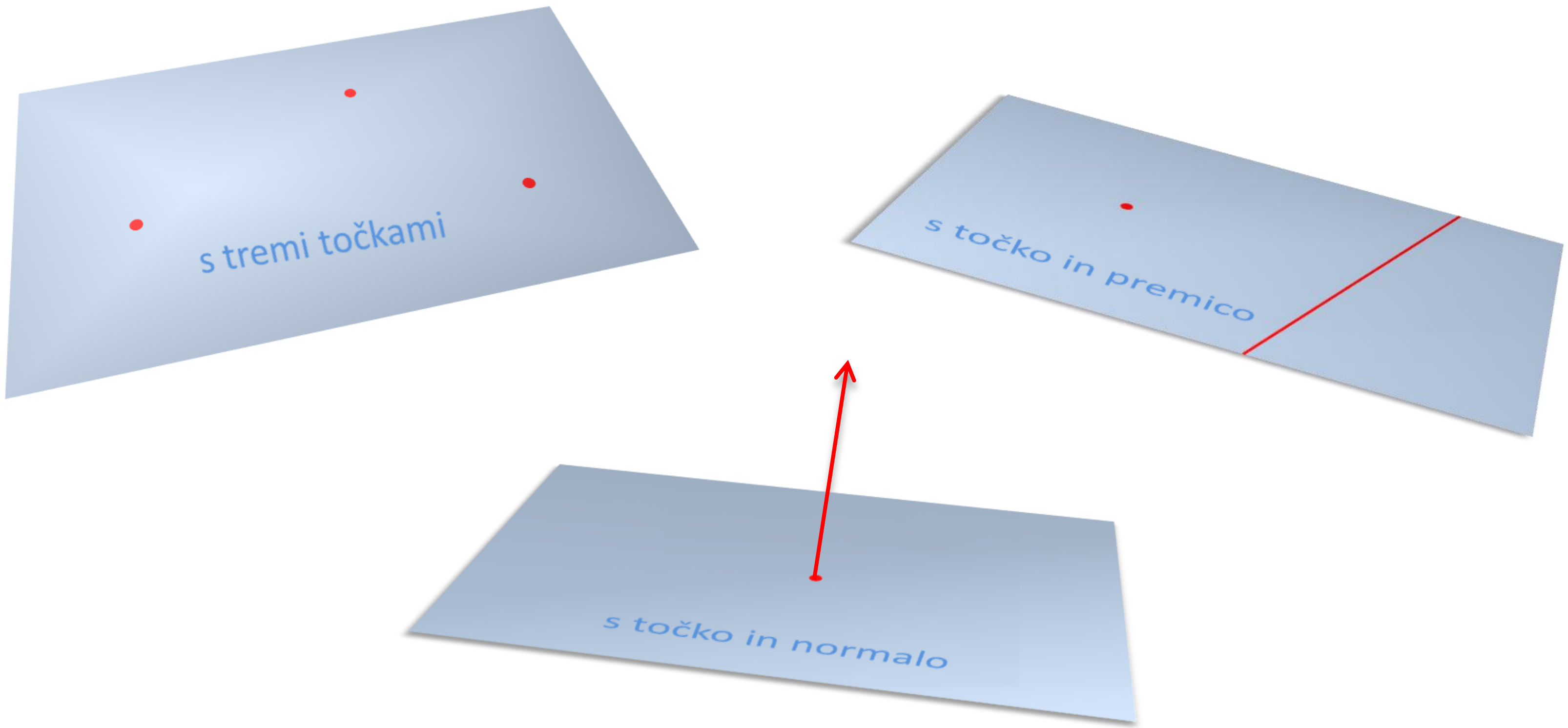
## PROSTORSKA GEOMETRIJA

Osnovni objekti prostorske geometrije so točke. premice in ravnine. Točke so podane s svojimi koordinatami. Nekoliko presenetljivo so ravnine lažje za obravnavo kot premice, zato se jih lotimo prej.

Ravnino lahko opredelimo na različne načine:

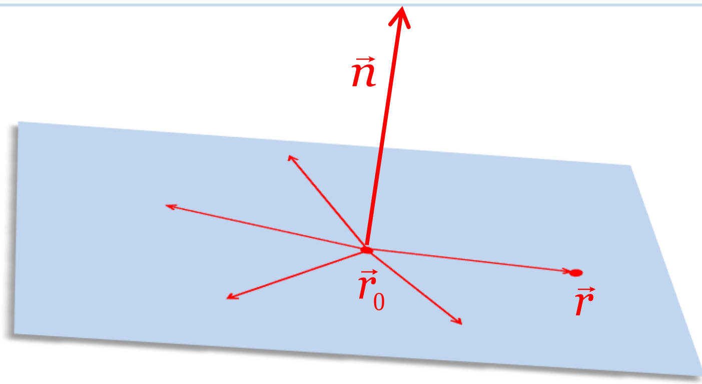


## ENAČBA RAVNINE

Označimo $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$$

$$\vec{n}=(a,b,c)$$




Pogoj, da točka $(x,y,z)$ leži na ravnini izrazimo vektorsko:
(normala je pravokotna na vse daljice v ravnini)

$$\boxed{\vec{n}\cdot\ \vec{r}-\vec{r}_0\ =0}$$

Po komponentah pa dobimo ( $d=\vec{n}\cdot\vec{r}_0=ax_0+by_0+cz_0$ )

