DISKRETNE STRUKTURE – izpit iz teorije
17. 6. 2003

ODGOVORI NA VPRAŠANJA

(Pripomba: Pri nekaterih vprašanjih obstajajo tudi drugačni pravilni odgovori.)

1. **Povečujoča pravila:**

   (a) Kdaj rečemo, da so pravila generiranja $\mathcal{P}$ induktivnega razreda $\mathcal{I} = \mathrm{Cn}(\mathcal{B}, \mathcal{P})$ *povečujoča*?

   Odg.: Pravila generiranja so povečujoča, če obstaja neka funkcija d, ki vsakemu objektu x priredi naravno število $d(x)$, tako da za vsako pravilo generiranja z argumenti $x_1, x_2, \ldots, x_k$ in desno stranjo y velja: $d(x_1), d(x_2), \ldots, d(x_k) < d(y)$.

   (b) Kako lahko v primeru povečujočih pravil pokažemo, da objekt x ne pripada razredu $\mathcal{I}$?

   Odg.: Sestavimo katalog vseh objektov $y \in \mathcal{I}$, za katere je $d(y) \leq d(x)$. Če x ne pripada temu katalogu, potem $x \notin \mathcal{I}$.

   (c) Kako v primeru povečujočih pravil pokažemo, da je konceptualni razred $\mathcal{K}$ v celoti vsebovan v induktivnem razredu $\mathcal{I}$?

   Odg.: Uporabimo izrek o povečujočih pravilih, ki pravi: Če za vsak $y \in \mathcal{K}$ velja, da je $y \in B$ ali pa y lahko dobimo po nekem pravilu generiranja iz argumentov, ki so vsi v $\mathcal{K}$, potem je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.

2. **Mreža:** Naj bo množica A z relacijo R delno urejena.

   (a) Definiraj *zgornjo mejo* ter *natančno zgornjo mejo (supremum)* podmnožice $B \subseteq A$!

   Odg.: $a \in A$ je zgornja meja množice B, če $\forall x \in B : xRa$. Naj bo M množica vseh zgornjih mej množice B. Če ima M najmanjši element, je to natančna zgornja meja ali supremum množice B.

   (b) Kdaj rečemo, da je množica A *mreža*?

   Odg.: Delno urejena množica A je mreža, če za poljubna elementa $x, y \in A$ obstajata $\sup\{x, y\}$ in $\inf\{x, y\}$.

   (c) Navedi konkreten primer mreže, ki ni linearno urejena!

   Odg.: Množica naravnih števil, urejena z relacijo deljivosti (ali: potenčna množica poljubne množice, urejena z relacijo inkluzije).

3. **Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$:**

   (a) Kako je definirana *Eulerjeva funkcija* $\varphi(n)$?

   Odg.: $\varphi(n)$ je število celih števil med 0 in $n - 1$, ki so tuja n.

   (b) Navedi lastnosti Eulerjeve funkcije, ki omogočajo razmeroma hitro računanje njenih vrednosti!

   Odg.: Če je p praštevilo, je $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Če sta a in b tuji števili, je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(c) Koliko elementov ima grupa $(\mathbb{Z}_{1440}^*, \cdot_{1440})$?
Odg.: $\varphi(1440) = \varphi(2^5 \cdot 3^2 \cdot 5) = (2^5 - 2^4)(3^2 - 3)(5 - 1) = 16 \cdot 6 \cdot 4 = 384$.

4. **Dvodelni grafi:**

(a) Navedi definicijo *dvodelnega grafa*!
Odg.: Graf $G = (V, E)$ je dvodelen, če obstajata množici točk $V_1, V_2 \subseteq V$, tako da je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ in ima vsaka povezava eno krajišče v V_1, drugo pa v V_2.

(b) Kako opišemo dvodelne grafe s pomočjo ciklov?
Odg.: Graf je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje ciklov lihe dolžine.

(c) Kateri od naslednjih grafov so dvodelni: a) K_n $(n \geq 3)$, b) P_n $(n \geq 1)$, c) C_{2n+1} $(n \geq 1)$, d) drevesa, e) Q_d $(d \geq 0)$?
Odg.: b), d), e).