UVOD V LINEARNE KONTROLNE SISTEME

Bor Plestenjak

Uvod

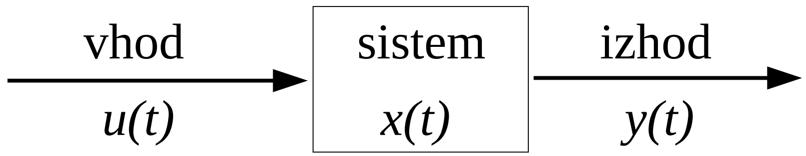
Kontrolni sistemi nastopajo na najrazličnejših področjih. Imamo dinamični sistem, na katerega lahko vplivamo z vhodnimi podatki. Zgledi sistemov so npr.:

- soba s klimatsko napravo,
- semaforji v mestu,
- ekonomska situacija v državi,
- balansiranje metle na dlani,
- električno vezje,
- ekosistem lisic in zajcev.

Pri teoriji kontrolnih sistemov se ukvarjamo s tem, kako regulirati dani sistem, da se bo njegovo obnašanje čim bolj ujemalo z zastavljenimi cilji.

Vhodno-izhodna oblika

V vhodno-izhodni obliki lahko kontrolni sistem predstavimo v obliki diagrama:



Tu imamo

- $u(t)$: vhod, s katerim reguliramo sistem,
- $y(t)$: izhod, ki je odvisen tudi od vhoda $u(t)$,
- $x(t)$: notranje spremenljivke, ki opisujejo stanje sistema.

Sistem vzbujamo z vhodom $u(t)$, odziv sistema pa je izhod $y(t)$. Iščemo tak vhod, da bo izhod čim bolj zadoščal izbranim kriterijem. Na nekaterih področjih (npr. elektrotehnika) govorimo o signalih in sta $u(t)$ in $y(t)$ vhodni oz. izhodni signal.

Sistem kot transformacija

Sistem si lahko predstavljamo kot transformacijo $\mathcal{T}$, ki vhod preslika v izhod, torej

$$y(t) = \mathcal{T}[u(t)]. \tag{1}$$

Definicija. Sistem (1) je

- linearen, če za poljubna vhoda $u_1(t), u_2(t)$ in skalarja c_1, c_2 velja

$$\mathcal{T}[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 \mathcal{T}[u_1(t)] + c_2 \mathcal{T}[u_2(t)],$$

- časovno nespremenljiv, če za poljuben t_0 velja

$$y(t - t_0) = \mathcal{T}[u(t - t_0)],$$

- vzročen, če velja $\mathcal{T}[u_1(t)] = \mathcal{T}[u_2(t)]$ za vse $t \leq t_0$ natanko tedaj, ko za vse $t \leq t_0$ velja $u_1(t) = u_2(t)$.

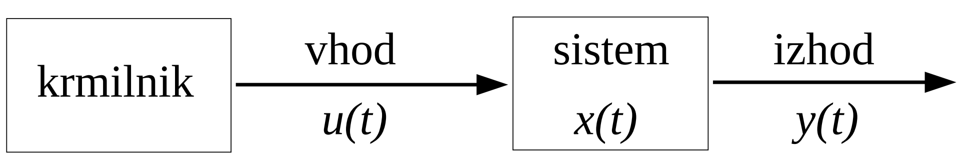
Odprtozančni sistemi

Vodenje sistema ponavadi poteka avtomatično preko regulatorja ali krmilnika, ki proizvaja vhod $u(t)$. Pri tem ločimo sisteme na dve vrsti.

Preprostejša oblika so odprtozančni sistemi, kjer delovanje krmilnika ni odvisno od izhoda sistema. Npr.:

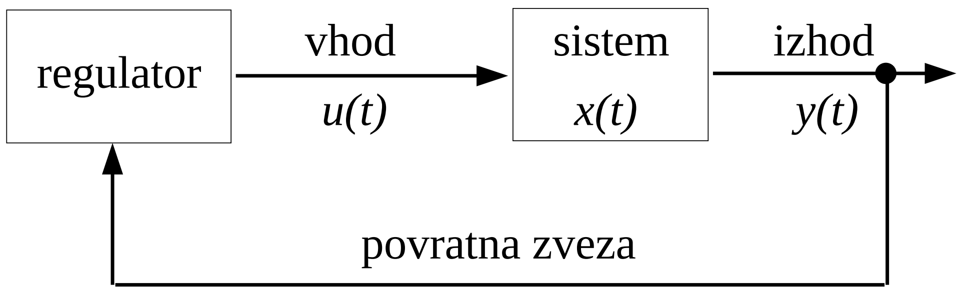
- ura,
- pralni stroj,
- ročna klimatska naprava,
- luči na semaforjih, ki se prižigajo in ugašajo v vnaprej predpisanih časovnih intervalih.

