IZBRANA POGLAVJA IZ SIMBOLNEGA RAČUNANJA

2. domača naloga (25. 5. 2009) – REŠITVE

1. Poiščite kakšno polinomsko rešitev rekurzivne enačbe

$$na_{n+2} - a_{n+1} + (2n+1)a_n = 6n^2 + 25n - 2.$$

Odg.: V diferenčni obliki se enačba glasi

$$n\Delta^2 a_n + (2n-1)\Delta a_n + 3na_n = 6n^2 + 25n - 2,$$

torej je $b = \max\{1-2, 1-1, 1-0\} = \max\{-1, 0, 1\} = 1$. Maksimum je dosežen le v zadnjem členu, zato je $P(d)$ konstantni polinom $3d^{\underline{0}} = 3$, ki nima ničel. Edini kandidat za d je torej $\deg f - b = 2 - 1 = 1$. Rešitev poiščemo z nastavkom $a_n = An + B$, kjer sta A, B nedoločena koeficienta. Ker je $\Delta a_n = A$ in $\Delta^2 a_n = 0$, dobimo enačbo $(2n-1)A + 3n(An+B) = 6n^2 + 25n - 2$, od tod pa z izenačitvijo koeficientov pri istih potencah n na levi in desni strani sistem enačb

$$\begin{aligned} 3A &= 6, \\ 2A + 3B &= 25, \\ -A &= -2 \end{aligned}$$

z rešitvijo $A = 2, B = 7$. Edina polinomska rešitev dane enačbe je torej $a_n = 2n + 7$.

2. Poiščite vse polinomske rešitve rekurzivne enačbe

$$3a_{n+2} - na_{n+1} + (n-1)a_n = 0.$$

Odg.: $a_n = A(n^2 - 11n + 27)$, kjer je A poljubna konstanta (gl. predavanja 25. 5. 2009).

3. Poiščite vse polinomske rešitve rekurzivne enačbe

$$(2n+1)a_{n+2} - 4(n+1)a_{n+1} + (2n+3)a_n = 0.$$

Odg.: Ko enačbo prepišemo v diferenčni obliki, dobimo

$$(2n+1)\Delta^2 a_n - 2\Delta a_n = 0.$$

Od tod sledi

$$b = \max\{\deg(2n+1) - 2, \deg(-2) - 1, \deg(0) - 0\} = \max\{-1, -1, -\infty\} = -1,$$

maksimum pa je dosežen pri prvih dveh členih (tu ne smemo pozabiti, da je po dogovoru stopnja ničelnega polinoma enaka $-\infty$). Polinom $P(d)$ se torej glasi

$$P(d) = 2d^{\underline{2}} - 2d^{\underline{1}} = 2d(d-1) - 2d = 2d(d-2).$$

Kandidati za stopnje polinomskih rešitev so $\deg(f) - b = -\infty$ ter ničli polinoma $P(d)$, se pravi 0 in 2. Največje med kandidati je število 2, zato rešitev poiščemo z nastavkom $a_n = An^2 + Bn + C$, kjer so A, B, C nedoločeni koeficienti. Ker je

$$\begin{aligned} \Delta a_n &= A(2n+1) + B, \\ \Delta^2 a_n &= 2A, \end{aligned}$$

dobimo enačbo

$$2A(2n+1) - 2(2An + A + B) = 0.$$

Koeficienta pri n oziroma pri 1 nam dasta enačbi

$$\begin{gathered} 4A - 4A = 0, \\ 2A - 2A - 2B = 0, \end{gathered}$$

od koder sledi $B = 0$. Tako dobimo končno rešitev

$$a_n = An^2 + C,$$

kjer sta A in C poljubni konstanti.

