjetnost, da je izvlečena karta pik, če je stopnja zaupanja $0,95$.

3.2 Pričakovana vrednost normalne slučajne spremenljivke

Interval zaupanja za pričakovano vrednost - normalen vzorec

Naj bo slučajni vzorec $X_1, X_2, \dots, X_n$ porazdeljen normalno. Interval zaupanja za pričakovano vrednost pri stopnji zaupanja β je oblike

σ **znan:**

$$\overline{X} - \Phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + \Phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ **ni znan:**

$$\overline{X} - F^{-1}_{t_{n-1}}(\frac{1+\beta}{2})\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + F^{-1}_{t_{n-1}}(\frac{1+\beta}{2})\frac{S}{\sqrt{n}},$$

kjer je $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$.

1. Starši so za nakup šolskih potrebščin pred pričetkom šolskega leta zapravili

   130, 214, 176, 122, 305, 112, 203, 154 oziroma 197 EUR.

   Predpostavi, da je strošek šolskih potrebščin porazdeljen normalno s standardnim odklonom 20 EUR. Poišči interval zaupanja za povprečni strošek za šolske potrebščine pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$.

2. V kampu so beležili število nočitev, ki jih posamezen gost preživi pri njih:

   20, 3, 7, 14, 3, 10, 5, 17, 8 in 6.

   Predpostavi, da je število nočitev porazdeljeno normalno. Poišči interval zaupanja za povprečno število nočitev pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$.

3. Anica vsako pomlad kupi sadike in semena za svoj vrt. Za to je v zadnjih letih porabila

   115, 95, 150, 89, 73, 93, 110 in 124 EUR.

   Poišči interval zaupanja za povprečje denarja, ki ga potrebuje za zasaditev vrta, pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$, če predpostaviš, da je strošek porazdeljen normalno.

4. Športno društvo je vsak mesec šolskega leta organiziralo turnir na katerega je prišlo

   33, 42, 53, 59, 44, 51, 63, 58, 54 in 55 tekmovalcev.

Predpostavimo, da je število udeležencev turnirja porazdeljeno normalno. Poišči interval zaupanja za povprečno število tekmovalcev pri stopnji zaupanja $\beta = 0,9$.

5. Šolska psihologinja povpraša učence, koliko časa na dan preživijo pred elektronskimi napravami in dobi naslednje odgovore:

$$30, \quad 75, \quad 50, \quad 60, \quad 20, \quad 15, \quad 90, \quad 60 \quad \text{in} \quad 45 \text{ minut.}$$

   Predpostavimo, da je čas, ki ga učenci preživijo pred elektronskimi napravami porazdeljen normalno. Poišči interval zaupanja za povprečen čas pri stopnji zaupanja $\beta = 0,9$.

3.3 Standardni odklon normalne slučajne spremenljivke

Interval zaupanja za varianco - normalen vzorec

Naj bo slučajni vzorec $X_1, X_2, \ldots, X_n$ porazdeljen normalno. Interval zaupanja za pričakovano vrednost pri stopnji zaupanja β je oblike

μ **znan:**

$$\frac{(n-1)\widehat{\sigma^2}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(\frac{1+\beta}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\widehat{\sigma^2}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(\frac{1-\beta}{2})}, \text{ kjer je } \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$$

μ **ni znan:**

$$\frac{(n-1)S^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\frac{1+\beta}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\frac{1-\beta}{2})}, \text{ kjer je } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$$

1. Dnevni obiskovalci Bleda so merili čas, ki so ga potrebovali za pot od Ljubljane do Bleda:

$$55, \quad 63, \quad 47, \quad 58, \quad 52, \quad 65, \quad 72.$$

   Predpostavi, da je čas vožnje porazdeljen normalno. Poišči interval zaupanja za varianco pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$, če veš, da je povprečni čas vožnje 58 minut.

2. Kolesar se je v pripravah na Maraton Franja vsak dan povzpel na prelaz Črnivec. Pri tem je meril čas, ki ga potrebuje za vzpon, v urah in minutah:

$$1\!:\!08, \quad 1\!:\!05, \quad 1\!:\!07, \quad 1\!:\!04, \quad 1\!:\!02, \quad 1\!:\!05, \quad 1\!:\!03, \quad 0:\!59.$$

   Predpostavi, da je čas vzpona porazdeljen normalno.

(a) Poišči interval zaupanja za povprečen čas vzpona pri stopnji zaupanja $\beta = 0,9$.

(b) Poišči interval zaupanja za varianco pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$, če veš, da je povprečni čas vzpona 65 minut.

3. Igralci igre *Človek ne jezi se* so šteli število metov kocke potrebnih za zaključek igre:

$$87, \quad 75, \quad 93, \quad 103, \quad 84, \quad 91, \quad 93, \quad 89, \quad \text{in} \quad 96.$$

   Predpostavi, da je število metov porazdeljeno normalno. Poišči interval zaupanja za varianco pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$, če veš, da je povprečno število metov 92.

4. V nasadu borovnic so dnevno obrali

$$12, \quad 16, \quad 19, \quad 18, \quad 15, \quad 10, \quad 14, \quad 15, \quad \text{oziroma} \quad 13$$

   kilogramov borovnic. Predpostavi, da je število kilogramov nabranih borovnic porazdeljeno normalno. Poišči interval zaupanja za varianco pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$, če veš, da v povprečju naberejo 14 kilogramov borovnic.

5. V drevesnici spremljajo rast dreves v enem letu. Sadike, ki so jih spremljali so zrastle za

$$20, \quad 35, \quad 44, \quad 18, \quad 27, \quad 32 \quad \text{in} \quad 27 \text{ centimetrov.}$$

   Predpostavimo, da je letni prirast porazdeljen normalno. Poišči interval zaupanja za standardni odklon letnega prirastka pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$.

6. Organizatorji poletnega glasbenega festivala so za namen pridobitve novih sponzorjev beležili število obiskovalcev:

$$54, \quad 87, \quad 94, \quad 73, \quad 64, \quad 65, \quad 73 \quad \text{in} \quad 79.$$

   Predpostavimo, da je število obiskovalcev festivala porazdeljeno normalno. Poišči interval zaupanja za standardni odklon števila obiskovalcev pri stopnji zaupanja $\beta = 0,95$.