Shema odprtozančnega sistema je:



Zaprtozančni sistemi

Kompleksnejša oblika so zaprtozančni sistemi, kjer imamo povratno zanko med izhodom in regulatorjem. Shema zaprtozančnega sistema je:



Primeri zaprtozančnih sistemov so npr.:

- sistem, ki odvisno od prometne situacije krmili semaforje,
- avtomatska klimatska naprava,
- polnjenje kotlička za izplakovanje,
- Wattov regulator parnega stroja.

Klasična teorija

Pri klasični teoriji imamo linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem, kjer sta vhod in izhod skalarja, oziroma, u in y sta realni funkciji časa. Z vhodom $u(t)$ reguliramo obnašanje sistema in s tem izhod $y(t)$.

Če je cilj, da se $y(t)$ čim bolj ujema z danim referenčnim signalom $r(t)$, potem tak sistem imenujemo servomehanizem. V primeru, ko je referenčni signal konstanten, je to regulator.

V klasični teoriji ima zvezni model obliko diferencialne enačbe n-tega reda

$$y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \cdots + k_{n-1} y' + k_n y = \beta_0 u^{(m)} + \beta_1 u^{(m-1)} + \cdots + \beta_m u,$$

kjer je ponavadi $m < n$.

Prenosna funkcija

$$y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \cdots + k_{n-1} y' + k_n y = \beta_0 u^{(m)} + \beta_1 u^{(m-1)} + \cdots + \beta_m u.$$

Če predpostavimo ničelne začetne pogoje za y in u, z Laplaceovo transformacijo dobimo

$$\begin{aligned}
k(s)\widetilde{y}(s) &= \beta(s)\widetilde{u}(s), \\
k(s) &= s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n, \\
\beta(s) &= \beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \cdots + \beta_m, \\
\widetilde{y}(s) &= \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt, \\
\widetilde{u}(s) &= \mathcal{L}(u(t)).
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\widetilde{y}(s) = g(s)\widetilde{u}(s),$$

kjer je $g(s) = \beta(s)/k(s)$ prenosna funkcija.

Oblika z ničlami, poli in ojačanjem

Prenosna funkcija je racionalna funkcija, katere števec in imenovalec sta Laplaceovi transformiranki vhoda oziroma izhoda. Ničle karakterističnega polinoma $k(s)$ so poli prenosne funkcije $g(s)$, ničle prenosne funkcije pa so ničle $\beta(s)$. Vsako prenosno funkcijo lahko zapišemo v t.i. obliki z ničlami, poli in ojačanjem kot

$$g(s) = K\frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - \mu_1)\cdots(s - \mu_n)}.$$

Če poznamo vhod $u(t)$ in s tem $\widetilde{u}(s)$, dobimo rešitev $y(t)$ z razvojem v parcialne ulomke.

Za enostavni pol μ_i v razvoju $g(s)$ v parcialne ulomke dobimo člen $c_i/(s - \mu_i)$. Od tod po inverzni Laplaceovi transformaciji dobimo v $y(t)$ člen $c_i e^{\mu_i t}$.

Podobno v primeru večkratnega pola v $y(t)$ dobimo člen $p_i(t)e^{\mu_i t}$, kjer je p_i polinom stopnje za eno manjše od večkratnosti pola μ_i.

Impulzni odziv

Impulzni odziv je izhod sistema, če za vhod vzamemo Diracovo delta funkcijo $\delta(t)$, ki je definirana z

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

in $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$ (to situacijo dobimo v limiti primerno izbranega zaporedja funkcij). V tem primeru vhod $u(t) = \delta(t)$ imenujemo enotski impulz, impulzni odziv pa označimo s $h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$.

Impulzni odziv opisuje sistem, saj zaradi

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(t-s)ds$$

za poljuben vhod velja

$$y(t) = \mathcal{T}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)h(t-s)ds,$$

izhod je konvolucija vhoda in impulznega odziva.

Stopnični odziv

Zelo pomemben je tudi odziv sistema, če za vhod vzamemo enotsko stopnico

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t \geq 0, \\ 0 & \text{za } t < 0. \end{cases}$$

V tem primeru govorimo o stopničnem odzivu $g(t) = \mathcal{T}[e(t)]$.

Do stopničnega odziva pride npr. ko:

- spremenimo željeno temperaturo v klimatizirani sobi,
- spremenimo smer na avtomatskem pilotu,
- vključimo kakšen stroj.

