Dokazi iracionalnosti

Alja Balažic

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

20. marec 2009

Odkritje iracionalnih števil

PITAGOREJCI

Odkritje iracionalnih števil

PITAGOREJCI

- **470 pr.n.št.**
- Hipasus izda skrivnost, da se $\sqrt{2}$ ne da izraziti kot ulomek.
- Pitagorejci so ga zato ubili, saj je ta ugotovitev nasprotovala njihovi filozofiji - pojem 'število' so dojemali kot 'racionalno število'.

Iracionalna števila

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, imenujemo* ***iracionalna števila****.*

Iracionalna števila

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, imenujemo* ***iracionalna števila****.*

- Imajo neskončen **ne**periodičen decimalni zapis, torej jih ni moč zapisati v obliki ulomka $\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, ... (alebraična števila)
- e, $ln2$, π, ... (transcendentna števila)

Eulerjevo število e

Trditev

e je iracionalno število.

Eulerjevo število e

Trditev

e je iracionalno število.

- Dokaz: Johann Heinrich Lambert (1761)
- $e \approx 2,7182818284590 4523...$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

1. *To je polinom oblike* $f(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ *s koeficienti* $c_i \in \mathbb{Z}$.

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

1. *To je polinom oblike* $f(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ *s koeficienti* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) \in (0, \dfrac{1}{n!})$.

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

1. *To je polinom oblike* $f(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ *s koeficienti* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) \in (0, \dfrac{1}{n!})$.
3. $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \geq 0$.

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

1. *To je polinom oblike* $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ *s koeficienti* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) \in (0, \frac{1}{n!})$.
3. $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \geq 0$.

Trditev

e^r *je iracionalno število* $\forall r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Lema

Naj bo dana funkcija $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ *za nek fiksen* $n \geq 1$.

1. *To je polinom oblike* $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ *s koeficienti* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) \in (0, \frac{1}{n!})$.
3. $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \geq 0$.

Trditev

e^r *je iracionalno število* $\forall r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

- $n! > e(\frac{n}{e})^n$

Število π

- Da je π iracionalno število je vedel že Aristotel, ko je trdil, da obseg kroga ni izmerljiv.
- Prvi dokaz: Johann Heinrich Lambert (1766).
- $\pi \approx 3,141592653589... \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113}$

Število π

- Da je π iracionalno število je vedel že Aristotel, ko je trdil, da obseg kroga ni izmerljiv.
- Prvi dokaz: Johann Heinrich Lambert (1766).
- $\pi \approx 3,141592653589... \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113}$

Trditev

π^2 je iracionalno število.

Riemannova funkcija zeta

Definicija

Riemannova funkcija zeta $\zeta(s)$ je definirana za vsako kompleksno število s, $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Riemannova funkcija zeta

Definicija

Riemannova funkcija zeta $\zeta(s)$ je definirana za vsako kompleksno število s, $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Trditev

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$