Poglavje 4

Preverjanje domnev

4.1 Binomska porazdelitev

Preizkušanje domnev v Bernoullijevem modelu

Testna statistika: $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

1. $H_0 : p \leq p_0$ proti $A : p > p_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T > C \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{če } T \leq C, \end{cases}$$

   kjer je C najmanjše celo število, za katerega je $P(\text{Bin}(n, p_0) > C) \leq \alpha$

   p- vrednost: $T = t \quad \Rightarrow \quad P(\text{Bin}(n, p_0) \geq t)$

2. $H_0 : p \geq p_0$ proti $A : p < p_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T < C \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{če } T \geq C, \end{cases}$$

   kjer je C največje celo število, za katerega je $P(\text{Bin}(n, p_0) < C) \leq \alpha$

   p- vrednost: $T = t \quad \Rightarrow \quad P(\text{Bin}(n, p_0) \leq t)$

3. $H_0 : p = p_0$ proti $A : p \neq p_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } p_0 \notin IZ \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{če } p_0 \in IZ, \end{cases}$$

   kjer je IZ interval zaupanja za p s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$

1. Prodajalec sladoleda prodaja le dva okusa: čokoladnega in vanilijevega. Med prvimi 9 kupci jih je 6 kupilo čokoladnega in 3 vanilijevega. Lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ predvideva, da bo prodal več čokoladnega kot vanilijevega sladoleda?

2. Igralec meče običajno kocko in v desetih metih vrže štirikrat 6. Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ predvidevamo, da je kocka poštena?

3. Anketar na ulici preverja, koliko ljudi ima pameten telefon. Med devetimi mimoidočimi jih 7 odgovori pritrdilno. Ali lahko dokaže, da ima vsaj polovica ljudi že pameten telefon, če je stopnja značilnosti $\alpha = 0,05$?

4. Na tržnici med nakupovalci sadja izvedejo anketo kaj imajo raje: češnje ali jagode. Med enajstimi vprašanimi so štirje izbrali češnje, ostali pa jagode. Lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ predvidevamo, da je ljudi, ki imajo raje češnje, manj kot tistih, ki imajo raje jagode?

5. Jaka je v igralnici opazoval ruleto in opazil, da je v osmih zaporednih igrah šestkrat padla rdeča številka. Ali lahko dokaže, da rdeča številka pade z verjetnostjo vsaj ena polovica, če je stopnja značilnosti $\alpha = 0,05$?

6. Banka svojim komitentom ponudi plačevanje položnic preko mobilne banke. Po krajšem uvajalnem obdobju manjšo skupino povprašajo ali so zadovoljni z novo aplikacijo. Osem jih odgovori pritrdilno, dva negativno, en uporabnik pa je neopredeljena.

   (a) Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ preveri hipotezo, da je nezadovoljnih četrtina uporabnikov.

   (b) Lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ predvidevamo, da je zadovojnih več kot polovica uporabnikov?

   (c) Pri kakšni najmanjši stopnji značilnosti α lahko predvidevajo, da je zadovoljnih več kot polovica uporabnikov?

7. V turistični agenciji na začetku poletja beležijo izbrane destinacije svojih strank. Med prvimi desetimi strankami so tri izbrale potovanje v večja tuja mesta, sedem pa se jih je odločilo za letovanje na morju.

   (a) Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ zavrneš hipotezo, da gre na morje polovica strank turistične agencije?

   (b) Pri kakšni najmanjši stopnji značilnosti α lahko predvidevajo, da gre na morje več kot tretina strank?

8. Anketar je med mimoidočimi na ulici spraševal, ali so v poletnih mesecih odšli na počitnice. Med prvimi devetimi jih je sedem odgovorilo pritrdilno, dva pa negativno

   (a) Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ potrdiš hipotezo, da gre v poletnih mesecih dve tretjini ljudi na počitnice?

(b) Pri kakšni najmanjši stopnji značilnosti α lahko predvidevaš, da gre na počitnice v poletnih mesecih vsaj tri četrtine ljudi?

9. Farmacevtska tovarna proučuje učinke novega zdravila proti glavobolu. Skupino enajstih ljudi povpraša, ali se po uporabi novega zdravila počutijo bolje. Osem jih odgovori pritdilno, dva negativno, eden pa je neopredeljen.

   (a) Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ zavrneš hipotezo, da je zdravilo učinkovito pri četrtini ljudi?

   (b) Lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ predvidevaš, da je zdravilo učinkovito pri več kot 80% ljudeh? Kaj pa pri $\alpha = 0,1$?

4.2 Normalna porazdelitev

Normalna porazdelitev - σ poznan

Testna statistika: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

1. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ proti $A : \mu > \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } T > \Phi^{-1}(1-\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(Z \geq \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$

2. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ proti $A : \mu < \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } T < \Phi^{-1}(\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(Z \leq \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $A : \mu \neq \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } |T| > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(|Z| \geq \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|)$

1. V drevesnici spremljajo rast dreves v enem letu. Sadike, ki so jih spremljali so zrastle za

$$20, \quad 35, \quad 44, \quad 18, \quad 27, \quad 32 \quad \text{in} \quad 27 \text{ centimetrov.}$$

Predpostavimo, da je letni prirast porazdeljen normalno.

(a) Pri prodaji sadik oglašujejo, da njihove sadike na leto zrastejo v povprečju več kot 25 cm. Ali lahko to svojo trditev potrdijo pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$, če je standardni odklon prirasta enak 6 cm?

(b) Za kakšne vrednosti lahko statistično značilno dokažejo, da je povprečni prirast od njih večji pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$?

Normalna porazdelitev - σ neznan

Testna statistika: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, $\quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \overline{X})^2$

(a) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ proti $A : \mu > \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T > F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(T_{n-1} \geq \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}})$

(b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ proti $A : \mu < \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T < F^{-1}_{t(n-1)}(\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(T_{n-1} \leq \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}})$

(c) $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $A : \mu \neq \mu_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } |T| > F^{-1}_{t(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

p- vrednost: $P(|T_{n-1}| \geq \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|)$

2. Dnevni obiskovalci Bleda so merili čas, ki so ga potrebovali za pot od Ljubljane do Bleda:

$$55, \quad 63, \quad 47, \quad 58, \quad 52, \quad 65, \quad 72.$$

   Predpostavi, da je čas vožnje porazdeljen normalno. Preveri hipotezo, da je povprečni čas daljši kot 55 minut pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$.

