Turánov izrek

Andreja Zorko

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

20. maj 2009

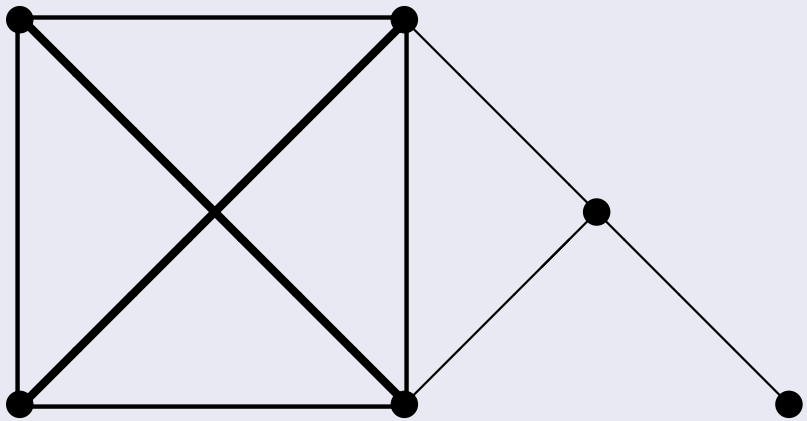
Definicija

Naj bo G enostaven graf na množici vozlišč $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množici povezav E. Če sta v_i in v_j sosednji vozlišči, potem pišemo $v_i v_j \in E$. p-klika je poln podgraf grafa G na p vozliščih, ki ga označimo s K_p.

Definicija

Naj bo G enostaven graf na množici vozlišč $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množici povezav E. Če sta v_i in v_j sosednji vozlišči, potem pišemo $v_i v_j \in E$. p-klika je poln podgraf grafa G na p vozliščih, ki ga označimo s K_p.

Zgled



Turánovi grafi

Vprašanje: Naj bo G enostaven graf, ki ne vsebuje p-klike. Katero je največje možno število povezav, ki jih ima lahko G?

Turánovi grafi

Vprašanje: Naj bo G enostaven graf, ki ne vsebuje p-klike. Katero je največje možno število povezav, ki jih ima lahko G?

Definicija

Grafom, ki ne vsebujejo p-klike in imajo največje število povezav, pravimo Turánovi grafi.

Turánovi grafi

Vprašanje: Naj bo G enostaven graf, ki ne vsebuje p-klike. Katero je največje možno število povezav, ki jih ima lahko G?

Definicija

Grafom, ki ne vsebujejo p-klike in imajo največje število povezav, pravimo Turánovi grafi.

Konstrukcija Turánovih grafov:

1. množico vozlišč razdelimo na $p-1$ paroma disjunktnih podmnožic $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{p-1}$, kjer je $|V_i| = n_i$, pri čimer števila n_i razdelimo čimbolj enakomerno, t.j. $|n_i - n_j| \leq 1$,
2. dve vozlišči povežemo natanko tedaj, ko ležita v disjunktnih množicah V_i in V_j,
3. dobljen graf označimo s $K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$, ki ima $\sum_{i<j} n_i n_j$ povezav.

V posebnem, ko $p-1$ deli n, tedaj lahko za vse i izberemo $n_i = \frac{n}{p-1}$. Tako dobimo

$$\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$$

povezav.

V posebnem, ko $p-1$ deli n, tedaj lahko za vse i izberemo $n_i = \frac{n}{p-1}$. Tako dobimo

$$\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$$

povezav.

Odgovor:

Izrek

Če graf $G = (V, E)$ na n vozliščih ne vsebuje p-klike, $p \geq 2$, potem je

$$|E| \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Dokaz 1

Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

- izrek je trivialno res za $n = 1$

Dokaz 1

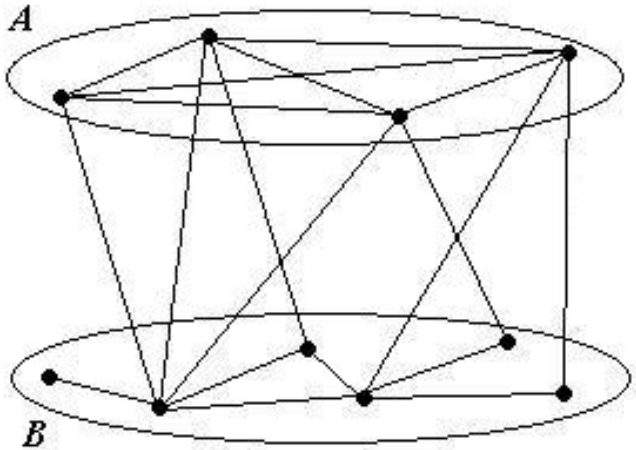
Dokaz z indukcijo:

