IZBRANA POGLAVJA IZ SIMBOLNEGA RAČUNANJA

1. domača naloga (18. 5. 2009) – REŠITVE

1. V *Mathematici* definiramo funkcijo `f` takole:

```
f[s_, n_] := Reverse[Join[Reverse[Take[s,n]],Reverse[Drop[s,n]]]]
```

   (a) Kaj vrne klic `f[{a,b,c,d,e,f},2]` ? **Odg**.: `{c,d,e,f,a,b}`

   (b) Kaj vrne klic `f[s,n]`, kjer je `s` seznam, `n` pa naravno število? Razložite!

   Odg.: Klic `f[s,n]` vrne seznam `s`, zasukan za `n` mest v levo (oziroma za `N-n` mest v desno, če je `N` dolžina seznama). Izraz `Take[s,n]` predstavlja prvih `n` elementov seznama, izraz `Drop[s,n]` pa zadnjih `N-n` elementov. Oba dela dvakrat obrnemo, tako da se ciklična urejenost elementov ne spremeni, na prvo mesto pa pride element, ki je bil prvotno na mestu `n+1`.

2. V množici besed $\{0,1\}^*$ je definirana redukcijska relacija $\to$ takole:

$$\begin{array}{rrcr} P_1: & x001y & \to & x10y, \\ P_2: & x000y & \to & xy, \\ P_3: & x11y & \to & xy, \end{array}$$

   pri čemer sta x in y poljubni besedi.

   (a) Ali je relacija $\to$ noetherska? Zakaj (ne)?

   Odg.: Relacija je noetherska, ker krajša besede.

   (b) Poiščite kak primer, ki kaže, da relacija $\to$ ni polna.

   Odg.: Npr. $\downarrow 010 \xleftarrow{P_1} 0001 \xrightarrow{P_2} 1\downarrow$.

   (c) Relacijo $\to$ napolnite z dodatkom novih prepisovalnih pravil. Polnosti ni treba dokazovati. Naštejte vse reducirane besede (glede na novo relacijo)!

   Odg.: Na podlagi primera iz (b) dodamo pravilo $P_4 : x010y \to x1y$. Relacija še ni polna, kar kaže primer $\downarrow 101 \xleftarrow{P_1} 0011 \xrightarrow{P_3} 00\downarrow$. Zato dodamo pravilo $P_5 : x101y \to x00y$. Relacija še vedno ni polna, kar kaže primer $\downarrow 100 \xleftarrow{P_1} 0010 \xrightarrow{P_4} 01\downarrow$. Zato dodamo še pravilo $P_6 : x100y \to x01y$. Zdaj ne najdemo več besede, ki bi jo lahko reducirali v dve različni reducirani besedi, zato domnevamo, da je dobljena relacija polna. Da je res tako, lahko dokažemo z uporabo izreka o kritičnih parih, vendar naloga tega ne zahteva.

Vse besede dolžine 3 ali več lahko zdaj reduciramo, prav tako tudi 11. Reducirane besede so torej 10, 01, 00, 1, 0 in ε.

3. Naj bo $f_1 = y - x^2$, $f_2 = z - x^3$. Ali je $\{f_1, f_2\}$ Gröbnerjeva baza za $I = \langle f_1, f_2 \rangle$, če je monomska urejenost:

   (a) LEX, $x > y > z$,

   (b) LEX, $y > z > x$?

   Odg.:

   (a) Ne, ker $f = xy - z = xf_1 - f_2$ pripada I, toda $\mathrm{ht}(f) = xy$ ni deljiv ne s $\mathrm{ht}(f_1) = -x^2$ ne s $\mathrm{ht}(f_2) = -x^3$.

   (b) Da, ker je $S(f_1, f_2) \bmod (f_1, f_2) = (yx^3 - zx^2) \bmod (f_1, f_2) = 0$.

4. Naj bo $f_1 = xz^2 - yz$, $f_2 = xyz - yz^3$. Poiščite reducirano Gröbnerjevo bazo polinomskega ideala $J = \langle f_1, f_2 \rangle$ glede na leksikografsko urejenost $(x > y > z)$.

   Odg.: $G = \{f_1, f_2, f_3\}$, kjer je $f_3 = y^2z - yz^4$.