3. Kolesar se je v pripravah na Maraton Franja vsak dan povzpel na prelaz Črnivec. Pri tem je meril čas, ki ga potrebuje za vzpon, v urah in minutah:

$$1\!:\!08, \quad 1\!:\!05, \quad 1\!:\!07, \quad 1\!:\!04, \quad 1\!:\!02, \quad 1\!:\!05, \quad 1\!:\!03, \quad 0:59.$$

   Predpostavi, da je čas vzpona porazdeljen normalno. Preveri hipotezo, da je povprečni čas vzpona krajši kot 65 minut pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$.

4. Starši so za nakup šolskih potrebščin pred pričetkom šolskega leta zapravili

$$130, \quad 214, \quad 176, \quad 122, \quad 305, \quad 112, \quad 203, \quad 154 \quad \text{oziroma } 197 \text{ EUR.}$$

   Predpostavi, da je strošek šolskih potrebščin porazdeljen normalno. Preveri hipotezo, da je povprečni strošek za šolske potrebščine večji od 150 EUR pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$.

5. Igralci igre *Človek ne jezi se* so šteli število metov kocke potrebnih za zaključek igre:

$$87, \quad 75, \quad 93, \quad 103, \quad 84, \quad 91, \quad 93, \quad 89, \quad \text{in} \quad 96.$$

   Predpostavi, da je število metov porazdeljeno normalno. Preveri hipotezo, da je število metov večje od 90 pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$.

6. V kampu so beležili število nočitev, ki jih posamezen gost preživi pri njih:

$$20, \quad 3, \quad 7, \quad 14, \quad 3, \quad 10, \quad 5, \quad 17, \quad 8 \quad \text{in} \quad 6.$$

   Predpostavi, da je število nočitev porazdeljeno normalno. Preveri hipotezo, da obiskovalci povprečno v kampu ostanejo največ teden dni (7 noči) pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$.

7. Anica vsako pomlad kupi sadike in semena za svoj vrt. Za to je v zadnjih letih porabila

$$115, \quad 95, \quad 150, \quad 89, \quad 73, \quad 93, \quad 110 \quad \text{in} \quad 124 \text{ EUR.}$$

   Mož ji očita, da vsako leto porabi več kot 100 EUR. Ali lahko to dokaže pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

8. V nasadu borovnic so dnevno obrali

$$12, \quad 16, \quad 19, \quad 18, \quad 15, \quad 10, \quad 14, \quad 15, \quad \text{oziroma} \quad 13$$

   kilogramov borovnic. Predpostavi, da je število kilogramov nabranih borovnic porazdeljeno normalno. Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ pokažeš, da v povprečju dnevno oberejo več kot 15 kilogramov borovnic?

9. Organizatorji poletnega glasbenega festivala so za namen pridobitve novih sponzorjev beležili število obiskovalcev:

$$54, \quad 87, \quad 94, \quad 73, \quad 64, \quad 65, \quad 73 \quad \text{in} \quad 79.$$

   Predpostavimo, da je število obiskovalcev festivala porazdeljeno normalno. Ali lahko trdijo, da na festival pride povprečno več kot 70 tekmovalcev pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$? Kaj pa, če je $\alpha = 0,1$?

10. Šolska psihologinja povpraša učence, koliko časa na dan preživijo pred elektronskimi napravami in dobi naslednje odgovore:

$$30, \quad 75, \quad 50, \quad 60, \quad 20, \quad 15, \quad 90, \quad 60 \quad \text{in} \quad 45 \text{ minut.}$$

Predpostavimo, da je čas, ki ga učenci preživijo pred elektronskimi napravami porazdeljen normalno. Ali lahko trdi, da učenci uporabljajo elektronske naprave povprečno več kot eno uro dnevno pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$? Kaj pa, če je $\alpha = 0,1$?

4.3 Primerjava dveh normalnih porazdelitev

Razlika med normalnima populacijama - σ poznani

Slučajni spremenljivki $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ in $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ z znanima standradnima odklonoma.

Testna statistika: $T = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - D_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T > \Phi^{-1}(1-\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } T < \Phi^{-1}(\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo,} & \text{če } |T| > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo,} & \text{sicer} \end{cases}$$

1. V raziskovalni agenciji so primerjali učinke dveh sončnih krem: Antisun in Becool. Kremo Antisun je 60 ljudi ocenilo s povprečno oceno 3,6 in standardnim odklonom 0,6. Kremo Becool pa je 90 ljudi ocenilo s povprečno oceno 3,9 in standardnim odklonom 1,0.

Ali je krema Becool po oceni uporabnikov statistično boljša od kreme Antisun pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

2. Študent se je pred izbiro jezikovne šole pozanimal, kakšen je uspeh tečajnikov. Šolo *Vse znam* je v preteklem šolskem letu obiskovalo 65 tečajnikov, ki so na končnem testu dosegli v povprečju 4,1 s standardnim odklonom 0,4. Učenci šole *Več znam več veljam* pa so dosegli v povprečju 4,3 s standardnim odklonom 0,7. Drugo šolo je obiskovalo 50 tečajnikov.

   Ali je jezikovna šola *Več znam več veljam* statistično boljša od šole *Vse znam* pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

3. Mladi statistik se je za poletne počitnice odločil odpotovati na morje. Odločal se je za nastanitev med hoteloma Sonce in Harmonija, zato si je na internetu ogledal ocene gostov. Hotel Sonce je 250 gostov ocenilo s povprečno oceno 3,9 in standardnim odklonom 1,1. Hotel Harmonija pa je ocenilo 180 gostov s povprečno oceno 4,2 in standardnim odklonom 0,6.

   Ali je Hotel Harmonija statistično značilno boljši od Hotela Sonce pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

4. Študent se pred nakupom vozovnice odloča, ali se bo v novem šolskem letu na predavanja vozil z avtobusom ali vlakom. V preteklem letu se je 175-krat peljal z vlakom in za pot potreboval v povprečju 29 minut s standardnim odklonom 3 minut. Z avtobusom pa se je peljal 105-krat in za pot potreboval v povprečju 26 minut s standardnim odklonom 9 minut.

   Ali je pot z avtobusom statistično značilno krajša pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

Razlika med normalnima populacijama - σ neznana

Slučajni spremenljivki $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma)$ in $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma)$ z neznanima standradnima odklonoma, ki sta enaka!

