Laguerrova metoda
Izračun konstant s pomočjo programa Mathematica

S pomočjo programa Mathematica lahko elegantno izračunamo konstante pri razvoju ostanka Laguerrove metode po prejšnjih ostankih. Za začetek najprej na hitro ponovimo Laguerrovo metodo.
Denimo, da iščemo korene funkcije $f(z)$, z_r pa naj bo tekoči približek za enega od korenov. Naslednji približek potem izračunamo takole:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{f'(z_r)}{f(z_r)}, \\ S_2 &= \frac{f'^2(z_r) - f(z_r)f''(z_r)}{f^2(z_r)}, \\ z_{r+1} &= z_r - \frac{n}{S_1 \pm \sqrt{(n-1)(nS_2 - S_1^2)}}. \end{aligned}$$

V imenovalcu izberemo vedno tisti predznak, ki da imenovalcu večjo absolutno vrednost. Zgornjo formulo lahko spremenimo v obliko

$$z_{r+1} = z_r - \frac{nf(z_r)}{f'(z_r) \pm \sqrt{(n-1)g(z_r)}}, \tag{1}$$

kjer je

$$g(z_r) = (n-1)f'^2(z_r) - nf(z_r)f''(z_r). \tag{2}$$

Člene, ki nastopajo v zgornji formuli, razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog korena a, najprej pa seveda še definiramo, da je $f(a) = 0$.

```
In[1]:= f[a]=0

In[2]:= F[z_]=Series[f[z],{z,a,3}]

In[3]:= F'[z]=D[F[z],z]

In[4]:= F''[z]=D[F'[z],z]
```

Tako smo v `F[z]`, `F'[z]` in `F''[z]` shranili razvoje funkcije f in njenih odvodov okrog korena a. To sedaj vstavimo v definicijo (2) funkcije g.

```
In[5]:= g[z_]=(n-1) F'[z]^2-n F[z] F''[z]
```

Nadaljujemo z razvojem $\sqrt{(n-1)g(z_r)}$ v Taylorjevo vrsto.

```
In[6]:= Series[Sqrt[(n-1) g[z]],{z,a,2}]
```

Ker Mathematica avtomatično ne poenostavi izraze oblike `Sqrt[x^2]` v `x`, jo moramo z ukazom `PowerExpand` spodbuditi k temu dejanju.

```
In[7]:= PowerExpand[%]
```

Izraz se da še poenostaviti, kar vedno dosežemo z ukazom `Simplify`.

```
In[8]:= Simplify[%]
```

Sedaj lahko izračunamo celotni razvoj imenovalca $f'(z_r) + \sqrt{(n-1)g(z_r)}$. Za predznak $+$ se odločimo zaradi tega, ker bomo pri majhni absolutni vrednosti člena $z - a$ tako dobili večjo absolutno vrednost v imenovalcu.

```
In[9]:= F'[z]+%
```

```
In[10]:= Simplify[%]
```

Ko imamo razvoj imenovalca v vrsto, lahko izračunamo celoten izraz (1).

```
In[11]:= z-n F[z]/%
```

```
In[12]:= Simplify[%]
```

Iz dobljenega rezultata lahko potem preberemo

$$\epsilon_{r+1} = C\epsilon_r^3 + \mathcal{O}(\epsilon_r^4),$$

kjer je

$$C = \frac{(n-2)f''^2(\alpha)}{8(n-1)f'^2(\alpha)} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}.$$