Varovanje muzeja

Anja Jozelj

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

15. maj 2009

Osnovni problem

Osnovni problem

Muzej si predstavljamo kot n-kotnik v ravnini in kamere oziroma varnostnike kot točke znotraj mnogokotnika. Predpostavimo, da se kamere lahko vrtijo neskončno hitro okrog svoje osi, in da njihovo vidno polje sega v neskončnost.
Kolikšno je najmanjše število kamer, da bo muzej dobro varovan?

Osnovni problem

Muzej si predstavljamo kot n-kotnik v ravnini in kamere oziroma varnostnike kot točke znotraj mnogokotnika. Predpostavimo, da se kamere lahko vrtijo neskončno hitro okrog svoje osi, in da njihovo vidno polje sega v neskončnost.
Kolikšno je najmanjše število kamer, da bo muzej dobro varovan?

Matematični vidik

Za dani mnogokotnik M poišči najmanjši $n \in \mathbb{N}$, za katerega obstajajo $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathbb{N}$, tako da je vsaka točka $Y \in \mathbb{N}$ vidna iz vsaj ene od točk $X_1, X_2, ..., X_n$. Označimo ta n z v(M), to je število potrebnih kamer.

Vidnost

Vidnost

Definicija

M mnogokotnik; $X, Y \in M$. Točka Y je vidna iz točke X, če daljica $\overrightarrow{XY}$ v celoti leži v M.

Vidnost

Definicija

M mnogokotnik; $X, Y \in M$. Točka Y je vidna iz točke X, če daljica $\vec{XY}$ v celoti leži v M.

Definicija

Konveksna množica je v geometriji množica točk, za katero velja, da pri poljubni izbiri točk X in Y iz te množice, daljica $\vec{XY}$ v celoti leži v tej množici.

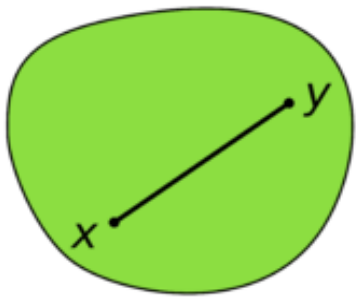
Vidnost

Definicija

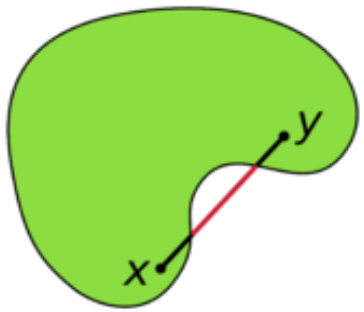
M mnogokotnik; $X, Y \in M$. Točka Y je vidna iz točke X, če daljica $\overrightarrow{XY}$ v celoti leži v M.

Definicija

Konveksna množica je v geometriji množica točk, za katero velja, da pri poljubni izbiri točk X in Y iz te množice, daljica $\overrightarrow{XY}$ v celoti leži v tej množici.



a) Konveksna množica



b) Nekonveksna množica

Zvezdaste množice

Zvezdaste množice

Vprašanje:

Zvezdaste množice

Vprašanje:

- Za kakšne M je število v(M) = 1?

Zvezdaste množice

Vprašanje:

- Za kakšne M je število v(M) = 1?
- Ali to res velja le za konveksne mnogokotnike?

Zvezdaste množice

Vprašanje:

- Za kakšne M je število v(M) = 1?
- Ali to res velja le za konveksne mnogokotnike?

Definicija

Mnogokotnik M je zvezdast, če obstaja $X_0 \in M$, tako da je vsak $Y \in M$ viden iz X_0.

Zvezdaste množice

Vprašanje:

- Za kakšne M je število v(M) = 1?
- Ali to res velja le za konveksne mnogokotnike?

Definicija

Mnogokotnik M je zvezdast, če obstaja $X_0 \in M$, tako da je vsak $Y \in M$ viden iz X_0.