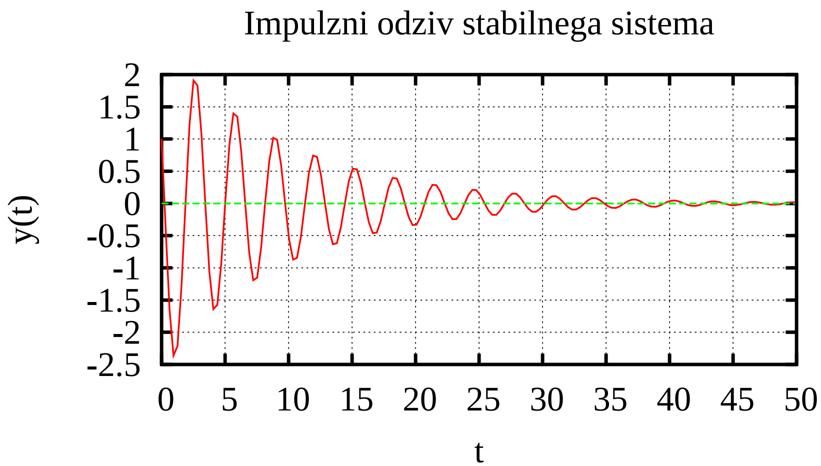
Vhodno-izhodna stabilnost

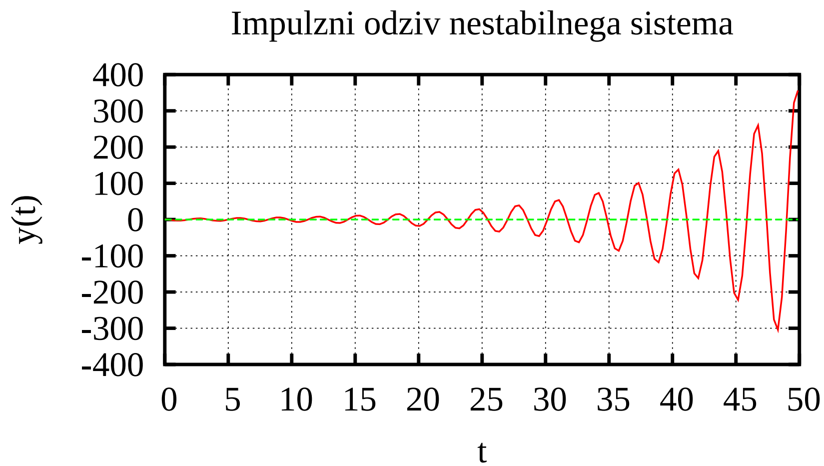
Definicija. Linearni zvezni časovno nespremenljivi sistem je vhodno-izhodno stabilen, kadar je v primeru omejenega vhoda tudi izhod omejen. Tedaj za vsako konstanto $M > 0$ obstaja $N > 0$, da iz $|u(t)| \leq M$ sledi $|y(t)| \leq N$ za vsak $t \geq 0$.

Sistem je vhodno-izhodno stabilen, če je njegov impulzni odziv $h(t)$ v $L_1(\mathbb{R})$, torej obstaja konstanta K, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq K.$$

Stabilnost je odvisna od polov



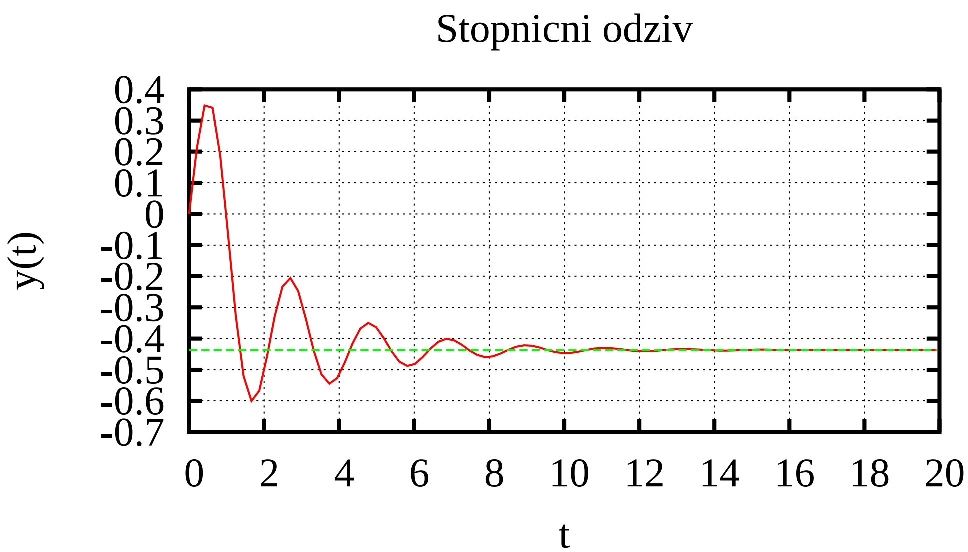


$$g_1(s) = \frac{(s-4)(s+2)}{(s+1.5)(s+0.1-2i)(s+0.1+2i)}, \qquad g_2(s) = \frac{(s-4)(s+2)}{(s+1.5)(s-0.1-2i)(s-0.1+2i)}.$$

