IZBRANA POGLAVJA IZ SIMBOLNEGA RAČUNANJA

Pisni izpit 29. 6. 2009 – Rešitve

1. Funkcija `f[n]` je definirana v *Mathematici* takole:

```
f[n_Integer] := Apply[Times, Map[Last, FactorInteger[n]]] == 1
```

   (a) Kaj vrne klic `f[12]` in kaj klic `f[15]` ? (10 točk)
   Odg.: Klic `f[12]` vrne `False`, klic `f[15]` pa `True`.

   (b) Kaj vrne klic `f[n]`, kjer je `n` naravno število? Razložite! (15 točk)
   Odg.: Klic `f[n]` vrne `True` natanko tedaj, ko število `n` ni deljivo s kvadratom nobenega praštevila.
   Razlaga: Vrednost izraza `Map[Last, FactorInteger[n]]` je seznam eksponentov v razcepu števila `n` na prafaktorje, produkt teh eksponentov pa je enak 1 natanko tedaj, ko so vsi eksponenti enaki 1, torej ko število `n` ni deljivo s kvadratom praštevila.

   Pojasnila o uporabljenih sistemskih funkcijah:

```
FactorInteger[n] gives a list of the prime factors of the integer n,
                 together with their exponents.
```

   Zgled: `FactorInteger[12]` vrne `{{2, 2}, {3, 1}}`.

```
Times[x1,x2,...,xn] represents a product of terms.
Last[expr] gives the last element in expr.
lhs==rhs returns True if lhs and rhs are identical.
```

2. Naj bo $f_1 = x^2y - xy^2 + x$, $f_2 = xy + y^2$.

   (a) Poiščite reducirano Gröbnerjevo bazo za $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ v leksikografski urejenosti, $x > y$. (16 točk)
   Odg.: $G = \{g_1, g_2\}$, kjer je $g_1 = x + 2y^3$, $g_2 = y^4 - y^2/2$.

   (b) Ali polinomi $p_1 = y^2 + 2y$, $p_2 = x^2 + xy$, $p_3 = x^3 + y^3$ pripadajo I? (9 točk)
   Odg.:
   $p_1 \notin I$, ker vodilni monom $lm(p_1) = y^2$ ni deljiv niti z $lm(g_1) = x$ niti z $lm(g_2) = y^4$.
   $p_2 \in I$, ker je $p_2 = (x + y - 2y^3)g_1 + 4y^2g_2$.
   $p_3 \in I$, ker je $p_3 = (x^2 + y^2 - 2xy^3)g_1 + 2(x - y + 2xy^2)g_2$.

3. Poiščite vse polinomske rešitve a_n linearne rekurzivne enačbe 2. reda

$$(n+1)a_{n+2} + na_{n+1} + (n-1)a_n \;=\; 3n^2 + 2. \qquad \text{(25 točk)}$$

   Odg.: Edina polinomska rešitev je $a_n = n - 1$.

4. Z Gosperjevim algoritmom izrazite vsoto

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}$$

v zaključeni obliki! (25 točk)

Odg.: Naj bo $t_k = (-1)^k \frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}$. Z Gosperjevim algoritmom ugotovimo, da je

$$s_k = \frac{2k-1}{2(1-2n)} t_k$$

rešitev enačbe

$$s_{k+1} - s_k = t_k.$$

Če to seštejemo po k od 0 do $2n-1$, dobimo vsoto v zaključeni obliki:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} = t_{2n} + s_{2n} - s_0 = 1 + \frac{4n-1}{2(1-2n)} + \frac{1}{2(1-2n)} = \frac{1}{1-2n}.$$

Čas pisanja: 100 minut
Literatura in zapiski so dovoljeni.
Ocene:

80% – 100%:	10
70% – 79%:	9
60% – 69%:	8
50% – 59%:	7
40% – 49%:	6

Ocene bodo objavljene na strani `http://fmf.uni-lj.si/~petkovsek/ipsr.htm` v ponedeljek, 6. 7. 2009, ob 10h. Vpis ocen bo v ponedeljek, 6. 7. 2009, od 16h do 17h v sobi 4.09, Jadranska 21/IV. Če takrat ne utegnete, lahko indeks in izpolnjeno prijavnico pustite pri vratarici na Jadranski 21, kjer indeks kasneje spet dvignete.

Naslednji pisni izpit bo sredi septembra.