Slika: Zvezdasta množica

Zvezdaste množice

Zvezdaste množice

Problem

Za dani M poišči najmanjši $n \in \mathbb{N}$, za katerega obstajajo zvezdasti mnogokotniki $M_1, M_2, ..., M_n \subseteq M$, tako da je $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup, ..., \bigcup M_n$. Označimo ta n z $z(M)$.

Zvezdaste množice

Problem

Za dani M poišči najmanjši $n \in \mathbb{N}$, za katerega obstajajo zvezdasti mnogokotniki $M_1, M_2, \ldots, M_n \subseteq M$, tako da je $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup, \ldots, \bigcup M_n$. Označimo ta n z $z(M)$.

Trditev

$v(M) = z(M)$

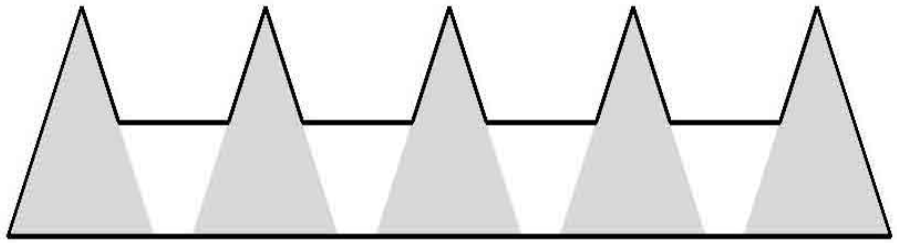
Varovanje muzeja

Varovanje muzeja

Zamislimo si muzej oblike glavnika.
Kam in koliko kamer moramo postaviti, da bo muzej dobro varovan?

Varovanje muzeja

Zamislimo si muzej oblike glavnika.
Kam in koliko kamer moramo postaviti, da bo muzej dobro varovan?



Slika: Muzej oblike glavnika

Chvátalov izrek

Chvátalov izrek

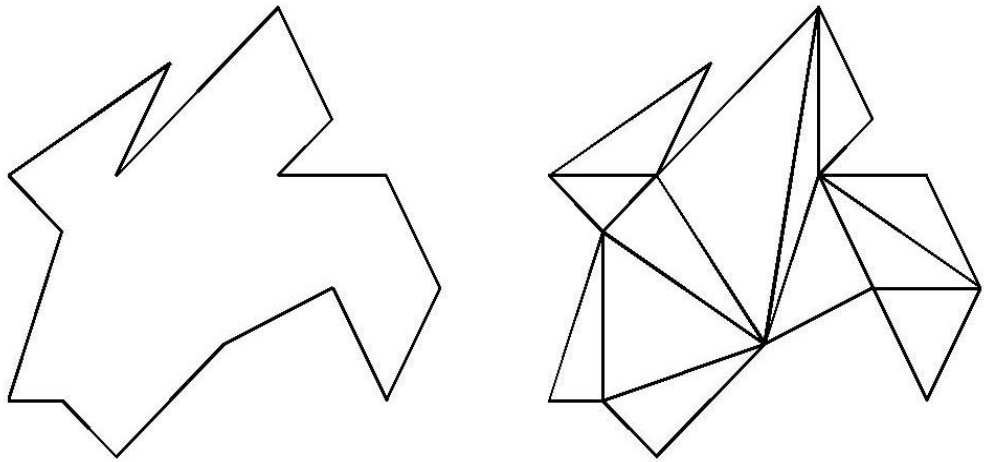
Izrek

Za varovanje muzeja oblike poljubnega n-kotnika zadostuje $\lfloor n/3 \rfloor$ *kamer.*

Chvátalov izrek

Izrek

Za varovanje muzeja oblike poljubnega n-kotnika zadostuje $\lfloor n/3 \rfloor$ kamer.



