Dirichletov princip in metoda dvojnega štetja

Katja Kuster

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

27. marec 2009

Dirichletov princip

Dirichletov princip

Definicija

Dirichletov princip ali načelo golobnjaka:
Če **n** *predmetov razporedimo v* **r** *škatel, pri čemer je* $\mathbf{n} > \mathbf{r}$, *potem vsaj ena od škatel vsebuje* **več kot 1** *predmet.*

Dirichletov princip

Definicija

Dirichletov princip ali načelo golobnjaka:
Če **n** *predmetov razporedimo v* **r** *škatel, pri čemer je* $\mathbf{n} > \mathbf{r}$, *potem vsaj ena od škatel vsebuje* **več kot 1** *predmet.*

Trditev

$|N| = n > r = |R|$
Naj bo $f : N \longrightarrow R$ *preslikava.*

$$\Longrightarrow \exists\, a \in R : |f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$$

Dirichletov princip

Definicija

Dirichletov princip ali načelo golobnjaka:
Če **n** *predmetov razporedimo v* **r** *škatel, pri čemer je* $\mathbf{n} > \mathbf{r}$, *potem vsaj ena od škatel vsebuje* **več kot 1** *predmet.*

Trditev

$|N| = n > r = |R|$
Naj bo $f : N \longrightarrow R$ *preslikava.*

$$\Longrightarrow \exists\, a \in R : |f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$$

Trditev

Iz množice $N = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ *vzamemo poljubnih* $n + 1$ *števil. Potem sta si 2 izmed izbranih števil tuji.*

Trditev

$A \subseteq \{1, ..., 2n\}, \quad |A| = n + 1$

$$\Longrightarrow \exists\, x, y \in A : x|y$$

Trditev

$A \subseteq \{1, ..., 2n\}, \quad |A| = n + 1$

$$\Longrightarrow \exists\, x, y \in A : x|y$$

Trditev

V vsakem zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *dolžine* $mn + 1$ *različnih realnih števil* $\exists$:

Trditev

$A \subseteq \{1, ..., 2n\}, \quad |A| = n + 1$

$$\Longrightarrow \exists\, x, y \in A : x|y$$

Trditev

V vsakem zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *dolžine* $mn + 1$ *različnih realnih števil* $\exists$ *:*

- *naraščajoče podzaporedje dolžine* $m + 1$*:*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$$

Trditev

$A \subseteq \{1, ..., 2n\}, \quad |A| = n + 1$

$$\Longrightarrow \exists\, x, y \in A : x|y$$

Trditev

V vsakem zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *dolžine* $mn + 1$ *različnih realnih števil* $\exists$ *:*

- *naraščajoče podzaporedje dolžine* $m + 1$*:*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$$

- *ali padajoče podzaporedje dolžine* $n + 1$*:*

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$$

Trditev

$A \subseteq \{1, ..., 2n\}, \quad |A| = n + 1$

$$\Longrightarrow \exists\, x, y \in A : x|y$$

Trditev

V vsakem zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *dolžine* $mn + 1$ *različnih realnih števil* $\exists$ *:*

- *naraščajoče podzaporedje dolžine* $m + 1$*:*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$$

- *ali padajoče podzaporedje dolžine* $n + 1$*:*

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$$

- *ali oboje.*

Definicija

Polni graf K_n je graf z **n** *vozlišči, v katerem sta vsaki dve vozlišči sosednji.*

Definicija

Polni graf K_n je graf z **n** *vozlišči, v katerem sta vsaki dve vozlišči sosednji.*

Definicija

Dimnezija polnega grafa K_n:

$\mathbf{d_n}$ = *najmanjše tako število m, da obstaja množica permutacij* $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\} \in S_n$,
tako da za $\forall\, i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *obstaja s, tako da sta i in j v* π_s *pred k.*

Definicija

Polni graf K_n je graf z **n** *vozlišči, v katerem sta vsaki dve vozlišči sosednji.*

Definicija

Dimnezija polnega grafa K_n:

d_n $=$ *najmanjše tako število m, da obstaja množica permutacij* $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\} \in S_n$,
tako da za $\forall\, i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *obstaja s, tako da sta i in j v* π_s *pred k.*

- $d_{n+1} \geq d_n$

Trditev

$$d_n \geq \log_2 \log_2 n$$

Trditev

$$d_n \geq \log_2 \log_2 n$$

Trditev

Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cela števila, ki niso nujno različna. Tedaj obstaja množica zaporednih števil $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, katerih vsota

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i$$

je večkratnik števila n.

Metoda dvojnega štetja

Metoda dvojnega štetja

Definicija

Naj bosta A in B dve končni množici:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

Metoda dvojnega štetja

Definicija

Naj bosta A in B dve končni množici:
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
Incidenčna matrika $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \, R \, b_j, \\ 0, & \textit{sicer}. \end{cases}$$

Metoda dvojnega štetja

Definicija

Naj bosta A in B dve končni množici:
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
Incidenčna matrika $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \, R \, b_j, \\ 0, & sicer. \end{cases}$$

Trditev

$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Definicija

N-to harmonično število:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Definicija

N-to harmonično število:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Trditev

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Definicija

N-to harmonično število:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Trditev

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Izrek

Če graf G z n vozlišči ne vsebuje $4-$ciklov, potem:

$$|E| \leq \lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \rfloor$$

Trditev

Obstaja natančno $\mathbf{p^2}$ *rešitev (x,y,z) enačbe* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *in zato (z izjemo rešitve 0) natančno* $\frac{p^2-1}{p-1} = \mathbf{p+1}$ *vozlišč v grafu* G_p *stopnje* p.

Trditev

Obstaja natančno $\mathbf{p^2}$ *rešitev (x,y,z) enačbe* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *in zato (z izjemo rešitve 0) natančno* $\frac{p^2-1}{p-1} = \mathbf{p+1}$ *vozlišč v grafu* G_p *stopnje p.*

Lema

Spernerjeva lema

Število malih "tribarvnih" trikotnikov v triangulaciji velikega trikotnika z vozlišči V_1, V_2 *in* V_3 *je vedno neničelno.*

Trditev

Obstaja natančno $\mathbf{p^2}$ *rešitev (x,y,z) enačbe* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *in zato (z izjemo rešitve 0) natančno* $\frac{p^2-1}{p-1} = \mathbf{p+1}$ *vozlišč v grafu* G_p *stopnje p.*

Lema

Spernerjeva lema

Število malih "tribarvnih" trikotnikov v triangulaciji velikega trikotnika z vozlišči V_1, V_2 *in* V_3 *je vedno neničelno.*

Izrek

Brouwerjev izrek o fiksni točki:

Vsaka zvezna preslikava $\mathbf{f} : \mathbf{B^n} \longrightarrow \mathbf{B^n}$ *na enotski krogli ima fiksno točko, t.j.* $\exists x \in B^n$, *tako da velja:* $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x}$.