Testna statistika: $T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - D_0)/\sqrt{1/n - 1 + 1/n_2}}{\sqrt{((n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2)/(n_1+n_2-2)}}$

(a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } T > F^{-1}_{t(n_1+n_2-2)}(1-\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

(b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } T < F^{-1}_{t(n_1+n_2-2)}(\alpha) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

(c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnemo}, & \text{če } |T| > F^{-1}_{t(n_1+n_2-2)}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ H_0 \text{ ne zavrnemo}, & \text{sicer} \end{cases}$$

5. Plavalna kluba Delfin in Riba primerjata rezultate s skupnega turnirja. Za plavalni klub Delfin je tekmovalo 38 tekmovalcev, za plavalni klub Riba pa 47 tekmovalcev. Plavalci Delfina so osvojili 13 zlatih medalj, 10 srebrnih in 14 bronastih. Tekmovalci Ribe pa so osvojili 9 zlatih, 20 sredbrnih in 11 bronastih medalj. Tekmovalci so za prvo mesto dosegli 3 točke, za drugo mesto 2 točki in za tretje mesto 1 točko. Ostala mesta ne prinašajo točk.

   Ali lahko za katerega od klubov rečeš, da ima v povprečju uspešnejše tekmovalce pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

6. Bled je v 60 poletnih dneh obiskalo povprečno 2100 ljudi dnevno s standardnim odklonom 150. Bohinj pa je imel v 45 dneh povprečno 1950 dnevnih obiskovalcev s standardnim odklonom 300.

   Ali lahko za katerega od krajev statistično značilno ugotoviš, da je med turisti bolj priljubljen pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$, če predvidevaš, da je število obiskovalcev porazdeljeno normalno?

7. Pred pričetkom poletne sezone poulični umetniki med seboj primerjajo zaslužke v

prejšnji sezoni. Klovn je nastopal 45-krat in zaslužil povprečno 53 EUR s standardnim odklonom 7 EUR. Kitarist je nastopil 63-krat in zaslužil v povprečju 47 EUR s standardnim odklonom 10 EUR. Akrobat pa je nastopal 59-kat in v povprečju zaslužil 55 EUR s standardnim odklonom 11 EUR.

Ali lahko za katerega od njih rečeš, da statistično značilno zasluži boljše od ostalih dveh pri stopnji značilnostu $\alpha = 0,05$?

8. V modnem butiku so imeli v obdobju poletnih razprodaj, ki so trajale 28 dni, v povprečju 650 EUR prometa s standardnim odklonom 210 EUR. V času zimskih razprodaj, ki so trajale 26 dni, pa so prodali v povprečju za 730 EUR blaga s standardnim odklonom 120 EUR.

   Ali lahko ugotoviš, v katerem obdobju so imeli večji promet pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$, če predvidevaš, da je prodaja blaga porazdeljena normalno?

9. Popotnik se do svoje počitniške destinacije lahko odpravi z avtom ali pa se del poti prevozi z vlakom, drugi del pa z ladjo. Da bi se lažje odločil, si ogleda mnenja popotnikov, ki so se že pred njim odpravili na isto počitniško destinacijo. 57 popotnikov se je odpravilo z avtom. Za pot so v povprečju porabili 3 ure in 35 minut s standardnim odklonom 55 minut. Pri tem so svoje zadovoljstvo ocenili s povprečno oceno $3,7$ in standardnim odklonom $0,9$. 32 popotnikov pa je do iste destinacije potovalo z vlakom in ladjo. V povprečju so za to potrebovali 4 ure in 20 minut s standardnim odklonom 12 minut. Zadovoljstvo pa so ocenili s povprečno oceno $4,7$ in standardnim odklonom $0,3$. Predpostavi, da sta tako čas potovanja kot ocena zadovoljstva porazdeljena normalno.

   (a) Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ dokažeš, da je pot z avtom krajša, zadovoljstvo pa je večje pri vožnji z vlakom in ladjo?

   (b) Za največ koliko minut lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$ pokažemo, da je vožnja z avtom krajša?

10. Film *Poletna noč* si je v 45 dneh predvajanja ogledalo povprečno 63 ljudi s standardnim odklonom 9, film *Vihar vseh viharjev* pa si je v 32 dneh ogledalo povprečno 57 ljudi s standardnim odklonom 4. Predpostavi, da je število obiskovalcev posamezne filmske predstave porazdeljeno normalno.

    (a) Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$ dokažeš, da si je film *Poletna noč* v povprečju ogledalo več gledalcev kot film *Vihar vseh viharjev*?

    (b) Za največ koliko lahko pokažeš je povprečno število gledalcev filma *Poletna noč* večje od povprečnega števila gledalcev filma *Vihar vseh viharjev* pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$?

11. Avtomobilistično društvo je zaradi obvoza opazovalo, koliko časa potrebuje posamezni voznik iz Ljubljane do Kobarida. 64 voznikov se je peljalo po avtocesti do Nove Gorice

in nato nadaljevalo po lokalnih cestah. Za to so v povprečju potrebovali 2 uri in 15 minut s standardnim odklonom 20 minut. 36 voznikov pa se je na pot podalo preko Škofje Loke. V povprečju so za pot potrebovali 2 uri in 5 minut s standardnim odklonom 15 minut. Predpostavi, da je čas vožnje porazdeljen normalno.

(a) Ali lahko za katero od poti pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,01$ dokažeš, da je hitrejša kot druga?

(b) Za največ koliko lahko pokažeš, da je pot skozi Škofjo Loko krajša pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,1$?

12. Lastnik kavarne spremlja prodajo kave in sladoleda glede na zunanjo temperaturo.

T v °C	15	18	20	23	24	21
število kav	63	71	65	67	62	75
število sladoledov	15	14	31	52	53	44

Predpostavi, da je prodaja kave in sladoleda porazdeljena normalno z enakim standardnim odklonom. Ali lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0,05$ pokaže, da je povprečno število prodanih kav za več kot 20 večje od povprečnega števila prodanih sladoledov? Kaj pa, če je stopnja značinosti $\alpha = 0,1$?

Poglavje 5

Linearna regresija

Linearna regresija

Pri danih opazovanih parih $(X_i, Y_i),\ i = 1, \dots n$ predpostavimo, da velja zveza

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon,$$

kjer je ϵ porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo enako nič.
Regresijska premica je premica oblike

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X.$$

Cenilki za parametra α in β dobimo po metodi najmanjših kvadratov:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} \\ \hat{\alpha} &= \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} \end{aligned}$$

Vzorčni korelacijski koeficient

$$R = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

1. V tabeli je podana prodaja ledenega čaja glede na zunanjo temperturo zraka

T (v °C)	20	23	25	28	30	32	33
št. ledenih čajev	12	15	14	27	20	30	30

Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako temperatura zraka vpliva na prodajo ledenega čaja. Izračunaj še korelacijski koeficient. Ali lahko oceniš koliko ledenega čaja bodo prodali, če je temperatura zraka 35°C?

