Eulerjeva in Möbiusova funkcija

Marko Petkovšek

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

20. februar 2009

Eulerjeva funkcija

Eulerjeva funkcija

Definicija

Za vse $n \in \mathbb{N}$ s $\varphi(n)$ označimo število celih števil iz množice $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, ki so tuja številu n. Preslikavo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ imenujemo Eulerjeva funkcija.

Eulerjeva funkcija

Definicija

Za vse $n \in \mathbb{N}$ s $\varphi(n)$ označimo število celih števil iz množice $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, ki so tuja številu n. Preslikavo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ imenujemo Eulerjeva funkcija.

Zgledi

n	$\{0, 1, \ldots, n-1\}$	$\varphi(n)$
1	$\{\mathbf{0}\}$	1
2	$\{0, \mathbf{1}\}$	1
3	$\{0, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$	2
4	$\{0, \mathbf{1}, 2, \mathbf{3}\}$	2
5	$\{0, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$	4
6	$\{0, \mathbf{1}, 2, 3, 4, \mathbf{5}\}$	2

Vprašanje: $\varphi(10^{10}) = \varphi(10000000000) = ?$

Vprašanje: $\varphi(10^{10}) = \varphi(10000000000) = ?$

Trditev

Naj bo p praštevilo. Potem je $\varphi(p) = p - 1$.

Vprašanje: $\varphi(10^{10}) = \varphi(10000000000) = ?$

Trditev

Naj bo p praštevilo. Potem je $\varphi(p) = p - 1$.

Trditev

Naj bo p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$. Potem je $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Vprašanje: $\varphi(10^{10}) = \varphi(10000000000) = ?$

Trditev

Naj bo p praštevilo. Potem je $\varphi(p) = p - 1$.

Trditev

Naj bo p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$. Potem je $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Izrek

Če sta a in b tuji naravni števili, je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Odgovor:

Odgovor: $\varphi(10^{10}) = \varphi(2^{10})\varphi(5^{10}) = 4 \times 10^9$

Odgovor: $\varphi(10^{10}) = \varphi(2^{10})\varphi(5^{10}) = 4 \times 10^9$

Posledica

$$\varphi(n) = n \times \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Odgovor: $\varphi(10^{10}) = \varphi(2^{10})\varphi(5^{10}) = 4 \times 10^9$

Posledica

$$\varphi(n) = n \times \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Izrek

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) =$$

Odgovor: $\varphi(10^{10}) = \varphi(2^{10})\varphi(5^{10}) = 4 \times 10^9$

Posledica

$$\varphi(n) \;=\; n \times \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Izrek

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) \;=\; n$$

Möbiusova funkcija

Möbiusova funkcija

Definicija

Preslikavo $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vse* $n \in \mathbb{N}$ *zadošča enačbi*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

imenujemo Möbiusova funkcija.

Möbiusova funkcija

Definicija

Preslikavo $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vse* $n \in \mathbb{N}$ *zadošča enačbi*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

imenujemo Möbiusova funkcija.

n	1	2	3	4	5	6	7
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1

Izrek

(Möbiusova inverzija) *Za aritmetični funkciji* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *velja:*

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Izrek

(Möbiusova inverzija) *Za aritmetični funkciji* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *velja:*

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Zgledi

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \implies \varphi(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$

Izrek

(Möbiusova inverzija) *Za aritmetični funkciji* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *velja:*

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Zgledi

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \implies \varphi(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$

$$\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1 \implies \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \tau(d) = 1$$

Izrek

(Möbiusova inverzija) *Za aritmetični funkciji* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *velja:*

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Zgledi

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \implies \varphi(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$

$$\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1 \implies \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \tau(d) = 1$$

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d \implies \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sigma(d) = n$$

Trditev

Naj bo p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$. Potem je

$$\mu(p^k) = \begin{cases} -1, & k = 1, \\ 0, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Trditev

Naj bo p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$. Potem je

$$\mu(p^k) = \begin{cases} -1, & k = 1, \\ 0, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Izrek

Če sta a in b tuji naravni števili, je $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Trditev

Naj bo p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$. Potem je

$$\mu(p^k) = \begin{cases} -1, & k = 1, \\ 0, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Izrek

Če sta a in b tuji naravni števili, je $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Posledica

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in r število različnih prafaktorjev števila n. Potem je

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & n \textit{ deljiv s kvadratom praštevila}, \\ (-1)^r, & \textit{sicer.} \end{cases}$$