UVOD V LINEARNE KONTROLNE SISTEME

Bor Plestenjak

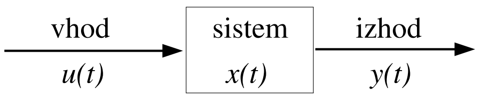
10. oktober 2005

1 Uvod

Kontrolni sistemi nastopajo na najrazličnejših področjih. Skupno vsem je, da imamo dinamični sistem, na katerega lahko vplivamo z vhodnimi podatki. Cilj je vplivati na sistem tako, da se bo njegovo obnašanje čim bolj ujemalo z zastavljenimi cilji. Npr.:

- Če si kot sistem predstavljamo sobo s klimatsko napravo, lahko s prižiganjem in ugašanjem naprave dosežemo, da bo temperatura v sobi čim bližje željeni.
- Kot sistem si lahko predstavljamo vse semaforje v mestu. Z ustreznim prižiganjem in ugašanjem luči lahko dosežemo, da bo promet čim bolj tekoč.
- Na ekonomsko situacijo v državi lahko vplivamo npr. z višino davkov in drugimi parametri.
- Na dlani držimo metlo in se trudimo, da bi stala pokonci. Tudi to je primer kontrolnega sistema.

Pri teoriji kontrolnih sistemov se ukvarjamo s tem, kako regulirati dani sistem, da se bo čim bolj približal postavljenim ciljem. V vhodno-izhodni obliki lahko kontrolni sistem predstavimo v obliki naslednjega diagrama:



Sistem reguliramo z vhodom $u(t)$, izhod iz sistema, ki je odvisen od vhoda, pa je $y(t)$. Notranje spremenljivke, ki opisujejo stanje sistema, so $x(t)$. Pravimo tudi, da sistem *vzbujamo* z vhodom $u(t)$, *odziv* sistema pa je izhod $y(t)$. Pri tem je cilj vhod določiti tako, da bo izhod čim bolj zadoščal izbranim kriterijem. Na nekaterih področjih (npr. elektrotehnika) govorimo o signalih in sta tako $u(t)$ in $y(t)$ vhodni oz. izhodni signal.

Sistem si lahko predstavljamo kot transformacijo $\mathcal{T}$, ki vhod preslika v izhod, torej

$$y(t) = \mathcal{T}[u(t)]. \tag{1}$$

Definicija 1 *Sistem (1) je*

- linearen*, če za poljubna vhoda $u_1(t), u_2(t)$ in skalarja c_1, c_2 velja*

$$\mathcal{T}[c_1u_1(t) + c_2u_2(t)] = c_1\mathcal{T}[u_1(t)] + c_2\mathcal{T}[u_2(t)],$$

- časovno nespremenljiv, *če za poljuben t_0 velja*

$$y(t - t_0) = \mathcal{T}[u(t - t_0)],$$

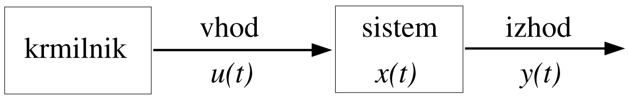
- vzročen, *če velja $\mathcal{T}[u_1(t)] = \mathcal{T}[u_2(t)]$ za vse t natanko tedaj, ko za vse t velja $u_1(t) = u_2(t)$.*

Vodenje sistema ponavadi poteka avtomatično preko *regulatorja* ali *krmilnika*, ki proizvaja vhod $u(t)$. Pri tem ločimo sisteme na dve vrsti.

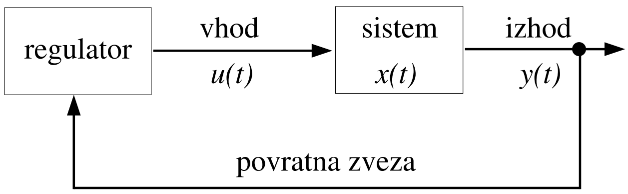
Preprostejša oblika so *odprtozančni sistemi*, kjer delovanje krmilnika ni odvisno od izhoda sistema. Npr.:

- Luči na semaforjih prižigamo in ugašamo v vnaprej predpisanih časovnih intervalih, neodvisno od prometne situacije.