Slika: Mnogokotnik in ena izmed možnih triangulacij

Dokaz Chvátalovega izreka

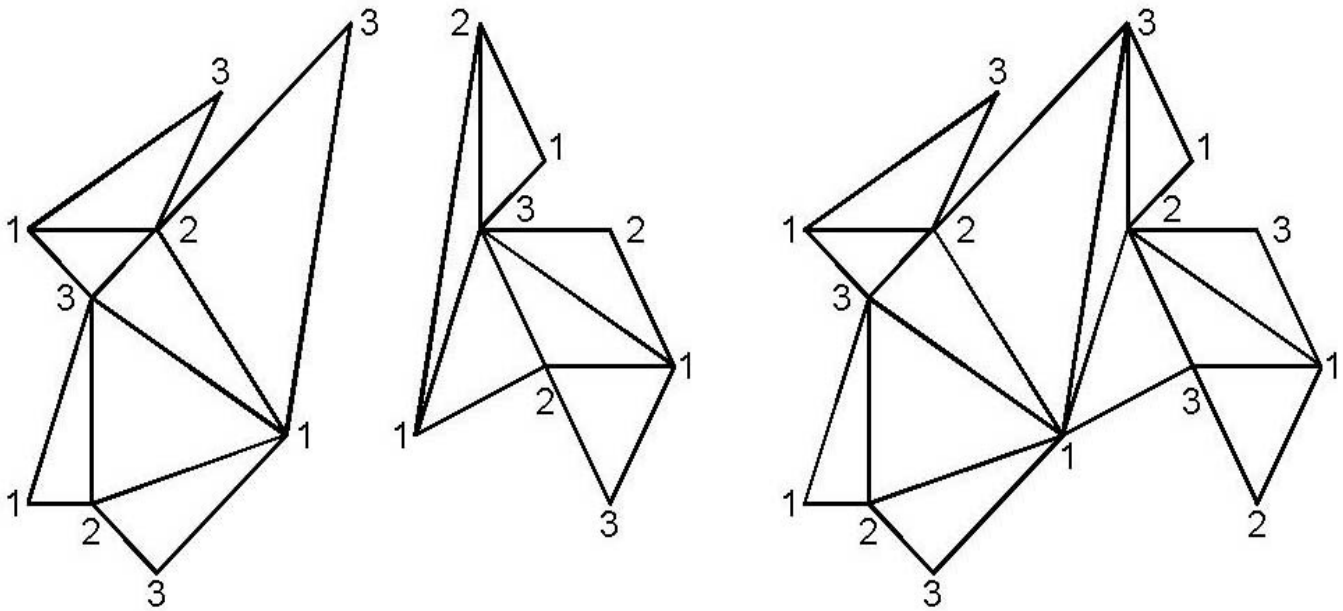
Trditev

Graf lahko pobarvamo s tremi barvami.

Dokaz Chvátalovega izreka

Trditev

Graf lahko pobarvamo s tremi barvami.



Slika: Barvanje vozlišč mnogokotnika

Triangulacija

Triangulacija

Vprašanje:
Ali triangulacija vselej obstaja?

Triangulacija

Vprašanje:
Ali triangulacija vselej obstaja?

Trditev

Oglišče A imenujemo konveksno, če notranji kot ob oglišču ni večji od 180^o.

Triangulacija

Vprašanje:
Ali triangulacija vselej obstaja?

Trditev

Oglišče A imenujemo konveksno, če notranji kot ob oglišču ni večji od 180^o.

Izrek

Konveksna ogrinjača ali lupina množice točk X v realnem vektorskem prostoru V je v matematiki najmanjša konveksna množica, ki vsebuje X kot podmnožico.