2. V tabeli so podane povprečne avgustovske temperature v zaporednih osmih letih:

leto	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
T (v °C)	$20,4$	$20,7$	$22,4$	$20,3$	$22,8$	$23,3$	$22,5$	$19,6$

   Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako se povprečna temperatura zraka v avgustu z leti spreminja. Izračunaj še korelacijski koeficient. Kakšna naj bi bila povprečna avgustovska temperatura v letošnjem letu?

3. Podana je višina naključno izbranih očetov in njihovih sinov

oče	165	175	181	178	174	182	178
sin	168	177	190	178	173	186	185

   Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako višina očeta vpliva na višino sina. Izračunaj še korelacijski koeficient. Ali lahko oceniš kako visoko bo zrastel fant, če je njegov oče velik 190 cm?

4. V tabeli je podan mesečni strošek ogrevanja glede na povprečno mesečno temperaturo za dvosobno stanovanje v kurilni sezoni:

povprečna mesečna temperatura T (v °C)	13	8	3	1	1	10	14
strošek ogrevanja (EUR)	20	36	43	55	53	33	17

   Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako se strošek za ogrevanje spreminja glede na povprečno mesečno temperaturo. Izračunaj še korelacijski koeficient. Ali lahko oceniš kakšni bodo stroški za ogrevanje, če bo povprečna mesečna temperatura 5°C?

5. Na cesti med Lucijo in Strunjanom so v prvih poletnih dneh šteli promet. Hkrati so še zabeležili povprečen čas, ki so ga potniki potrebovali od Ljubljane do Portoroža.

število avtomobilov v eni uri	175	314	287	150	269	215	250
povprečen čas (v urah in minutah)	1 : 16	2 : 05	1 : 48	1 : 18	1 : 45	1 : 32	1 : 38

   Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako število avtomobilov vpliva na povprečen čas vožnje na morje. Izračunaj še korelacijski koeficient.

6. V letnem kinu so beležili število obiskovalcev in temperaturo zraka.

T (v °C)	25	27	24	23	19	22	21	23
število prodanih vstopnic	54	56	60	49	15	33	39	45

Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako temperatura zraka vpliva na število prodanih vstopnic. Izračunaj še korelacijski koeficient. Ali lahko oceniš, koliko kart bodo prodali, če bo temperatura zraka enaka 26°C?

7. Politični analitik proučuje, kako kuhanje predvolilnega golaža vpliva na izid volitev. V tabeli je za vsakega kandidata podano število porcij golažev, ki jih je razdelil, in število glasov, ki jih je dobil na zadnjih volitvah.

kandidat	Anton	Breda	Cene	Črt	Dora	Erik	Filip	Gregor
število golažev	155	123	189	40	210	175	200	89
število glasov	203	87	225	63	185	154	195	101

Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako predvolilni golaž vpliva na volilni rezultat. Izračunaj še korelacijski koeficient.

8. V kavarni so opazovali prodajo ledenega čaja glede na temperaturo zraka

T (v °C)	19	23	26	25	30	28	22	25
ledeni čaj (v litrih)	$1,2$	$1,0$	$2,2$	$2,2$	$3,8$	$4,0$	$1,6$	$3,2$

Poišči regresijsko premico, ki opisuje, kako temperatura zraka vpliva na prodajo ledenega čaja. Izračunaj še korelacijski koeficient. Koliko ledenega čaja naj pripravijo, če je napoved za temperaturo zraka enaka 35°C?

9. Lastnik kavarne spremlja prodajo kave in sladoleda glede na zunanjo temperaturo.

T v °C	15	18	20	23	24	21
število kav	63	71	65	67	62	75
število sladoledov	15	14	31	52	53	44

Poišči regresijski premici, ki opisujeta, kako zunanja temperatura vpliva na prodajo kave oziroma sladoleda. Koliko lahko predvideva, da bo prodal, če bo zunaj 30°C? Izračunaj še oba korelacijska koeficienta.

10. V Rekreacijskem centru Sava oddajajo deset prostorov za piknik. Število oddanih prostorov glede na zunanjo temperaturo je podano s tabelo

T v °C	17	20	26	33	30	23	25	28
število piknikov	1	3	8	9	10	4	6	8

Poišči regresijsko premico, ki opisuje kako zunanja temperatura vpliva na število oddanih piknik prostorov. Izračunaj še korelacijski koeficient.

11. V sirarni prodajajo različno dolgo zorjene sire. Pri tem opazujejo, kako dolžina zorjenja vpliva na prodajo sira.

čas zorjenja v mesecih	2	3	4	5	6	7	8
število prodanih hlebcev sira	8	15	11	26	29	18	18

Poišči regresijsko premico, ki opisuje kako dolžina zorjenja sira vpliva na prodajo. Izračunaj še korelacijski koeficient.

12. Občina je v času poletnih počitnic opazovala obisk lokalnega bazena, ki se je spreminjal glede na povprečno temperaturo zraka

T (v $^{\circ}C$)	27	30	34	32	31	25	28	22
število obiskovalcev	45	80	133	140	124	77	95	34

Poišči regresijsko premico, ki opisuje kako temperatura zraka vpliva na obisk bazena. Izračunaj še korelacijski koeficient.

Poglavje 6

Rešitve

6.1 Centralni limitni izrek

1. Označimo $Y = 3 - X$ dobiček Loterije Slovenije pri prodaji ene igre. Tedaj je $E(Y) = 3 - E(X) = \frac{1}{3}$ in $\sigma^2(Y) = \sigma^2(X) = \frac{151}{18}$. Za dobiček S pri prodaji 1000 iger uporabimo centralni limitni izrek

$$P(S > 0) \approx 1 - \Phi(-\tfrac{1}{3} \cdot 1000/\sqrt{\tfrac{151}{18} \cdot 1000}) = 1 - \Phi(-3.64) = 0,9999$$

2. Če z S označimo dobiček zavarovalnice pri prodaji 500 zavarovanj, potem je $\mu(S) = 500(a - 60)$ in $\sigma^2(S) = 500 \cdot 46900$. Iščemo a, da bo $P(S \geq 0) \approx 1$. Po centralnem limitnem ireku je $P(S \geq 0) \approx 1 - \Phi(-\mu(S)/\sigma(S))$. Potem je

$$\frac{300 - 5a}{\sqrt{5 \cdot 469}} \approx -3.72 \quad \Rightarrow \quad a = 96.03$$

