Preštevanje racionalnih števil

Avtor: Ana Mlinar

Mentor: prof. dr. Marko Petkovšek

12. maj 2009

Članek

Recounting the Rationals
Avtorja: Neil CALKIN in Herbert S. WILF

Uvod

Ali je mogoče narediti seznam vseh pozitivnih racionalnih števil? Če je, kako ga lahko naredimo na "najlepši"način?

Zaporedje $\frac{b(n)}{b(n+1)}$

Lastnosti:

- Imenovalec ulomka je števec naslednjega ulomka.

Zaporedje $\frac{b(n)}{b(n+1)}$

Lastnosti:

- Imenovalec ulomka je števec naslednjega ulomka.
- $b(n)$ je število načinov hiperbinarnega zapisa števila n.

Zaporedje $\frac{b(n)}{b(n+1)}$

Lastnosti:

- Imenovalec ulomka je števec naslednjega ulomka.
- $b(n)$ je število načinov hiperbinarnega zapisa števila n.
- Zaporedne vrednosti funkcije b so si vedno tuje, zato se vsako racionalno število pojavi v okrajšani obliki.

Zaporedje $\frac{b(n)}{b(n+1)}$

Lastnosti:

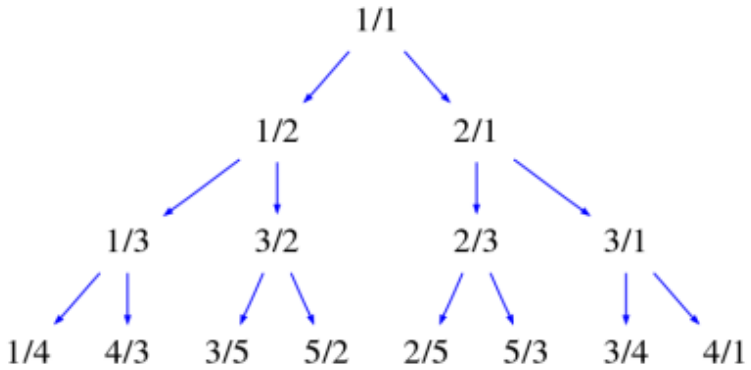
- Imenovalec ulomka je števec naslednjega ulomka.
- $b(n)$ je število načinov hiperbinarnega zapisa števila n.
- Zaporedne vrednosti funkcije b so si vedno tuje, zato se vsako racionalno število pojavi v okrajšani obliki.
- Vsako racionalno število se v tem zaporedju pojavi natanko enkrat.

Zaporedje $\frac{b(n)}{b(n+1)}$

Lastnosti:

- Imenovalec ulomka je števec naslednjega ulomka.
- $b(n)$ je število načinov hiperbinarnega zapisa števila n.
- Zaporedne vrednosti funkcije b so si vedno tuje, zato se vsako racionalno število pojavi v okrajšani obliki.
- Vsako racionalno število se v tem zaporedju pojavi natanko enkrat.
- $b(n) = b(2n+1)$ in $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$

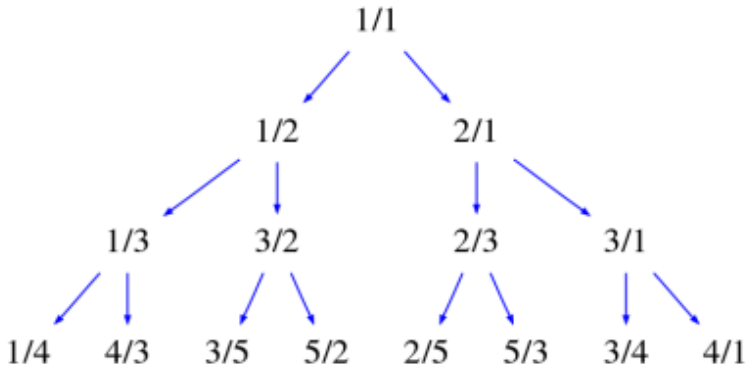
Drevo ulomkov



Drevo opišemo induktivno z dvema praviloma:

- $\frac{1}{1}$ je na vrhu drevesa

Drevo ulomkov



Drevo opišemo induktivno z dvema praviloma:

- $\frac{1}{1}$ je na vrhu drevesa
- Vsako vozlišče $\frac{i}{j}$ ima dva sinova; levega oblike $\frac{i}{i+j}$ in desnega $\frac{i+j}{j}$

Lastnosti tega drevesa:

- Števec in imenovalec vsakega vozlišča sta si tuja.

Lastnosti tega drevesa:

- Števec in imenovalec vsakega vozlišča sta si tuja.
- Vsako okrajšano racionalno število se pojavi na nekem vozlišču.

Lastnosti tega drevesa:

- Števec in imenovalec vsakega vozlišča sta si tuja.
- Vsako okrajšano racionalno število se pojavi na nekem vozlišču.
- Nobeno okrajšano racionalno število se ne pojavi na več kot enem vozlišču.

Naš seznam je oblike

$$\frac{f(n)}{f(n+1)}_{n\geq 0}$$

za neko funkcijo f. Sinova ulomka $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ sta $\frac{f(2n+1)}{f(2n+2)}$ in $\frac{f(2n+2)}{f(2n+3)}$ in tako mora zaradi same konstrukcije drevesa veljati:

$$f(2n+1) = f(n) \quad \text{in} \quad f(2n+2) = f(n) + f(n+1).$$

Za vsak $n \geq 0$ trdimo, da je f(n)=b(n).

Trditev

n-to racionalno število, v okrajšani obliki, je lahko predstavljeno kot $\frac{b(n)}{b(n+1)}$, kjer je $b(n)$ število hiperbinarnih zapisov števila n za n=0,1,2,3... Velja, da sta si $b(n)$ in $b(n+1)$ tuji in da se vsako okrajšano pozitivno število pojavi natanko enkrat v seznamu $\frac{b(0)}{b(1)}, \frac{b(1)}{b(2)}, \frac{b(2)}{b(3)}, \ldots$