Stabilnost sistema je odvisna od polov prenosne funkcije $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Če za vse pole velja $\mathrm{Re}(\mu_i) < 0$, je sistem stabilen, če pa obstaja pol z $\mathrm{Re}(\mu_i) > 0$, je sistem nestabilen.

V primeru enostavnih polov na imaginarni osi ostane odziv omejen in gre v primeru $\mu_i = 0$ proti konstanti, v primeru čisto imaginarnih polov pa proti sinusnemu nihanju.

Prehodni in stacionarni odziv



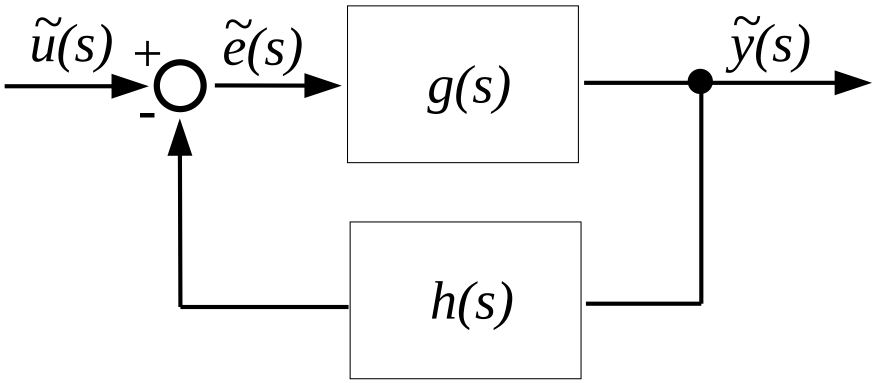
$$g(s) = \frac{(s-1)(s+4)}{(s+1)(s+0.4-3i)(s+0.4+3i)}.$$

Stopnični odziv lahko razdelimo na vsoto prehodnega odziva in stacionarnega odziva.

Izhod je vsota funkcij oblike $c_{ik}t^k e^{\mu_i t}$. V prehodni odziv pridejo členi, ki gredo proti 0, ko gre $t \longrightarrow \infty$, torej tisti z $\mathrm{Re}(\mu_i) < 0$, ostali členi pa v stacionarni odziv.

Pri majhnem t, ko prevladuje prehodni odziv, se vrednosti lahko dosti razlikujejo od željene končne vrednosti.

Povratna zveza



V primeru povratne zveze imamo $\widetilde{e}(s) = \widetilde{u}(s) - h(s)\widetilde{y}(s)$. Od tod dobimo

$$\widetilde{y}(s) = g(s)\widetilde{e}(s) = g(s)(\widetilde{u}(s) - h(s)\widetilde{y}(s))$$

Ko izrazimo $\widetilde{y}(s)$, dobimo

$$\widetilde{y}(s) = \frac{g(s)}{1 + g(s)h(s)}\widetilde{u}(s) = g_z(s)\widetilde{u}(s),$$

kjer je g_z zaprtozančna prenosna funkcija.

Frekvenčna prenosna funkcija

Denimo, da imamo stabilen sistem. Če je vhod sinusni signal $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$, kjer je u_0 konstanta, potem tudi stacionarni odziv niha s frekvenco ω in ima obliko

$$y(t) = u_0 |g_z(i\omega)| \cos[\omega t + \arg(g_z(i\omega))].$$

To pomeni, da se amplituda pomnoži s faktorjem $|g_z(i\omega)|$, ki mu pravimo amplitudni odziv, faznemu premiku odziva $\arg(g_z(i\omega))$ pa pravimo fazni odziv.

Funkcijo $g_z(i\omega)$, iz katere dobimo zgornji dve količini, imenujemo frekvenčna prenosna funkcija.