3. Če z X označimo dobiček pri nakupu ene srečke, je $\mu(X) = 0.5$ in $\sigma(X) = 1.5$. Tedaj je dobiček ob nakupu 100 srečk S porazdeljen približno normalno z $\mu(S) = 50$ in $\sigma(S) = 15$.
$$P(S \geq 0) = 1 - \Phi(-\tfrac{50}{15}) = 0.9996$$

4. (a) Pričakovana vrednost je nič, če je igra vredna 1.5 EUR.
   (b) Po centralnem limitnem izreku je
$$P(S \geq 10) \approx 1 - \Phi(\tfrac{10}{\sqrt{425}}) = 0.31385.$$

6.2 Kvantili

1. $\overline{X} = 94.14, S^2 = 15.52, Q_{3/4} = 97$

2. (a) število jajc: $\overline{X} = 23, S_X^2 = 178.8$
   barva za pirhe: $\overline{Y} = 3.83, S_Y^2 = 6.17$
   (b) $\rho = 0.5359$
3. (a) $\overline{X} = 3.5, S^2 = 1.2165$
   (b) Me = 3, kvartilni razmik = $Q_{3/4} - Q_{1/4} = 5 - 3 = 2$
4. (a) V prihodnje ne bodo več vrteli filmov, ki imajo manj kot 164 obiskovalcev ($Q_{1/4} = 163,5$).
   (b) $p = 0.395$
5. Me = 7, kvartilni razmik = $Q_{3/4} - Q_{1/4} = 8.5 - 3.5 = 5$
6. $\overline{X} = 5.432$, Me $= 6, Q_{0.85} = 7$.
7. $\overline{X} = 91$, Me $= 87.5, p = 0.584$
8. Ker intervali niso podani zvezno, jih razširimo. Vsako spodnjo mejo znižamo za 0.5 in vsako zgornjo mejo zvišamo za 0.5.
   (a) $\overline{X} = 24.45$
   (b) $Q_{0.9} = 39.79 \quad \Rightarrow$ Trajekta ne bodo zamenjali, saj je v več kot 10 % voženj na trajektu več kot 35 avtomobilov.
9. (a) $\overline{X} = 217.44$
   (b) Ker je $Q_{0.9} = 234$, je 90% tekmovalcev skočilo manj kot 234 in jih je manj kot 10% skočilo več kot 235(>234). Zaletišče bo ostalo nespremenjeno.
10. (a) $\overline{X} = 6.85, \mathrm{Me} = 6.57$
    (b) Zamenjali bodo vozila s porabo, ki je večja od $Q_{0.8} = 7.37$ litrov na 100 km.
11. (a) $\overline{X} = 11.4$
    (b) $Q_{0.8} = 15.5$

6.3 Intervali zaupanja

6.3.1 Binomska slučajna spremenljivka

1. $L(9) = F^{-1}_{\mathrm{Beta}(9.3)}(0,025) = 0,4822$
   $U(9) = F^{-1}_{\mathrm{Beta}(10,2)}(0,975) = 0,9772$

2. čistoča: $L(7) = F^{-1}_{\text{Beta}(7,3)}(0,025) = 0,3999$
$U(7) = F^{-1}_{\text{Beta}(8,2)}(0,975) = 0,9719$

prijaznost: $L(5) = F^{-1}_{\text{Beta}(5.5)}(0,025) = 0,212$
$U(5) = F^{-1}_{\text{Beta}(6,4)}(0,975) = 0,863$

3. $L(8) = F^{-1}_{\text{Beta}(8,4)}(0,025) = 0,0,3903$
$U(8) = F^{-1}_{\text{Beta}(9,3)}(0,975) = 0,9398$

4. $L(3) = F^{-1}_{\text{Beta}(3.7)}(0,025) = 0,0749$
$U(3) = F^{-1}_{\text{Beta}(4,6)}(0,975) = 0,7007$

5. $L(4) = F^{-1}_{\text{Beta}(4.7)}(0,025) = 0,1216$
$U(4) = F^{-1}_{\text{Beta}(5,6)}(0,975) = 0,7376$

6. $L(2) = F^{-1}_{\text{Beta}(2.8)}(0,025) = 0,0281$
$U(2) = F^{-1}_{\text{Beta}(3,7)}(0,975) = 0,6001$

7. $L(7) = F^{-1}_{\text{Beta}(7.3)}(0,025) = 0,3999$
$U(7) = F^{-1}_{\text{Beta}(8,2)}(0,975) = 0,9719$

8. $L(4) = F^{-1}_{\text{Beta}(4.8)}(0,025) = 0,1093$
$U(4) = F^{-1}_{\text{Beta}(5,7)}(0,975) = 0,6921$

9. $L(6) = F^{-1}_{\text{Beta}(6.3)}(0,025) = 0,3491$
$U(6) = F^{-1}_{\text{Beta}(7,2)}(0,975) = 0,9681$

10. $L(5) = F^{-1}_{\text{Beta}(5.7)}(0,025) = 0,1675$
$U(5) = F^{-1}_{\text{Beta}(6,6)}(0,975) = 0,7662$

6.3.2 Pričakovana vrednost normalne slučajne spremenljivke

1. $\overline{X} = 179,2, \Phi^{-1}(0,975) = 1,96 \Rightarrow \mu \in (166.13, 192.27)$

2. $\overline{X} = 9,3, S^2 = 34,68, F^{-1}_{t(9)}(0,975) = 2,262 \Rightarrow \mu \in (5.08, 13.52)$

3. $\overline{X} = 106,125, S^2 = 574,98, F^{-1}_{t(7)}(0,975) = 2,447 \Rightarrow \mu \in (86.07, 126.18)$

4. $\overline{X} = 51,2, S^2 = 82,18, F^{-1}_{t(9)}(0,95) = 1,833 \Rightarrow \mu \in (45.94, 56.46)$

5. $\overline{X} = 49,4, S^2 = 621,53, F^{-1}_{t(9)}(0,975) = 2,262 \Rightarrow \mu \in (33.99, 64.90)$

