Diničev problem

Kristina Jemec

Fakulteta za matematiko in fiziko

24. april 2009

Diničev problem

Problem

Predstavljajmo si n^2 celic razporejenih v kvadrat oblike $n \times n$ in naj par (i, j) določa celico v i-ti vrstici in j-tem stolpcu. Predpostavimo,da imamo za vsako celico (i, j) dano množico $C(i, j)$ v kateri je n barv.
Če za vsako celico (i, j) izberemo barvo iz njene množice $C(i, j)$, ali je možno pobarvati celoten prostor, tako da se v nobeni vrstici in nobenem stolpcu ne ponovi barva?

Kromatično število

Definicija

Množica vozlišč $A \subseteq V(G)$ je neodvisna, če nobeni dve vozlišči iz A nista sosednji.

Kromatično število

Definicija

Množica vozlišč $A \subseteq V(G)$ je neodvisna, če nobeni dve vozlišči iz A nista sosednji.

Definicija

Kromatično število $\chi(G)$ grafa $G = (V, E)$ je najmanjše število neodvisnih množic, ki razdelijo množico vozlišč V.

Seznamsko kromatično število

Definicija

Dan je graf G in za vsako vozlišče $v \in V(G)$ množica dopustnih barv $C(v)$. Preslikava $f : V(G) \longrightarrow \bigcup_{v \in V(G)} C(v)$ je seznamsko barvanje grafa G, če velja:

1. $\forall v \in V(G) : f(v) \in C(v)$

Seznamsko kromatično število

Definicija

Dan je graf G in za vsako vozlišče $v \in V(G)$ množica dopustnih barv $C(v)$. Preslikava $f : V(G) \longrightarrow \bigcup_{v \in V(G)} C(v)$ je seznamsko barvanje grafa G, če velja:

1. $\forall v \in V(G) : f(v) \in C(v)$
2. $\forall u, v \in V(G) : (u \sim v \Rightarrow f(u) \neq f(v))$

Seznamsko kromatično število

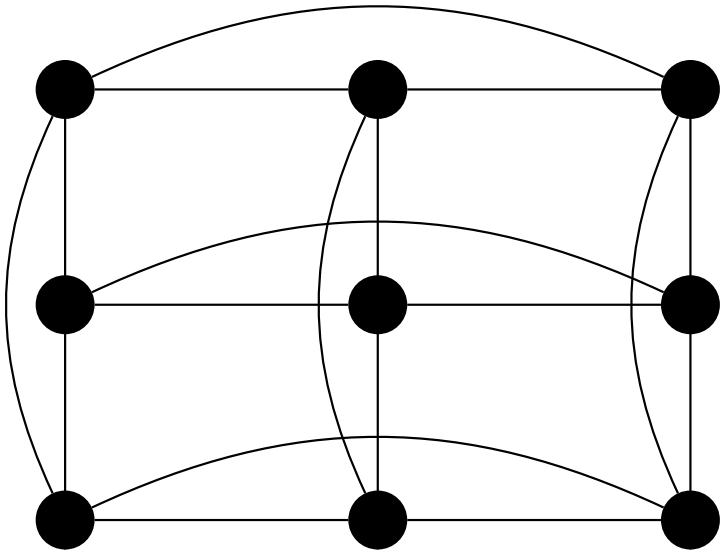
Definicija

Dan je graf G in za vsako vozlišče $v \in V(G)$ množica dopustnih barv $C(v)$. Preslikava $f : V(G) \longrightarrow \bigcup_{v \in V(G)} C(v)$ je seznamsko barvanje grafa G, če velja:

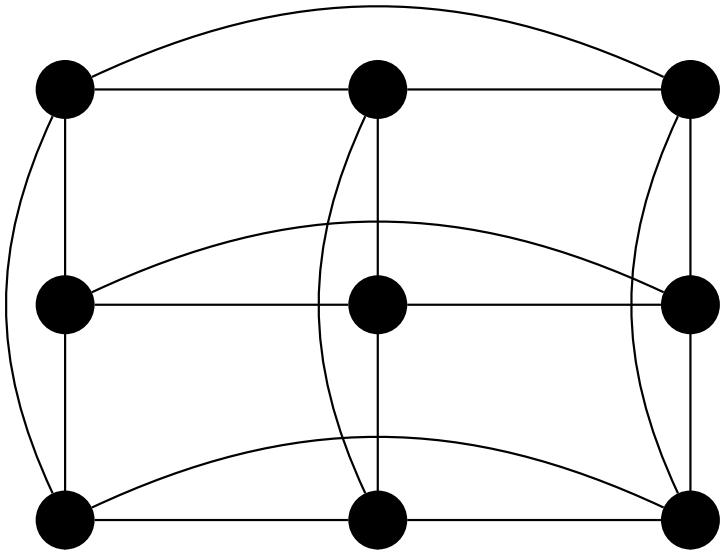
1. $\forall v \in V(G) : f(v) \in C(v)$
2. $\forall u, v \in V(G) : (u \sim v \Rightarrow f(u) \neq f(v))$

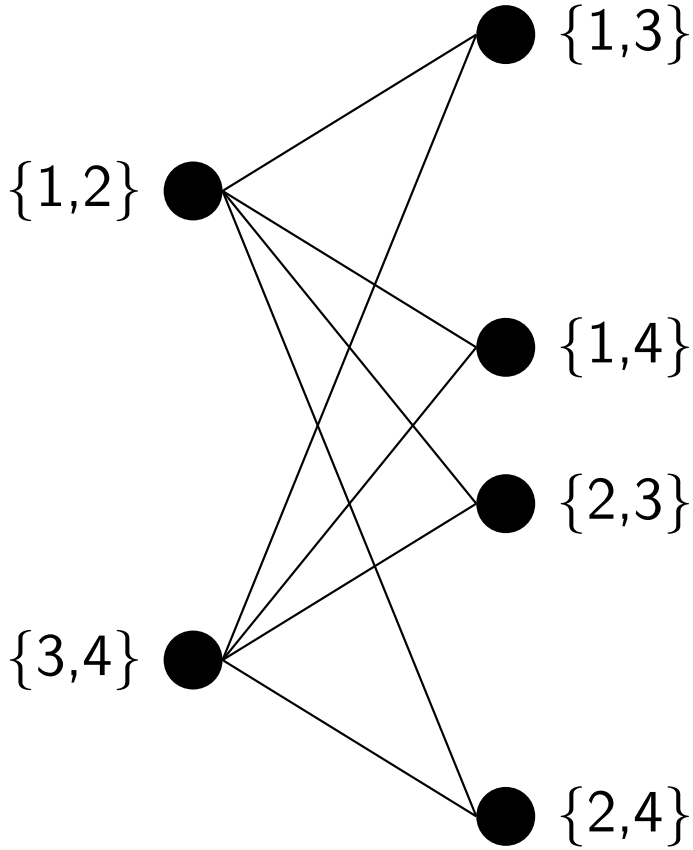
Seznamsko kromatično število $\chi_\ell(G)$ grafa G je najmanjši $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja: Za poljubne množice dopustnih barv $C(v)$, ki imajo vse moč k, obstaja seznamsko barvanje grafa G.

