IZBRANA POGLAVJA IZ SIMBOLNEGA RAČUNANJA

Pisni izpit 15. 6. 2009 – REŠITVE

1. Funkcija `f[p]` je definirana v *Mathematici* takole:

```
f[{_}] = 0;
f[p_List] := Count[First[p] - Rest[p], _?Positive] + f[Rest[p]]
```

   (a) Kaj vrne klic `f[{4, 3, 2, 1}]` ?
   Odg.: `6`

   (b) Kaj vrne klic `f[p]`, kjer je `p` neka permutacija množice $\{1, 2, ..., n\}$? Razložite!
   Odg.: Klic `f[p]` vrne število parov (i, j), za katere velja: $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, `i < j` in `p[[i]] > p[[j]]` (torej je `f[p]` število *inverzij* permutacije `p`).
   Razlaga (dokaz z indukcijo po n): Pri $n = 1$ gornja trditev drži, saj takih parov ni. Naj bo $n > 1$. Ukaz `Count[First[p] - Rest[p], _?Positive]` prešteje, koliko elementov seznama `{p[[1]] - p[[2]], p[[1]] - p[[3]], ..., p[[1]] - p[[n]]}` je pozitivnih, torej vrne število n_1 parov oblike $(1, j)$, za katere je `1 < j` in `p[[1]] > p[[j]]`. Rekurzivni klic `f[Rest[p]]` pa po indukcijski predpostavki vrne število n_2 parov (i, j), za katere je `1 < i < j` in `p[[i]] > p[[j]]`. Torej je `f[p]` $= n_1 + n_2$ res število parov (i, j), za katere je `i < j` in `p[[i]] > p[[j]]`.

2. Naj bo $\mathcal{T}$ množica termov, sestavljenih iz konstant $p, q, r, \ldots$, enomestnega operatorja $not(x)$ ter dvomestnih operatorjev $and(x, y)$ in $or(x, y)$. V $\mathcal{T}$ definirajmo redukcijsko relacijo $\to$ takole:

$$\begin{array}{rrcl} P_1: & not(not(x)) & \to & x, \\ P_2: & not(or(x,y)) & \to & and(not(x), not(y)), \\ P_3: & not(and(x,y)) & \to & or(not(x), not(y)), \\ P_4: & and(x, or(y,z)) & \to & or(and(x,y), and(x,z)), \\ P_5: & and(or(y,z), x) & \to & or(and(y,x), and(z,x)), \end{array}$$

pri čemer so x, y in z poljubni termi iz $\mathcal{T}$.

   (a) Poiščite kakšno reducirano obliko terma $t = and(or(p, q), or(r, s))$!
   Odg.: Npr.

$$\begin{aligned} t = and(or(p,q), or(r,s)) &\xrightarrow{P_4} or(and(or(p,q), r), and(or(p,q), s)) \\ &\xrightarrow{2\times P_5} or(or(and(p,r), and(q,r)), or(and(p,s), and(q,s))) \downarrow \end{aligned}$$

   (b) Naj bo preslikava $f : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ definirana rekurzivno s predpisom

$$\begin{aligned} f(c) &= 2, \quad \text{če } c \text{ konstanta}, \\ f(not(x)) &= 2^{f(x)}, \\ f(and(x,y)) &= f(x)f(y), \\ f(or(x,y)) &= f(x) + f(y) + 1. \end{aligned}$$

   Pokažite, da za vse $x, y \in \mathcal{T}$ velja: $x \to y \Longrightarrow f(x) > f(y)$. Ali je relacija $\to$ noetherska? Odgovor utemeljite!

Odg.: Za vse terme $t \in \mathcal{T}$ velja $f(t) \geq 2$, o čemer se lahko brž prepričamo z indukcijo po dolžini terma t. Pokažimo zdaj, da za vse $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ in $i \in \{1,2,3,4,5\}$ iz $t_1 \xrightarrow{P_i} t_2$ sledi $f(t_1) > f(t_2)$.

$i = 1$: $f(not(not(x)) = 2^{2^{f(x)}} > f(x)$ $\checkmark$

$i = 2$: $f(not(or(x,y))) = 2^{f(x)+f(y)+1} > f(and(not(x), not(y))) = 2^{f(x)+f(y)}$ $\checkmark$

$i = 3$: $f(not(and(x,y))) = 2^{f(x)f(y)} > f(or(not(x), not(y))) = 2^{f(x)} + 2^{f(y)} + 1$ $\checkmark$

(Utemeljitev veljavnosti neenačbe $2^{ab} > 2^a + 2^b + 1$ za naravni števili $a, b \geq 2$: Pri $a = b = 2$ neenačba velja. Če a ali b povečamo za 1, se leva stran poveča za faktor $2^b \geq 4$ ali $2^a \geq 4$, desna stran pa za manj kot faktor 2, torej neenačba velja po indukciji.)

$i = 4$: $f(and(x, or(y,z))) = f(x)f(y) + f(x)f(z) + f(x) > f(or(and(x,y), and(x,z))) = f(x)f(y) + f(x)f(z) + 1$ $\checkmark$

$i = 5$: $f(and(or(y,z), x)) = f(y)f(x) + f(z)f(x) + f(x) > f(or(and(y,x), and(z,x))) = f(y)f(x) + f(z)f(x) + 1$ $\checkmark$

Za vse $x, y \in \mathcal{T}$ torej velja: $x \to y \Longrightarrow f(x) > f(y)$. Neskončni padajoči verigi $t_1 \to t_2 \to t_3 \to \cdots$ bi potemtakem ustrezala neskončna padajoča veriga naravnih števil $f(t_1) > f(t_2) > f(t_3) > \cdots$, ki pa ne obstaja, kar pomeni, da je relacija $\to$ noetherska.

(c) Ali je relacija $\to$ polna? Dokažite ali poiščite protiprimer!

Odg.: Relacija $\to$ ni polna, ker nima enoličnih reduciranih oblik. Zgled je npr. term t iz točke (a), saj ga lahko reduciramo tudi takole:

$$\begin{aligned} t = and(or(p,q), or(r,s)) &\xrightarrow{P_5} or(and(p, or(r,s)), and(q, or(r,s))) \\ &\xrightarrow{2\times P_4} or(or(and(p,r), and(p,s)), or(and(q,r), and(q,s))) \downarrow \end{aligned}$$

3. Poiščite vse polinomske rešitve a_k linearne rekurzivne enačbe 2. reda

$$(n^2 - 2n - 2)\, a_{n+2} - (3n-7)(n+1)\, a_{n+1} + 2(n^2 - 3)\, a_n \;=\; n^2 - n + 3.$$

Odg.: $a_n = C(n^2 - 1) + n$, kjer je C poljubna konstanta.

4. Z Gosperjevim algoritmom izrazite vsoto

$$\sum_{k=0}^{n} (4k^2 + 7k + 4) \frac{(2k)!}{(k+2)!} (-1)^k$$

v zaključeni obliki!

Odg.: Označimo $t_k = (4k^2 + 7k + 4)(2k)!/(k+2)!(-1)^k$. Hipergeometrična rešitev enačbe $s_{k+1} - s_k = t_k$ je potem

$$s_k \;=\; \frac{(2k)!}{(k+1)!} (-1)^{k+1},$$

dana vsota pa je enaka

$$t_n + s_n - s_0 \;=\; (4n^2 + 6n + 2) \frac{(2n)!}{(n+2)!} (-1)^n + 1.$$