6.3.3 Standardni odklon normalne slučajne spremenljivke

1. $\widehat{\sigma^2} = 62,26, F^{-1}_{\chi^2(7)}(0,025) = 1,6899, F^{-1}_{\chi^2(7)}(0,975) = 16,0128 \Rightarrow \sigma^2 \in (23.33, 221.15)$

2. (a) $\overline{X} = 64,125, S^2 = 8,125, F^{-1}_{t(7)}(0,975) = 12,365 \Rightarrow \mu \in (61.74, 66.51)$

   (b) $\widehat{\sigma^2} = 7,875, F^{-1}_{\chi^2(8)}(0,025) = 2,18, F^{-1}_{\chi^2(8)}(0,975) = 17,54 \Rightarrow \sigma^2 \in (3.14, 25.29)$

3. $\widehat{\sigma^2} = 58,56, F^{-1}_{\chi^2(9)}(0,025) = 2,70, F^{-1}_{\chi^2(9)}(0,975) = 19,02 \Rightarrow \sigma^2 \in (24.63, 173.47)$

4. $\widehat{\sigma^2} = 7,56, F^{-1}_{\chi^2(9)}(0,025) = 2,70, F^{-1}_{\chi^2(9)}(0,975) = 19,02 \Rightarrow \sigma^2 \in (3.177, 22.384)$

5. $\overline{X} = 29, S^2 = 80, F^{-1}_{\chi^2(6)}(0,025) = 1,24, F^{-1}_{\chi^2(6)}(0,975) = 14,45 \Rightarrow \sigma^2 \in (33.219, 387.928)$ in $\sigma \in (5.76, 19.70)$

6. $\overline{X} = 73,625, S^2 = 167,98, F^{-1}_{\chi^2(7)}(0,025) = 1,69, F^{-1}_{\chi^2(6)}(0,975) = 16,01 \Rightarrow \sigma \in (8.57, 26.38)$

6.4 Preizkušanje domnev

6.4.1 Binomska porazdelitev

1. $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$. Ker je $C = 7$ in $T = 6 \leq C$, H_0 ne zavrnemo.

2. Iz opazovanj predvideva, da bi šestica lahko padla bolj pogosto. Zato vzamemo $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$. Ker je $C = 4 = T$, H_0 ne zavrnemo. Ne moremo pokazati, da je kocka nepoštena.

3. $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$. Ker je $C = 7$ in $T = 7 \leq C$, H_0 ne zavrnemo.

4. $H_0 : p \geq \frac{1}{2}$. Ker je $C = 3$ in $T = 4 \geq C$, H_0 ne zavrnemo.

5. $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$. Ker je $C = 6$ in $T = 6 \leq C$, H_0 ne zavrnemo.

6. (a) $H_0 : p = \frac{1}{4}$. Ker je $\frac{1}{4} \in [0.0228, 0.5178]$, H_0 ne zavrnemo. Lahko pa poiščemo števili C_1 in C_2, za kateri velja $P(C_1 \leq \text{Bin}(11, \frac{1}{4}) \leq C_2) \geq 1-\alpha$. Ker je $C_1 = 0$, $C_2 = 6$ in $T = 2 \in [0, 6]$, H_0 ne zavrnemo.

   (b) $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$. Ker je $C = 8 = T$, H_0 ne zavrnemo.

   (c) $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$ zavrnemo, če $C \leq 7$. Tedaj je $\alpha = P(\text{Bin } (11, \frac{1}{2}) > 7) = 0.11328$.

7. (a) $H_0 : p = \frac{1}{2}$, ker $p \in [0.3475, 0.9333]$ (interval zaupanja), H_0 ne zavrnemo. Ker je $C_1 = 1$, $C_2 = 9$ in $T = 7 \in [1, 9]$, H_0 ne zavrnemo.

   (b) $H_0 : p \leq \frac{1}{3}$ zavrnemo, če je $C = 6 \quad \Rightarrow \quad P(\text{Bin } (9, \frac{3}{4}) > 6) = 0.6007 \leq \alpha$.

8. (a) $H_0 : p = \frac{2}{3}$, Clopper-Pearsonov interval zaupanja $[0.3999, 0.9719]$. Ker p je element intervala, H_0 ne zavrnemo.

   (b) $H_0 : p \leq \frac{3}{4}$ zavrnemo, če $C \leq 6$. Tedaj je $\alpha = P(\text{Bin }(11, \frac{1}{2}) > 6) = 0.11328$.

9. (a) $H_0 : p = \frac{1}{4}$, Clopper-Pearsonov interval zaupanja $[0.3903, 0.9398]$. Ker p ni element intervala, H_0 zavrnemo.

   (b) $H_0 : p \leq \frac{4}{5}$. Za $\alpha = 0.05$ določimo $C = 11$, za $\alpha = 0.01$ pa je $C = 10$. V obeh primerih H_0 ne zavrnemo.

6.4.2 Normalna porazdelitev

1. (a) Predpostavimo $H_0 : \mu \leq 25$. Ker je $T = 1,764$ in $\Phi^{-1} = 1,645 < T$, H_0 zavrnemo in s tem potrdimo alternativo $\mu > 25$.

   (b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ zavrnemo, če je $T > \Phi^{-1}(0,99) = 2,327$. Ker je $T = \frac{29-\mu_0}{6/\sqrt{7}}$, dobimo $\mu_0 < 27,97$.

2. $H_0 : \mu \geq 55, \overline{X} = 58,86, S^2 = 71,81, T = 1,115, t_6^{-1}(0,05) = -1,943 > T$, H_0 ne zavrnemo.

3. $H_0 : \mu \leq 65, \overline{X} = 64,125, S^2 = 8,125, T = -,812, t_7^{-1}(0,95) = 1,895 > T$, H_0 ne zavrnemo.

4. $H_0 : \mu \geq 150, \overline{X} = 179,2, S^2 = 3596,69, T = -1,378, t_8^{-1}(0,05) = -1,860 < T$, H_0 ne zavrnemo.

5. $H_0 : \mu \geq 90, \overline{X} = 90,1, S^2 = 61,86, T = 0,04, t_8^{-1}(0,05) = -1,860 < T$, H_0 ne zavrnemo.

6. $H_0 : \mu \leq 7, \overline{X} = 9,3, S^2 = 34,68, T = 1,172, t_9^{-1}(0,95) = 1,833 > T$, H_0 ne zavrnemo.