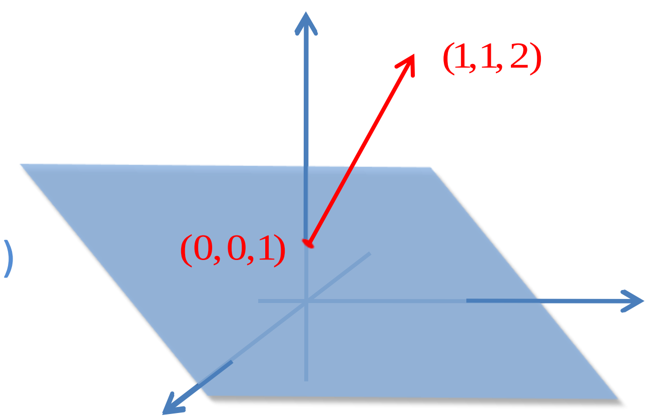
$$\boxed{ax+by+cz=d}$$

Vsaka linearna zveza med koordinatami točk v prostoru predstavlja ravnino.

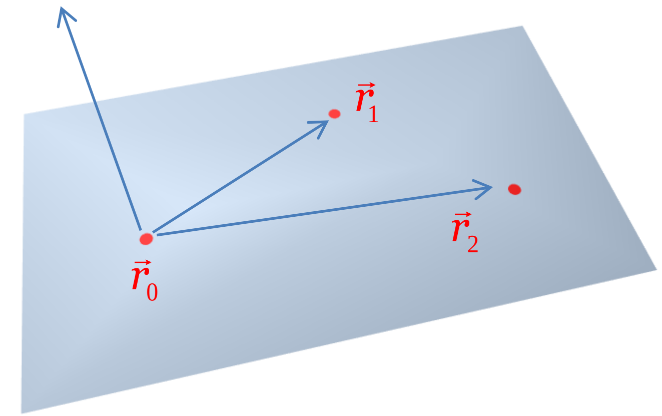
Katero ravnino določa enačba $x+y+2z=2$?.

$\vec{n}=(1,1,2)$

$\vec{r}_0=(0,0,1)$ (izberemo točko, ki ustreza enačbi)



## RAVNINA SKOZI TRI DANE TOČKE




Normala: $\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$.

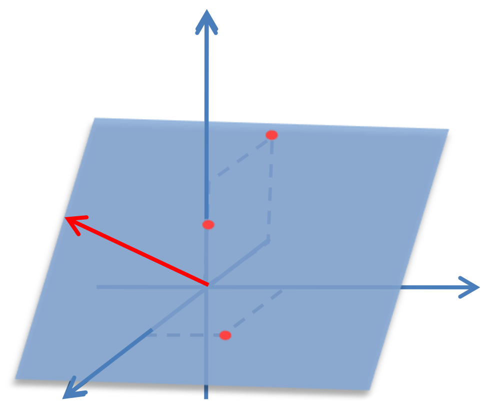
Pogoj, da točka $\vec{r}$ leži na ravnini: $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Enačba ravnine skozi točke (1,1,0), (-1,0,2) in (0,0,1):

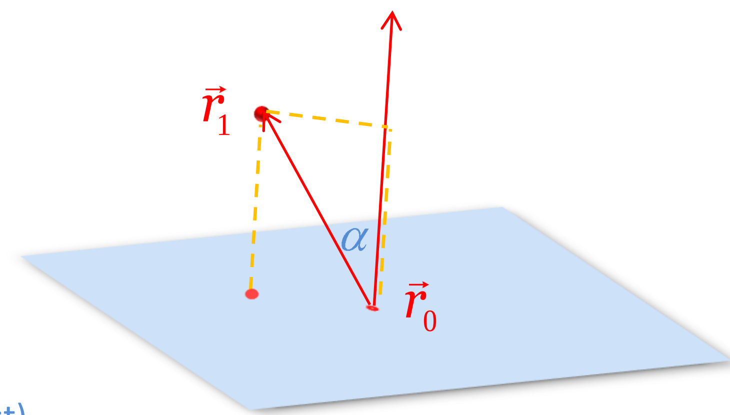
$$(-2,-1,2) \times (-1,-1,1) \cdot (x,y,z) - (1,1,0) = 0$$

$$(1,0,1) \cdot (x,y,z) - (1,1,0) = 0$$

$$x + z = 1$$



## RAZDALJA MED TOČKO IN RAVNINO




Razdalja je enaka projekciji vektorja do točke na smer normale.