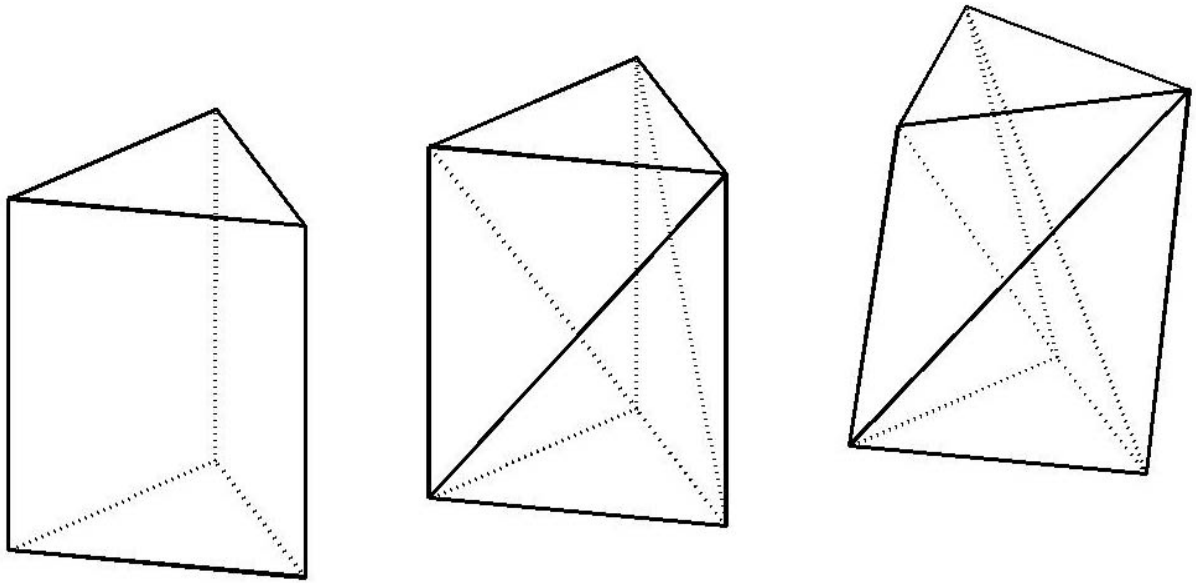
Schönhardtov polieder

Schönhardtov polieder

Če problem triangulacijeposplošimo in ga prenesemo v tri dimenzije ugotovimo, da poljubnega poliedra ne moremo triangulirati. Najenostavneje je to pokazati na primeru Schönhardtovega poliedra.
Triangulirati polieder pomeni razdeliti ga na tetraedre.

Schönhardtov polieder

Če problem triangulacijeposplošimo in ga prenesemo v tri dimenzije ugotovimo, da poljubnega poliedra ne moremo triangulirati. Najenostavneje je to pokazati na primeru Schönhardtovega poliedra.
Triangulirati polieder pomeni razdeliti ga na tetraedre.



Slika: Schönhardtov polieder

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja
- Zahtevamo le varovanje zidov...

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja
- Zahtevamo le varovanje zidov...

Poznamo že nekaj rezultatov različnih variant teorije varovanja muzeja:

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja
- Zahtevamo le varovanje zidov...

Poznamo že nekaj rezultatov različnih variant teorije varovanja muzeja:

- Za varovanje muzeja katerega stene so me sabo pravokotne zadostuje $\lfloor n/4 \rfloor$ kamer.

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja
- Zahtevamo le varovanje zidov...

Poznamo že nekaj rezultatov različnih variant teorije varovanja muzeja:

- Za varovanje muzeja katerega stene so me sabo pravokotne zadostuje $\lfloor n/4 \rfloor$ kamer.
- **Problem varovanja utrdbe**: Varujemo zunanjost stavbe, ki si jo zopet predstavljamo kot poljuben mnogokotnik. Za varovanje utrdbe zadostuje $\lfloor n/2 \rfloor$ kamer.

Variante teorije varovanja muzeja

Pogoje za varovanje muzeja lahko poljubno priredimo:

- Kamere postavljamo le v oglišča muzeja
- Zahtevamo le varovanje zidov...

Poznamo že nekaj rezultatov različnih variant teorije varovanja muzeja:

- Za varovanje muzeja katerega stene so me sabo pravokotne zadostuje $\lfloor n/4 \rfloor$ kamer.
- **Problem varovanja utrdbe**: Varujemo zunanjost stavbe, ki si jo zopet predstavljamo kot poljuben mnogokotnik. Za varovanje utrdbe zadostuje $\lfloor n/2 \rfloor$ kamer.

Motivacija - še nerešen problem

Predpostavimo, da lahko vsak varnostnik varuje eno steno muzeja, tako da se ob njej sprehaja in opazuje vse kar je možno videti z vsake točke na svoji poti vzdolž zidu. Koliko takšnih varnostnikov je torej potrebno za varovanje muzeja poljubne oblike?