- izrek je trivialno res za $n = 1$
- indukcijski korak: naj bo A $(p-1)$-klika, $B := V \backslash A$

Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

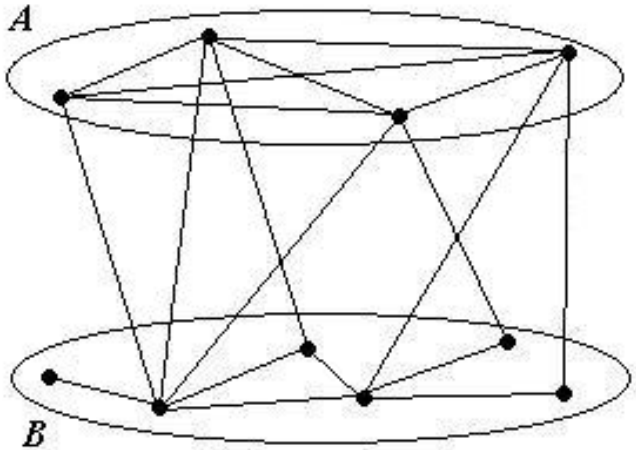
- izrek je trivialno res za $n = 1$
- indukcijski korak: naj bo A $(p-1)$-klika, $B := V \backslash A$



Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

- izrek je trivialno res za $n = 1$
- indukcijski korak: naj bo A $(p-1)$-klika, $B := V \backslash A$

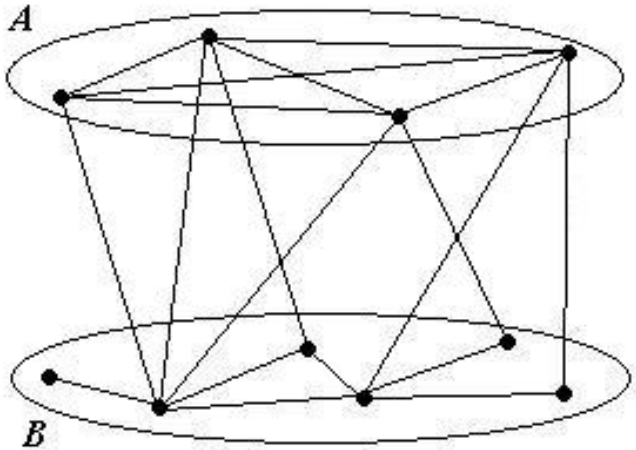


- $e_A = \binom{p-1}{2}$

Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

- izrek je trivialno res za $n = 1$
- indukcijski korak: naj bo A $(p-1)$-klika, $B := V \backslash A$

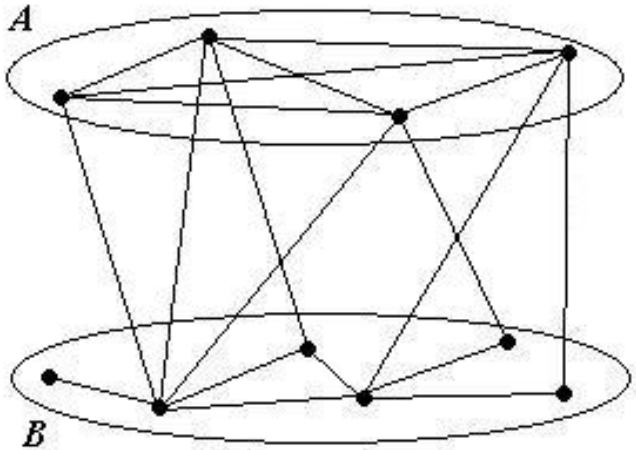


- $e_A = \binom{p-1}{2}$
- po indukciji je $e_B \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1})(n-p+1)^2$

Dokaz 1

Dokaz z indukcijo:

- izrek je trivialno res za $n = 1$
- indukcijski korak: naj bo A $(p-1)$-klika, $B := V \backslash A$



- $e_A = \binom{p-1}{2}$
- po indukciji je $e_B \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1})(n-p+1)^2$
- $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$