$$d=\left|\vec{r}_1-\vec{r}_0\right|\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\ \vec{r}_1-\vec{r}_0}{|\vec{n}|}$$

(po potrebi vzamemo absolutno vrednost)

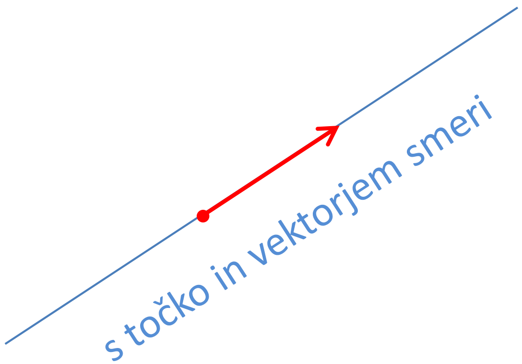
$$\text{Po koordinatah:}\quad d=\frac{\left|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|ax_1+by_1+cz_1-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(v normirano enačbo ravnine vstavimo koordinate točke)

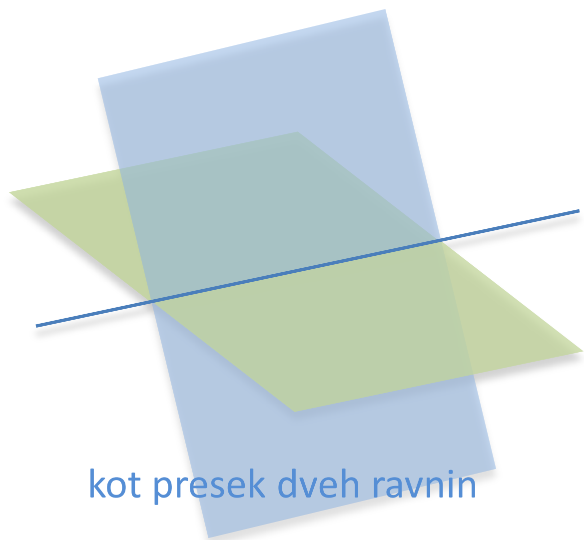
Koliko je točka (0,3,1) oddaljena od ravnine $x+y+2z=2$?

$$d=\frac{\left|1\cdot 0+1\cdot 3+2\cdot 1-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

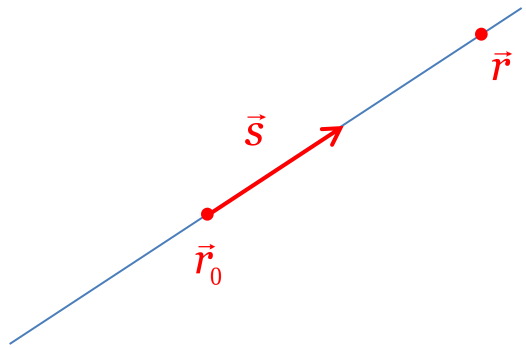
Tudi premico lahko opredelimo na različne načine:







## ENAČBA PREMICE




Označimo $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{s} = (a, b, c)$$

Pogoj, da točka $(x,y,z)$ leži na premici izrazimo vektorsko:
(daljica na premici je vzporedna s smerjo)

$$\boxed{\vec{s} \times \ \vec{r} - \vec{r}_0 \ = \vec{0}}$$

Po komponentah pa dobimo

$$(a, b, c) \times \ x - x_0 \ , \ y - y_0 \ , \ z - z_0 \ =$$

$$= b \ z - z_0 \ - c \ y - y_0 \ , c \ x - x_0 \ - a \ z - z_0 \ , a \ y - y_0 \ - b \ x - x_0 \ = (0, 0, 0),$$

torej

$$b \ z - z_0 \ = c \ y - y_0$$

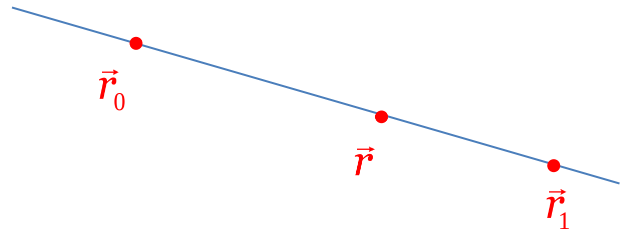
$$c \ x - x_0 \ = a \ z - z_0$$

$$a \ y - y_0 \ = b \ x - x_0$$

Enačbe lahko uredimo v kanonično obliko:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