7. $H_0 : \mu \leq 100, \overline{X} = 106,125, S^2 = 574,98, T = 0,676, t_7^{-1}(0,95) = 1,895 > T$, H_0 ne zavrnemo. Ne more reči, da zapravi več kot 100

8. $H_0 : \mu \leq 15, \overline{X} = 14,67, S^2 = 8, T = -0,333, t_8^{-1}(0,95) = 1,860 > T$, H_0 ne zavrnemo. Ne more reči, da oberejo več kot 15 kilogramov.

9. $H_0 : \mu \leq 70, \overline{X} = 73,625, S^2 = 167,98, T = 0,79$. Za $\alpha = 0,05$ je $t_7^{-1}(0,95) = 1,895 > T$, H_0 ne zavrnemo. Za $\alpha = 0,1$ je $t_7^{-1}(0,9) = 1,415 > T$, H_0 ne zavrnemo.

10. $H_0 : \mu \leq 60, \overline{X} = 49,4, S^2 = 621,53, T = -1,27$. Ker je $T < 0$, H_0 ne zavrnemo za vsak α.

6.4.3 Primerjava dveh normalnih porazdelitev

1. $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 2,293, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 zavrnemo. Krema Becool je statistično značilno boljša.

2. $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 1,806, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 zavrnemo. Šola *Več znam več veljam* je statistično značilno boljša.

3. $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 3,627, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$$H_0$ zavrnemo. Hotel Harmonija je statistično značilno boljši.

4. $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, T = 3,307, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 zavrnemo. Pot z avtobusom je statistično značilno krajša.

5. $\mu_1 = 1,921, \mu_2 = 1,660, S_1 = 0,912, S_2 = 0,962$ Predvidevamo, da so plavalci kluba Delfin uspešnejši. $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, T = 1,280, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 ne zavrnemo. Zgornje trditve ne moremo dokazati.

6. Predvidevamo, da je Bled bolj priljubljen. $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, T = 3,078, z_{0,01} = \Phi^{-1}(0,99) = 2,326,$ H_0 zavrnemo.Bled je statistično značilno bolj priljubljen.

7. klovn : kitarist
   $H_0 : \mu_{kl} \leq \mu_{ki},\ T = 3.67 > \Phi^{-1}(0.95) = 1.645,$ H_0 zavrnemo, zato klovn zasluži več kot kitarist.

   klovn : akrobat
   $H_0 : \mu_a \leq \mu_{kl},\ T = 1.128 < \Phi^{-1}(0.95) = 1.645,$ H_0 ne zavrnemo.

   kitarist : akrobat
   $H_0 : \mu_a \leq \mu_{ki},\ T = 4.19 > \Phi^{-1}(0.95) = 1.645,$ H_0 zavrnemo, zato akrobat zasluži več kot kitarist.

8. Predvidevamo, da je pozimi večji promet. $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 1,734, z_{0,01} = \Phi^{-1}(0,99) = 2,326,$ H_0 ne zavrnemo.Ne moremo dokazati.

9. (a) DOLŽINA POTI: $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 5,931, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 zavrnemo.Pot z avtom je statistično značilno krajša.

   zadovoljstvo: $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1, T = 7,664, z_{0,05} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645,$ H_0 zavrnemo.Zadovoljstvo je večje pri potovanju z ladjo in vlakom.

   (b) $H_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq D$. Da zavrnemo H_0, mora veljati $D < \overline{X_2} - \overline{X_1} - z_{0,01}\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} = 27,349$

10. (a) $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, T = 3,956, \Phi^{-1}(0,99) = 2,327 < T,$ H_0 zavrnemo. Film Poletna noč si je ogledalo več gledalcev.

    (b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$ zavrnemo, če $T > \Phi^{-1}(1-\alpha)$. $D_0 < 3,5$. Za največ 3 gledalce.

11. (a) $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, T = 2,828, \Phi^{-1}(0,99) = 2,327 < T,\ H_0$ zavrnemo

    (b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq D$ zacrnemo, če $T > \Phi^{-1}(0,9) = 1,28,\ D = 5,475$.

12. kava: $\overline{X}_1 = 67,17, S_1^2 = 54,83/5$, sladoled: $\overline{X}_2 = 34,83, S_2^2 = 1550,83/5$; $T = 1,687$; za $\alpha = 0,05$: $F_{t(10)}^{-1}(0,95) = 1,8125 > T,\ H_0$ ne zavrnemo; za $\alpha = 0,1 : F_{t(19)}^{-1}(0,9) = 1,3722 < T,\ H_0$ zavrnemo

6.5 Linearna regresija

1. $\overline{X} = 27,3, \overline{Y} = 21,1, \beta = 1,45, \alpha = -18,53, \widehat{Y} = 32, r = 0,899$

2. $\overline{X} = 2010,5, \overline{Y} = 21,5, \beta = 0,10, \alpha = -184,34, \widehat{Y} = 22,5, r = 0,180$ slaba koreliranost

3. $\overline{X} = 176,14, \overline{Y} = 179,57, \beta = 1,24, \alpha = -38,67, \widehat{Y} = 196,74, r = 0,904$

4. $\overline{X} = 7,14, \overline{Y} = 36,71, \beta = -2,64, \alpha = 55,57, \widehat{Y} = 42,37, r = -0,982$

5. $\overline{X} = 237,14, \overline{Y} = 97,43, \beta = 0,28, \alpha = 30,87, r = 0,972$

6. $\overline{X} = 23, \overline{Y} = 43,875, \beta = 5,26, \alpha = -77,15, \widehat{Y} = 59,66, r = 0,877$

7. $\overline{X} = 147,625, \overline{Y} = 151,625, \beta = 0,885, \alpha = 20,952, r = 0,871$

8. $\overline{X} = 24,75, \overline{Y} = 2,4, \beta = 0,29, \alpha = -4,71, \widehat{Y} = 5,3, r = 0,862$

9. kava: $\overline{X} = 20,17, \overline{Y} = 67,17, \beta = -0,003, \alpha = 67,228, \widehat{Y} = 67,14, r = -0,002$

   sladoled: $\overline{X} = 20,17, \overline{Y} = 34,83, \beta = 5, \alpha = -66, \widehat{Y} = 84, r = 0,940$

10. $\overline{X} = 25,25, \overline{Y} = 6,125, \beta = 0,58, \alpha = -8,48, r = 0,951$

11. $\overline{X} = 5, \overline{Y} = 17,86, \beta = 1,93, \alpha = 8,21, r = 0,551$

12. $\overline{X} = 28,625, \overline{Y} = 91, \beta = 8,85, \alpha = -162,41, r = 0,897$