Bertrandov postulat

Maruša Mohar

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

11. marec 2009

Uvod

- **Praštevilo** je naravno ševilo $n > 1$, če ima natanko dva pozitivna delitelja (faktorja), število 1 in samega sebe kot edini prafaktor.

Uvod

- **Praštevilo** je naravno ševilo $n > 1$, če ima natanko dva pozitivna delitelja (faktorja), število 1 in samega sebe kot edini prafaktor.
- Zaporedje praštevil je neskončno.

Uvod

- **Praštevilo** je naravno ševilo $n > 1$, če ima natanko dva pozitivna delitelja (faktorja), število 1 in samega sebe kot edini prafaktor.
- Zaporedje praštevil je neskončno.
- Praštevilski izrek

Uvod

- **Praštevilo** je naravno ševilo $n > 1$, če ima natanko dva pozitivna delitelja (faktorja), število 1 in samega sebe kot edini prafaktor.
- Zaporedje praštevil je neskončno.
- Praštevilski izrek
- Algoritem iskanja praštevil (Eratostenovo sito)

Bertrandov postulat

Izrek

Za vsak $n \geq 1$ obstaja praštevilo p, da je $n < p \leq 2n$.

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

1. korak:

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

1. korak:

- Preverimo Bertrandov postulat za $n < 4000$

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

1. korak:

- Preverimo Bertrandov postulat za $n < 4000$

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

1. korak:

- Preverimo Bertrandov postulat za $n < 4000$

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

je zaporedje praštevil, kjer je vsako naslednje praštevilo manjše od dvakratnika predhodnega.

Dokaz

Bertrandov postulat bomo dokazali v več korakih:

1. korak:

- Preverimo Bertrandov postulat za $n < 4000$

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

je zaporedje praštevil, kjer je vsako naslednje praštevilo manjše od dvakratnika predhodnega.

- Vsak interval $\{y : n < y \leq 2n\}$ vsebuje eno od teh 14 praštevil.

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ocena:

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ocena:

$$\binom{2n}{n}$$

Binomski koeficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za zaporedje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$ velja:

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ocena:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n} = \frac{2^{2n}}{2n}$$

Dokaz-nadaljevanje

2. korak:

Dokaz-nadaljevanje

2. korak:

- $$\prod_{p \leq 2m+1} p \leq 4^{2m}$$

Dokaz-nadaljevanje

Izrek

(Legendrov teorem): Mnogoterost praštevila p, ki se pojavi v n!, je natanko:

$$\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

Dokaz-nadaljevanje

Izrek

(Legendrov teorem): Mnogoterost praštevila p, ki se pojavi v n!, je natanko:

$$\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

3. korak:

Dokaz-nadaljevanje

Izrek

(Legendrov teorem): Mnogoterost praštevila p, ki se pojavi v n!, je natanko:

$$\sum_{k\geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

3. korak:

Posledica

Število $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ *vsebuje prafaktor p natanko:*

$$\sum_{k\geq 1} (\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor) \leq max\{r : p^r \leq 2n\} - krat.$$

Dokaz-nadaljevanje

Trditev

Praštevila p, ki zadoščajo $\frac{2}{3}n < p \leq n$ ne delijo $\binom{2n}{n}$.