## PREMICA SKOZI DANI TOČKI




Smer $\vec{s} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ :

Pogoj, da točka $\vec{r}$ leži na premici: $\vec{r}_1 - \vec{r}_0 \times \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{0}$

Enačba po komponentah: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

Enačba premice skozi (1,0,-1) in (2,2,1):

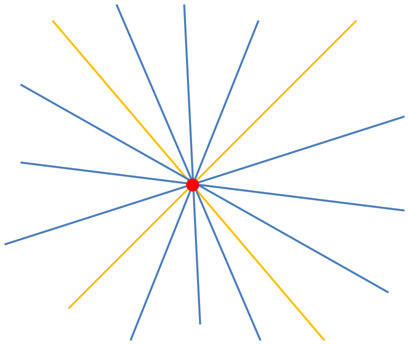
$$\vec{s} = (1, 2, 2), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Če je katera od komponent vektorja smeri enaka 0, se enačba premice poenostavi:

$$\vec{r}_0 = (1, -1, 2), \ \vec{s} = (2, 0, -1) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{-1}, \ y = -1$$

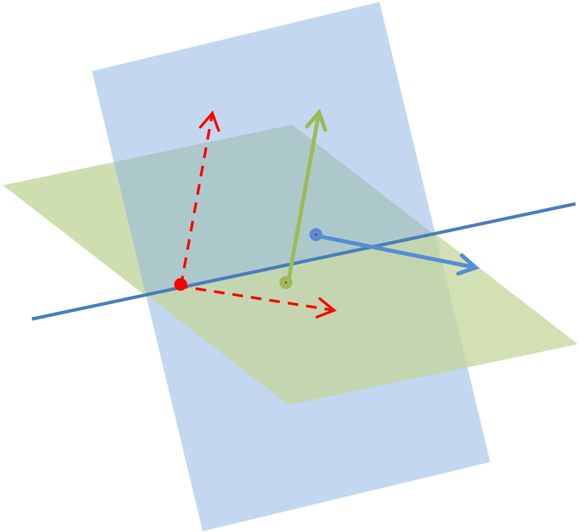
## PREMICA KOT PRESEK DVEH RAVNIN

Skozi točko v ravnini lahko potegnemo nešteto premic. Poljubni dve izmed teh določata točko.

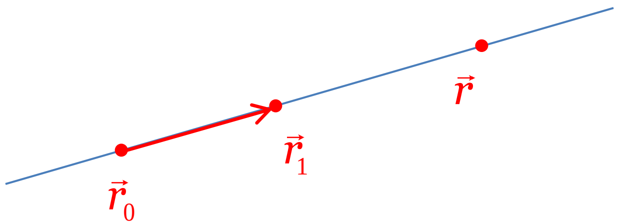


Podobno skozi premico v prostoru lahko postavimo nešteto ravnin. Poljubni dve izmed teh ravnin enolično določata premico.

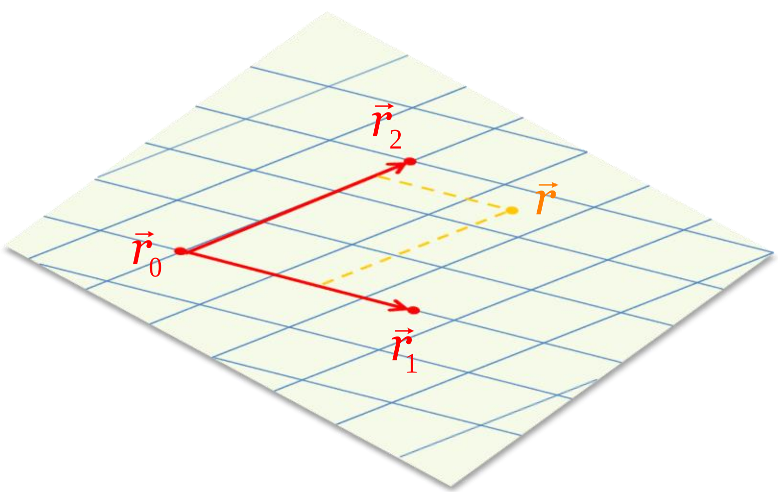
Ravnini z normalami $\vec{n}_0$ in $\vec{n}_1$ določata premico s smerjo $\vec{s} = \vec{n}_0 \times \vec{n}_1$, za $\vec{r}_0$ pa vzamemo eno točko iz preseka.



## PARAMETRIČNI OPIS PREMICE IN RAVNINE




$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s} = \vec{r}_0 + t \cdot \ \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \ , \quad t \in \mathbb{R}$$




$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \cdot \ \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \ + t_2 \cdot \ \vec{r}_2 - \vec{r}_0 \ , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$