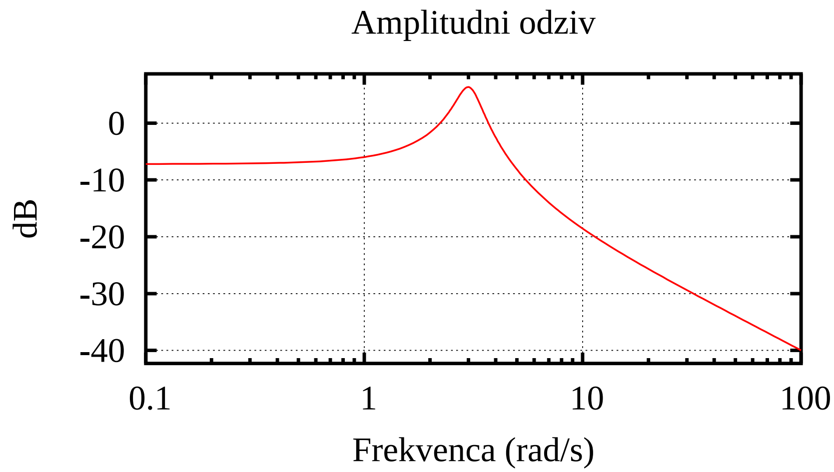
Bodejev diagram

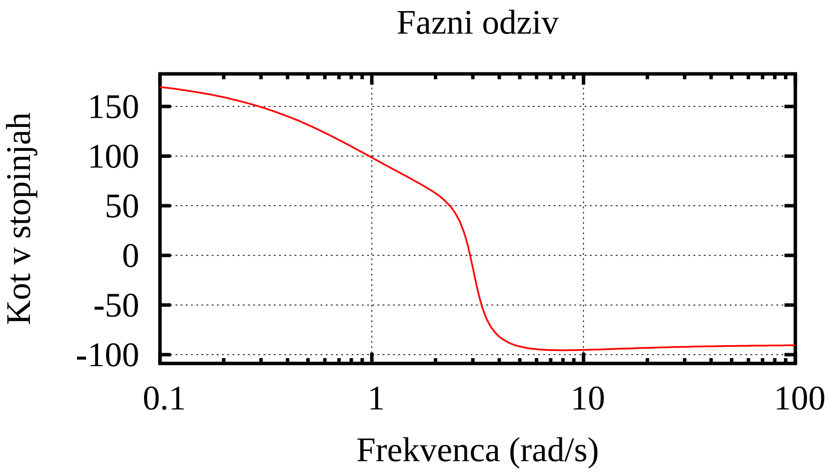
Če za izbrano frekvenčno območje narišemo grafa amplitudnega in faznega odziva dobimo Bodejev diagram. Pri tem amplitudni odziv merimo v decibelih kot

$$|G(i\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|G(i\omega)|,$$

fazni odziv pa v stopinjah.

Zgled. Bodejev diagram za sistem s prenosno funkcijo $g(s) = \frac{(s-1)(s+4)}{(s+1)(s+0.4-3i)(s+0.4+3i)}$.





Opis v prostoru stanj

V prostoru stanj linearni zvezni časovno nespremenljivi sistem opišemo z enačbama

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, & (2) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & (3) \end{aligned}$$

kjer je

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika,
- $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika,
- $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa,
- $x(t) \in \mathbb{R}^{n}$ vektor stanja,
- $u(t) \in \mathbb{R}^{m}$ vhodni signal,
- $y(t) \in \mathbb{R}^{r}$ izhodni signal

in običajno $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačba (2) je enačba stanja, (3) pa je izhodna enačba.

Opis v prostoru stanj 2

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t).
\end{aligned}
$$

Z začetnim stanjem $x(t_0) = x_0$ in vhodom u na časovnem intervalu (t_0, t) je določen izhod za $t \geq t_0$.

Matrike A, B, C in D lahko sestavimo v bločno matriko $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Velja še:

- če je $m = 1$ imamo enovhodni sistem in lahko pišemo $B = b \in \mathbb{R}^n$,
- če je $m > 1$ imamo večvhodni sistem,
- če je $r = 1$ imamo enoizhodni sistem in lahko pišemo $C = c^T$ za $c \in \mathbb{R}^n$,
- če je $r > 1$ imamo večizhodni sistem,
- v primeru $m = 1$ in $r = 1$ imamo univariantni sistem oz. SISO sistem,
- v primeru $m > 1$ in $r > 1$ imamo multivariantni sistem oz. MIMO sistem,
- če je $u(t) \equiv 0$, imamo nevsiljen sistem,
- ponavadi je $D = 0$.