Primer grafov S_3 in $K_{2,4}$



Primer grafov S_3 in $K_{2,4}$



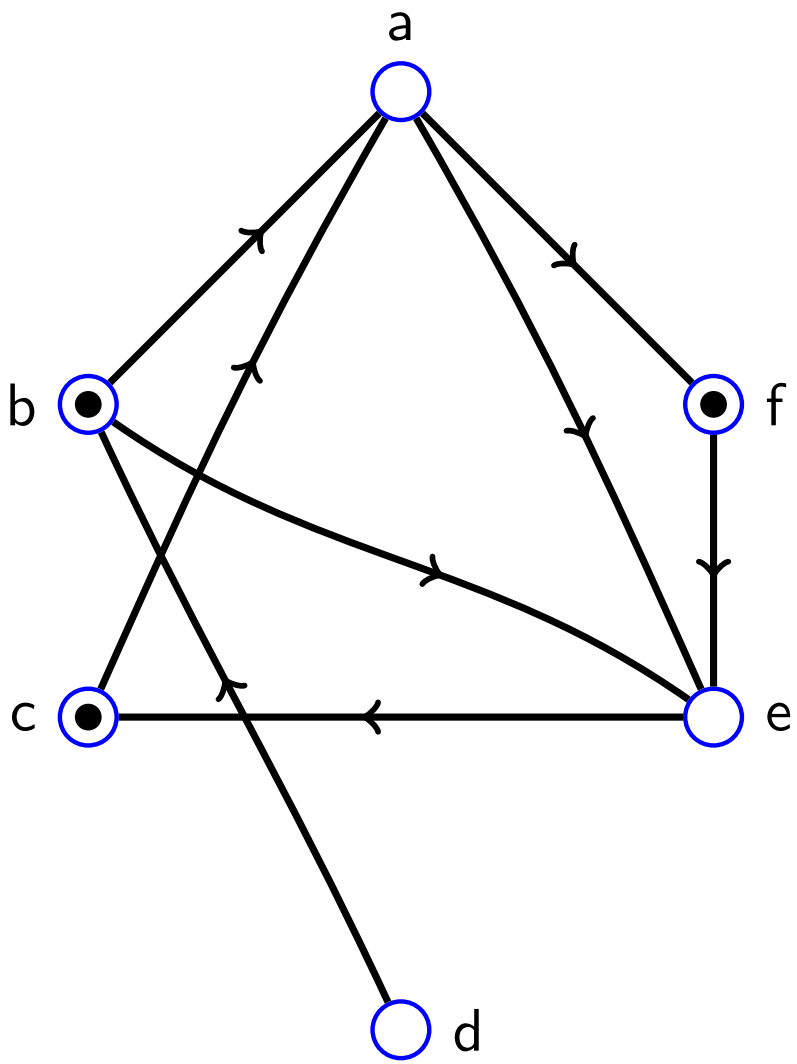


Definicija

Naj bo $\vec{G} = (V, E)$ *usmerjen graf.* *Jedro* $K \subseteq V$ *je takšna podmnožica vozlišč, da velja:*

1. K *je neodvisen v* G
2. $\forall u \notin K$ *obstaja vozlišče* $v \in K$ *s povezavo* $u \longrightarrow v$

Zgled



Lema

Naj bo $\vec{G} = (V, E)$ usmerjen graf. Predpostavimo, da imamo za vsako vozlišče $v \in V$ množico barv $C(v)$, ki je večja kot izhodna stopnja, $|C(v)| \geq d^+(v) + 1$. Če vsak induciran podgraf $\vec{G}$ vsebuje jedro, potem obstaja seznamsko barvanje G z barvo iz $C(v)$ $\forall v$.

Definicija

Prireditev M iz $G = (X \cup Y, E)$ imenujemo stabilna, če drži naslednji pogoj: kadarkoli je $uv \in E \setminus M, u \in X, v \in Y$, potem velja ali $uy \in M$, kjer je $y > v$ v $N(u)$, ali $xv \in M$, kjer je $x > u$ v $N(v)$, ali oboje