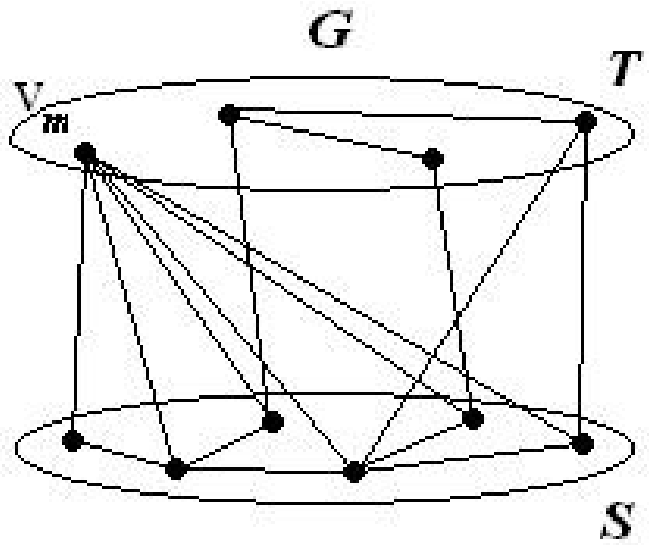
Dokaz 2

Dokaz 2

- Uporablja strukturo Turánovih grafov
- $v_m \in V$ vozlišče z največjo stopnjo
- $S := \{\text{sosedi } v_m\}$
- $T := V \backslash S$
- S nima $(p-1)$-klike

Dokaz 2

- Uporablja strukturo Turánovih grafov
- $v_m \in V$ vozlišče z največjo stopnjo
- $S := \{\text{sosedi } v_m\}$
- $T := V \backslash S$
- S nima $(p-1)$-klike



Dokaz 2 - nadaljevanje

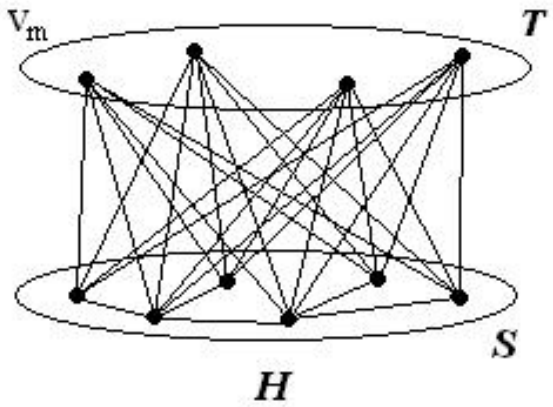
Dokaz 2 - nadaljevanje

Konstruiramo naslednji graf H:

Dokaz 2 - nadaljevanje

Konstruiramo naslednji graf H:

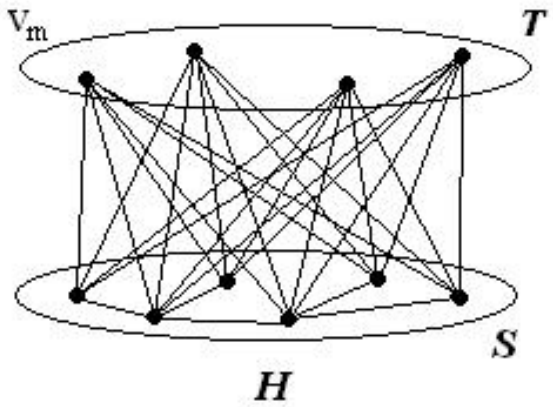
- H se ujema z grafom G na S
- H vsebuje vse povezave med S in T
- odstranimo vse povezave med vozlišči iz T
- tudi H nima p-klike



Dokaz 2 - nadaljevanje

Konstruiramo naslednji graf H:

- H se ujema z grafom G na S
- H vsebuje vse povezave med S in T
- odstranimo vse povezave med vozlišči iz T
- tudi H nima p-klike



Zaključek: $|E| \leq |E(H)| \leq E(K_{n_1,\ldots,n_{p-1}})$ z $n_{p-1} = |T|$.

Dokaz 3

Dokaz 3

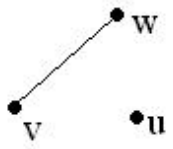
Trditev

G ne vsebuje treh vozlišč u, v in w, takih, da $vw \in E$, toda $uv \notin E$, $uw \notin E$.

Dokaz 3

Trditev

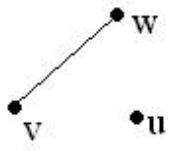
G ne vsebuje treh vozlišč u, v in w, takih, da $vw \in E$, *toda* $uv \notin E$, $uw \notin E$.



Dokaz 3

Trditev

G ne vsebuje treh vozlišč u, v in w, takih, da $vw \in E$, toda $uv \notin E$, $uw \notin E$.