Diskretni sistemi

Pri nekaterih linearnih kontrolnih sistemih so lahko vektorji stanja, vhoda in izhoda definirani le ob fiksnih trenutkih $t_k = k\Delta t$, kjer časovno konstanto Δt imenujemo interval vzorčenja. V tem primeru dobimo linearni diskretni časovno nespremenljivi linearni sistem

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\
y_{k+1} &= C_d x_k + D_d u_k.
\end{aligned}
$$

Do diskretnega sistema pridemo lahko tudi z diskretizacijo zveznega sistema. V tem primeru predpostavimo, da je vhodni vektor $u(t)$ konstanten na intervalu $(k-1)\Delta t \le t < k\Delta t$.

Do takšne situacije pride npr. pri uporabi digitalnega krmiljenja.

Deskriptorski sistemi

V nekaterih primerih ima linearni kontrolni sistem obliko

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

za zvezni primer oziroma

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\ y_{k+1} &= C_d x_k + D_d u_k \end{aligned}$$

za diskretni primer, v obeh primerih je $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Takšnim sistemom pravimo deskriptorski sistemi oz. singularni, če je E singularna.

V primeru, ko je E nesingularna, lahko deskriptorski sistem prevedemo na standardno obliko, vendar to ni vedno priporočljivo.

Prenosna funkcija

Tako kot pri klasični teoriji lahko tudi sedaj s pomočjo Laplaceove transformacije pridemo do prenosne funkcije. V zveznem primeru pri $x(0) = 0$ dobimo

$$\widetilde{y}(s) = G(s)\widetilde{u}(s),$$

kjer sta $\widetilde{y}(s)$ in $\widetilde{u}(s)$ Laplaceovi transformiranki $u(t)$ in $y(t)$, za prenosno funkcijo $G(s)$ pa velja

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Sedaj so lastne vrednosti A poli prenosne funkcije, ki določajo obnašanje sistema.

Rešitev nevsiljenega sistema

Rešitev nevsiljenega sistema $\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$ je

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

kjer je e^{At} eksponentna funkcija matrike. Nekaj njenih lastnosti je

- $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \cdots,$
- $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As},$
- e^{At} je vedno nesingularna matrika,
- $(e^{At})^{-1} = e^{-At},$
- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A.$

Matriko e^{At} imenujemo tudi zvezna prehodna matrika stanja, saj velja

$$x(t) = e^{A(t-s)} x(s)$$

in z množenjem s prehodno matriko pridemo iz enega stanja v drugega.

Rešitev enačbe stanja

V primeru nehomogene enačbe

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

je rešitev

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Očitno je, da za reševanje enačbe stanja potrebujemo ekonomično in natančno računanje eksponentne funkcije matrike in računanje integralov z e^{At}. Teoretično si sicer lahko pomagamo z Jordanovo formo, toda vemo, da je Jordanova forma numerično nestabilna.

Pri diskretnem sistemu je rešitev homogene enačbe stanja $x_{k+1} = Ax_k$ podana z $x_k = A^k x_0$, rešitev nehomogene enačbe stanja $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ pa je

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu_i.$$

Tukaj je glavni problem, kako natančno in učinkovito izračunati potence A^k.

Rešitev preko Jordanove forme

Naj bo $A = XJX^{-1}$, kjer je J Jordanova forma oblike $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_m)$, in kjer je J_k Jordanova kletka dimenzije n_k oblike

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

in $n_1 + \cdots + n_m = n$. Potem je

$$e^{At} = Xe^{Jt}X^{-1} = X\mathrm{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \ldots .e^{J_k t})X^{-1},$$

kjer je

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n_k-1)!}t^{n_k-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilnost

Definicija. Linearni zvezni časovno nespremenljivi invariantni sistem, opisan s homogeno enačbo

$$\dot{x} = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4}$$

je

- asimptotično stabilen, če za vsak x_0 velja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$,
- stabilen, če za vsak x_0 obstaja konstanta c, da je $\|x(t)\| < c$, ko gre $t \longrightarrow \infty$,
- nestabilen, če obstaja x_0, pri katerem gre $\|x(t)\| \longrightarrow \infty$, ko gre $t \longrightarrow \infty$.

Stabilnost je odvisna od lastnih vrednosti matrike A.

Izrek. Naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A. Potem za sistem (4) velja:

- Sistem je asimptotično stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$.
- Sistem je stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$, tiste lastne vrednosti, kjer je $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ pa so polenostavne.
- Sistem je nestabilen, če obstaja lastna vrednost z $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ ali pa defektna lastna vrednost z $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$.

Definicija. Če za vse lastne vrednosti λ_k matrike A velja $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, potem je A stabilna matrika.

Če omejimo x_0 na invariantni podprostor $\mathcal{U}$ matrike A, potem je $\mathcal{U}$ tudi invariantni podprostor za e^{At} in velja $x(t) \in \mathcal{U}$ za poljuben $t \geq 0$. Za takšne primere je pomembno, če je matrika A zožena na podprostor $\mathcal{U}$, stabilna ali ne.