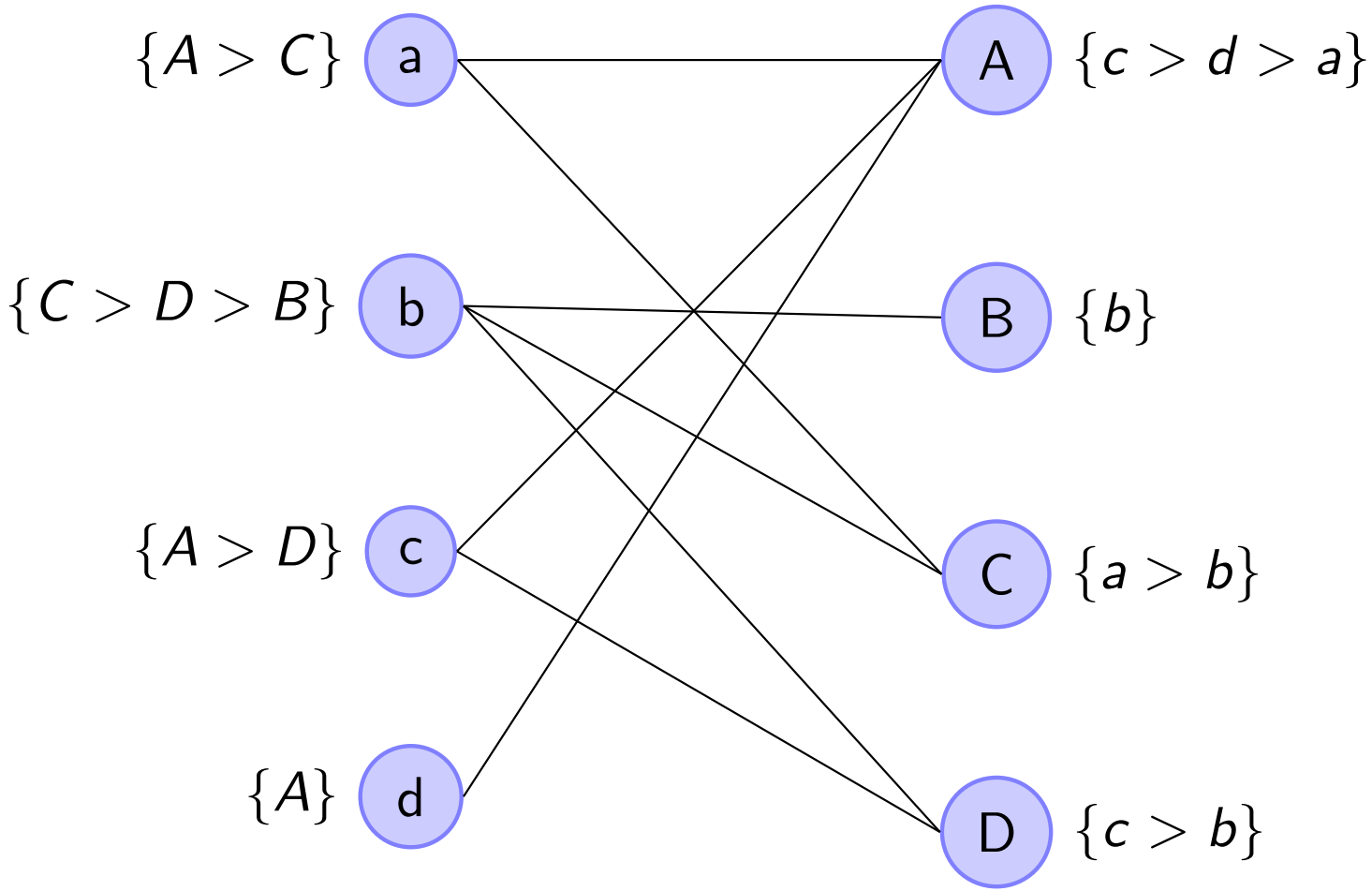
Definicija

Prireditev M iz $G = (X \cup Y, E)$ imenujemo stabilna, če drži naslednji pogoj: kadarkoli je $uv \in E \setminus M, u \in X, v \in Y$, potem velja ali $uy \in M$, kjer je $y > v$ v $N(u)$, ali $xv \in M$, kjer je $x > u$ v $N(v)$, ali oboje