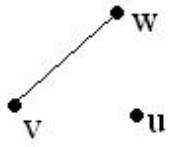


Primer 1: $d(u) < d(v)$ ali $d(u) < d(w)$

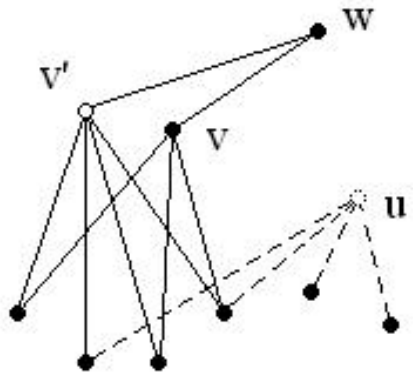
Dokaz 3

Trditev

G ne vsebuje treh vozlišč u, v in w, takih, da $vw \in E$, *toda* $uv \notin E$, $uw \notin E$.



Primer 1: $d(u) < d(v)$ ali $d(u) < d(w)$
Graf G':



Dokaz 3

Dokaz 3

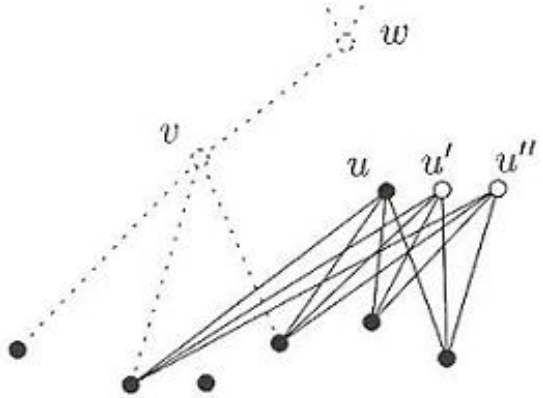
Ugotovitev: $|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$
Protislovje.

Dokaz 3

Ugotovitev: $|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$
Protislovje.
Primer 2: $d(u) \geq d(v)$ in $d(u) \geq d(w)$

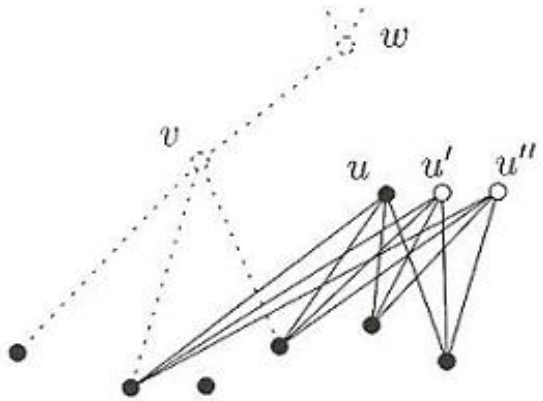
Dokaz 3

Ugotovitev: $|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$
Protislovje.
Primer 2: $d(u) \geq d(v)$ in $d(u) \geq d(w)$
Graf G':



Dokaz 3

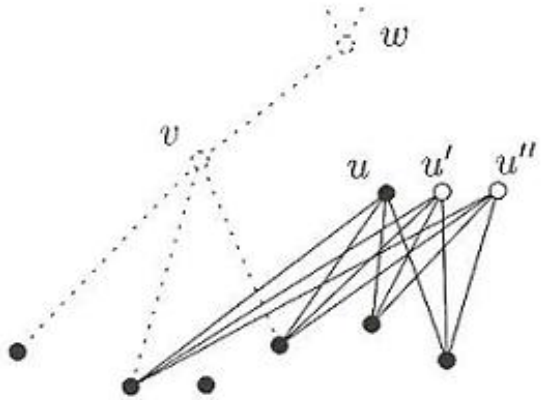
Ugotovitev: $|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$
Protislovje.
Primer 2: $d(u) \geq d(v)$ in $d(u) \geq d(w)$
Graf G':



Izračun: $|E(G')| = |E(G)| + 2d(u) - (d(v) + d(w) - 1) > |E(G)|$
Zopet protislovje.

Dokaz 3

Ugotovitev: $|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|$
Protislovje.
Primer 2: $d(u) \geq d(v)$ in $d(u) \geq d(w)$
Graf G':



Izračun: $|E(G')| = |E(G)| + 2d(u) - (d(v) + d(w) - 1) > |E(G)|$
Zopet protislovje.
Definiramo ekvivalenčno relacijo: $u \sim v :\Longleftrightarrow uv \notin E(G)$