Označimo

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < 0\}, \\ i\mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) = 0\}, \\ \mathbb{C}^+ &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ lahko razdelimo na $\mathbb{R}^n = \mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^+$, kjer so $\mathcal{U}^-$, $\mathcal{U}^0$ in $\mathcal{U}^+$ invariantni podprostori A, ki po vrsti pripadajo lastnim vrednostim iz $\mathbb{C}^-$, $i\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}^+$. Sedaj gre $x(t)$ proti 0 natanko takrat, ko velja $x_0 \in \mathcal{U}^-$, norma $\|x(t)\|$ pa ostane omejena, če je $x_0 \in \mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0$. Zato lahko rečemo, da je $\mathcal{U}^-$ asimptotično stabilen, $\mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0$ stabilen, $\mathcal{U}^+$ pa nestabilen podprostor sistema (4).

Asimptotična stabilnost nam pri kontrolnem sistemu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ zagotavlja, da bo pri omejenem vhodu $u(t)$ tudi stanje $x(t)$ omejeno. Obstajajo numerične metode s katerimi lahko določimo stabilnost sistema brez računanja lastnih vrednosti matrike A.

Podobno teorijo lahko razvijemo tudi za diskretne sisteme.

Definicija. Sistem $x_{k+1} = Ax_k$ je

- asimptotično stabilen natanko tedaj, ko je $\rho(A) < 1$,
- stabilen kadar je $\rho(A) = 1$, tiste lastne vrednosti, kjer je $|\lambda_k| = 1$ pa so polenostavne,
- nestabilen kadar je $\rho(1) > 1$ ali pa obstaja defektna lastna vrednost z $|\lambda_k| = 1$.

Definicija. Če za njen spektralni radij velja $\rho(A) < 1$, potem je A konvergentna matrika.

Vodljivost

Definicija. Linearni kontrolni sistem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, je v celoti vodljiv, če za poljubno začetno stanje x_0 in poljubno predpisano končno stanje x_f obstaja končni t_f in kontrola $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$, da je $x(t_f) = x_f$.

Če je sistem vodljiv, pravimo, da je par (A, B) vodljiv. Pri vodljivem sistemu lahko s primerno izbrano kontrolno funkcijo u iz poljubnega začetnega stanja v končnem času dosežemo poljubno predpisano končno stanje. Izkaže se, da lahko brez škode za splošnost vedno privzamemo, da je $x_f = 0$.

Izrek. Linearni kontrolni sistem je v celoti vodljiv natanko tedaj, ko ima $n \times nm$ vodljivostna matrika

$$P = [\, B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \,]$$

rang n.

V številnih primerih ne potrebujemo, da je sistem v celoti vodljiv.

Prostor lahko razdelimo na vodljiv podprostor $\mathcal{C}$ in na nevodljiv podprostor $\mathcal{C}^{\perp}$, pri čemer $\mathcal{C}$ sestavljajo tisti vektorji x_0, za katere velja, da lahko s primerno kontrolo v končnem času stanje pripeljemo v 0.

Če želimo stabilizirati dani sistem, potem nam zadošča, da velja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^+$. Če sistem izpolnjuje ta pogoj, potem pravimo, da se da stabilizirati. Ker je to odvisno le od matrik A in B, pravimo tudi, da se par (A, B) da stabilizirati. Seveda se sistem avtomatično da stabilizirati kadar je vodljiv.

Spoznavnost

Definicija. Linearni kontrolni sistem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, $y(t) = Cx(t)$ je v celoti spoznaven, če za vsako začetno stanje x_0 obstaja končni čas t_f, da lahko iz poznavanja $u(t)$ in $y(t)$ za $0 \leq t < t_f$ določimo x_0.

Spoznavnost pomeni, da lahko prostor stanj določimo le z opazovanjem. Vse je odvisno od para (A, C).

Izrek. Linearni kontrolni sistem je v celoti spoznaven natanko tedaj, ko ima $rn \times n$ spoznavnostna matrika

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

rang n.

Ker je spoznavnostna matrika ravno transponirana vodljivostna matrika P za par (A^T, C^T), lahko za ugotavljanje spoznavnosti uporabimo tudi kakšno izmed metod za ugotavljanje vodljivosti.

Za linearni kontrolni sistem oz. za matrični par (C, A) pravimo, da je zaznaven, če se par (A^T, C^T) da stabilizirati.