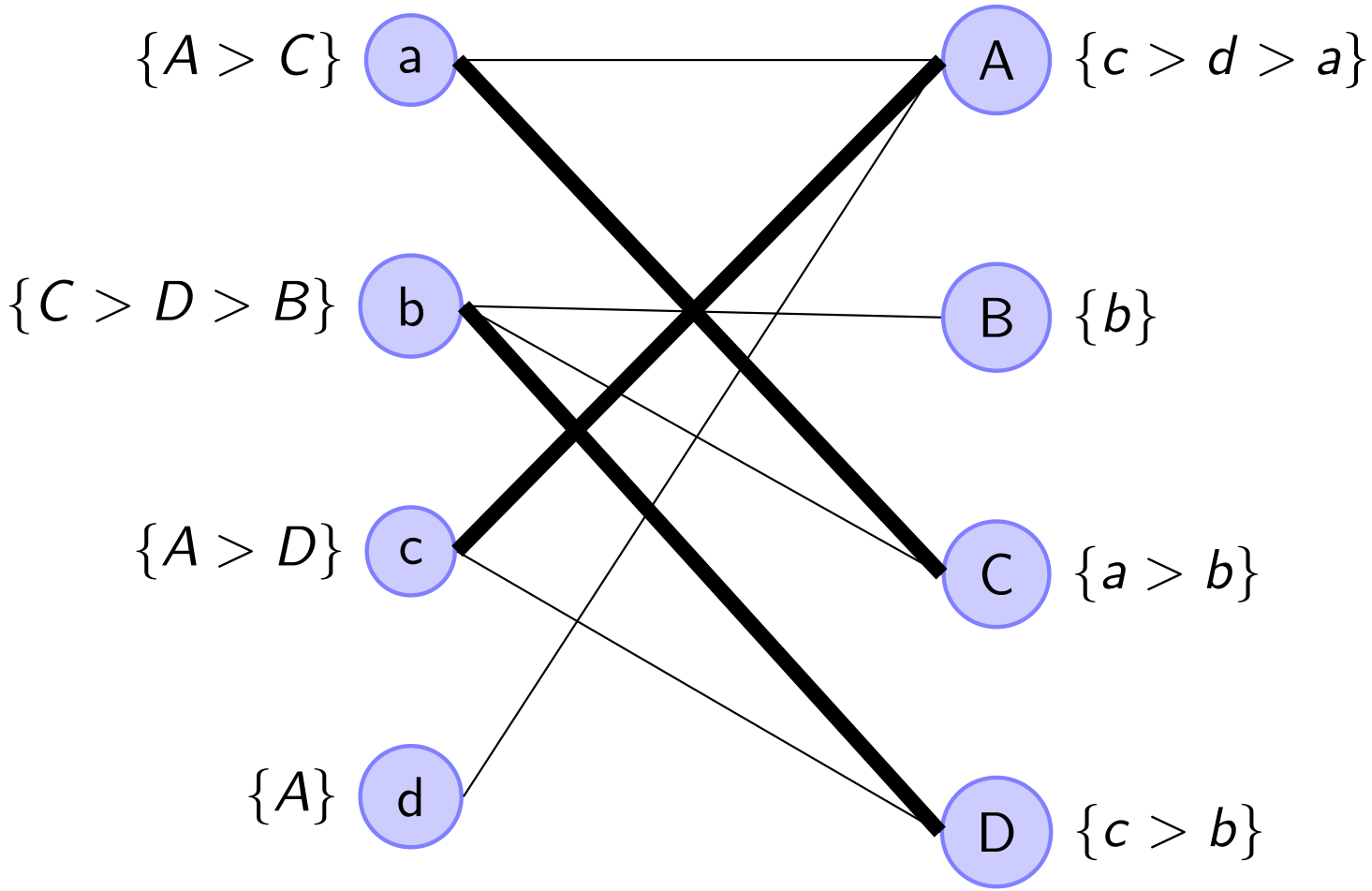
Lema

Stabilna prireditev vedno obstaja.

Zgled



Zgled



Izrek

Za vsak n velja $\chi_\ell(S_n) = n$

1	2	3
3	1	2
2	3	1