4. Dokažite, da je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} = (2n+1)^2 \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}}.$$

Odg.: Označimo levo stran te enačbe z s_n, desno pa s t_n. Očitno je

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}},$$

prav tako pa je tudi

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= (2n+1)^2 \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}} - (2n-1)^2 \frac{\binom{2n-2}{n-1}^2}{n4^{2n-2}} \\ &= \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}} \left((2n+1)^2 - (2n-1)^2 \left(\frac{n^2}{2n(2n-1)} \right)^2 \frac{n+1}{n} 4^2 \right) \\ &= \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}} \Big((2n+1)^2 - 4n(n+1) \Big) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{(n+1)4^{2n}}. \end{aligned}$$

Tako s_n kot t_n torej zadoščata isti rekurzivni enačbi 1. reda. Ker je $s_0 = 1$ in tudi $t_0 = 1$, sledi z indukcijo po n, da je $s_n = t_n$ za vsa naravna števila n.

5. Z Gosperjevim algoritmom izračunajte vsoto

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+2) \binom{2k}{k}.$$

Odg.: Označimo $t_k = (3k+2)\binom{2k}{k}$. Potem je

$$t_{k+1}/t_k = \frac{2(2k+1)(3k+5)}{(k+1)(3k+2)}.$$

To racionalno funkcijo zapišemo v obliki $\frac{a(k)}{b(k)} \cdot \frac{c(k+1)}{c(k)}$, kjer je $\gcd(a(k), b(k+h)) = 1$ za vse $h \in \mathbb{N}$. Če v faktorju $3k+2$ povečamo k za 1, dobimo ravno faktor $3k+5$, zato damo ta par faktorjev v ulomek $\frac{c(k+1)}{c(k)}$. Tako dobimo $a(k) = 2(2k+1)$, $b(k) = k+1$, $c(k) = 3k+2$. Poiskati moramo polinomsko rešitev enačbe $a(k)x(k+1) - b(k-1)x(k) = c(k)$, torej

$$2(2k+1)x(k+1) - kx(k) = 3k+2.$$

Opazimo, da je rešitev te enačbe $x(k) = 1$. Od tod sledi, da hipergeometrično zaporedje

$$s_k = \frac{b(k-1)x(k)}{c(k)} t_k = k\binom{2k}{k}$$

zadošča enačbi $s_{k+1} - s_k = t_k$. Če to seštejemo po k od 0 do $n-1$, dobimo, da je

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+2)\binom{2k}{k} = t_n + s_n - s_0 = (3n+2)\binom{2n}{n} + n\binom{2n}{n} - 0 = 2(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

6. Z Gosperjevim algoritmom izračunajte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 3^k.$$

Odg.: Za sumand $t_k = k^2 3^k$ izračunamo:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 3\frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{a(k)}{b(k)} \frac{c(k+1)}{c(k)},$$

$$a(k) = 3, \quad b(k) = 1, \quad c(k) = k^2.$$

Zdaj moramo poiskati polinomsko rešitev enačbe

$$3x(k+1) - x(k) = k^2.$$

Zgornja meja za stopnjo polinomske rešitve $x(k)$ je enaka 2, torej vstavimo

$$x(k) = Ak^2 + Bk + C$$

v gornjo enačbo in izenačimo koeficiente pri istih potencah k. Tako dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2A &= 1, \\ 6A + 2B &= 0, \\ 3A + 3B + 2C &= 0 \end{aligned}$$

z rešitvijo $A = 1/2, B = -3/2$, $C = 3/2$, torej $x(k) = (k^2 - 3k + 3)/2$. Odtod sledi, da zaporedje $s_k = b(k-1)x(k)t_k/c(k) = (k^2 - 3k + 3)3^k/2$ zadošča diferenčni enačbi

$$s_{k+1} - s_k = t_k.$$

Če obe strani te enačbe seštejemo po k od 1 do $n-1$, dobimo končni rezultat

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 3^k = t_n + s_n - s_1 = n^2 3^n + \frac{(n^2 - 3n + 3)3^n}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}((n^2 - n + 1)3^n - 1).$$