Razporejanje polov

Najpreprostejši način zaprtozančnega linearnega sistema je, da uporabimo linearno povratno zvezo in za vhod uporabimo
$$u(t) = -Kx(t),$$
kjer je $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ povratna matrika. Seveda to lahko naredimo le, če imamo v vsakem trenutku dostop do stanja $x(t)$. Enačba stanja v ustreznem zaprtozančnem sistemu je potem
$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t).$$
Povratno matriko K določimo tako, da bodo lastne vrednosti $A - BK$ ležale v izbranem območju kompleksne ravnine. Izkaže se, da lahko pole razporedimo skoraj poljubno, saj velja naslednji izrek.

Izrek. Naj bo Λ za konjugiranje zaprta množica n kompleksnih števil. Za poljubno tako množico Λ obstaja matrika $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pri kateri so lastne vrednosti $A - BK$ enake Λ natanko tedaj, ko je par (A, B) vodljiv.

V primeru enovhodnega sistema je matrika K, s katero razporedimo pole, enolična, sicer pa imamo neskončno mnogo rešitev.

Optimalna kontrola

Obstaja več vhodnih funkcij, s katerimi reguliramo sistem tako, da se, ko gre $t \longrightarrow \infty$, čim bolj ujema z zastavljenimi cilji. Ponavadi pa nam ne zadošča kakršna koli rešitev, temveč bi radi poiskali optimalno glede na določene kriterije. Npr.:

- pri uravnavanju temperature s klimatsko napravo bi radi porabili čim manj energije,
- z avtomobilom bi radi prišli iz enega kraja v drugega najhitreje.

Pri problemu optimalne linearne kvadratične kontrole iščemo tisto vhodno funkcijo sistema, ki minimizira

$$J(x) = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt, \tag{5}$$

kjer je $Q = M^T M$ semidefinitna matrika, R pa pozitivno definitna matrika. Matrika Q je utež stanja, matrika R pa utež kontrole.

Algebraična Riccatijeva enačba

Izkaže se, da ima problem (5) rešitev, če se par (A, B) da stabilizirati in je par (A, Q) zaznaven. Do rešitve pridemo z reševanjem algebraične Riccatijeve enačbe

$$XA + A^T X + Q - XBR^{-1}B^T X = 0. \tag{6}$$

Če je X enolična pozitivno semidefinitna rešitev (6) in definiramo $K = R^{-1}B^T X$, potem je optimalna vhodna funkcija $u^0(t)$, ki minimizira (5), podana z

$$u^0(t) = -Kx(t).$$

Velja tudi, da je zaprtozančna matrika $A - BK$ stabilna in da je minimalna vrednost $J(x)$ enaka $x_0^T X x_0$, kjer je $x_0 = x(0)$.

Definicija. Algebraični Riccatijevi enačbi

$$XA + A^T X + Q - XSX = 0, \tag{7}$$

kjer je $S = BR^{-1}B^T$ pravimo zvezna algebraična Riccatijeva enačba oz. s kratico CARE. Če je simetrična matrika X taka rešitev CARE, da je matrika $A - SX$ stabilna, potem pravimo, da je X stabilizirajoča rešitev.

Hamiltonska matrika

Definicija. Matriko H oblike

$$H = \begin{bmatrix} A & G \\ Q & -A^T \end{bmatrix},$$

kjer so A, G in Q $n \times n$ matrike in sta G in Q simetrični, imenujemo Hamiltonska matrika.

Riccatijevi enačbi (7) je pridružena Hamiltonska matrika

$$H = \begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & A^T \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Izkaže se, da ima v primeru, ko se par (A, B) da stabilizirati in je par (A, Q) zaznaven, Hamiltonska matrika (8) n lastnih vrednosti v $\mathbb{C}^-$, n lastnih vrednosti v $\mathbb{C}^+$ in nobenih lastnih vrednosti v $i\mathbb{R}$. V tem primeru ima CARE (7) enolično stabilizirajočo rešitev X. Velja še, da so lastne vrednosti zaprtozančne matrike $A - BK$ ravno stabilne lastne vrednosti H.

Diskretna Riccatijeva enačba

Pri diskretnih linearnih sistemih iščemo vhod, ki bo minimiziral

$$J_D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k R u_k).$$

S tem problemom je povezana diskretna algebraična Riccatijeva enačba

$$A^T X A - X + Q - A^T X B (R + B^T X B)^{-1} B^T X A = 0$$

oziroma s kratico DARE.

Literatura

[1] S. Barnett, R. G. Cameron: *Introduction to Mathematical Control Theory*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] B. N. Datta: *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

[3] C. Moler, C. Van Loan: *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later*, SIAM Review **45**, 2003, str. 3–49.

[4] P. Hr. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov: *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall, 1991.