Shemo odprtozančnega kontrolnega sistema predstavlja naslednja slika:



Kompleksnejša oblika so *zaprtozančni sistemi*, kjer imamo *povratno zanko* med izhodom in regulatorjem. Shema zaprtozančnega sistema je predstavljena na naslednji sliki:



Primeri zaprtozančnih sistemov so npr.:

- Sistem, ki odvisno od prometne situacije krmili semaforje v mestu s ciljem preprečevanja zastojev.
- Avtomatska klimatska naprava, kjer sistem glede na temperaturo sobe, ki je v bistvu izhod sistema, samodejno vklaplja in izklaplja napravo.

2 Klasična teorija

Pri klasični teoriji imamo *linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem*, kjer sta vhod in izhod skalarja, oziroma, u in y sta realni funkciji časa. Z vhodom $u(t)$ reguliramo obnašanje sistema in s tem izhod $y(t)$. Če je cilj, da se $y(t)$ čim bolj ujema z danim referenčnim signalom $r(t)$, potem tak sistem imenujemo *servomehanizem*. V primeru, ko je referenčni signal konstanten, je to *regulator*. Zgled za regulator je npr. klimatska naprava, kjer želimo imeti temperaturo čim bližje nastavljeni.

V klasični teoriji ima zvezni model obliko diferencialne enačbe n-tega reda

$$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_{n-1}y'(t) + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \beta_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + \beta_m u(t), \quad (2)$$

kjer je ponavadi $m < n$.

Pri predpostavki, da so vsi začetni pogoji za y in u ničelni, torej $y^{(i)}(0) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$ in $u^{(j)}(0) = 0$ za $j = 1, \ldots, m$, z Laplaceovo transformacijo dobimo

$$k(s)\widetilde{y}(s) = \beta(s)\widetilde{u}(s), \tag{3}$$

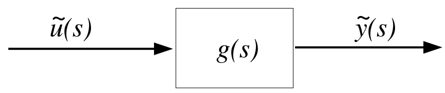
kjer je

$$\begin{aligned}
k(s) &= s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n, \\
\beta(s) &= \beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \cdots + \beta_m, \\
\widetilde{y}(s) &= \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt, \\
\widetilde{u}(s) &= \mathcal{L}(u(t)).
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\widetilde{y}(s) = g(s)\widetilde{u}(s), \tag{4}$$

kjer je $g(s) = \beta(s)/k(s)$ *prenosna funkcija.*



Prenosna funkcija je racionalna funkcija, katere števec in imenovalec sta Laplaceovi transformiranki vhoda oziroma izhoda. Ničle karakterističnega polinoma $k(s)$ so *poli* prenosne funkcije $g(s)$, *ničle* prenosne funkcije pa so ničle $\beta(s)$. Vsako prenosno funkcijo lahko zapišemo v t.i. *obliki z ničlami, poli in ojačenjem* kot

$$g(s) = K\frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - \mu_1)\cdots(s - \mu_n)}. \tag{5}$$

Če poznamo vhod $u(t)$ in s tem transformiranko $\widetilde{u}(s)$, lahko dobimo rešitev $y(t)$ s pomočjo razvoja v parcialne ulomke. Naj bodo poli prenosne funkcije vsi enostavni. Potem v razvoju $g(s)$ v parcialne ulomke dobimo člene oblike $c_i/(s - \mu_i)$. Od tod po inverzni Laplaceovi transformaciji dobimo v $y(t)$ člene $c_i e^{\mu_i t}$. Podobno lahko naredimo tudi v primeru večkratnega pola, le da sedaj v $y(t)$ dobimo člen $p_i(t)e^{\mu_i t}$, kjer je p_i polinom stopnje za eno manjše od večkratnosti pola μ_i.

Impulzni odziv je izhod sistema, če za vhod vzamemo *Diracovo delta funkcijo* $\delta(t)$, ki je definirana z

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

in $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$ (predstavljamo si lahko, da to situacijo dobimo v limiti primerno izbranega zaporedja funkcij). V tem primeru vhod $u(t) = \delta(t)$ imenujemo *enotski impulz*, impulzni odziv pa označimo s $h(t)$, torej $h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$. Impulzni odziv nam opiše naš sistem, saj zaradi

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(t - s)ds$$

za poljuben vhod velja

$$y(t) = \mathcal{T}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)h(t - s)ds,$$

izhod je torej konvolucija vhoda in impulznega odziva. Enotski impulz nastopi npr. pri sistemu uteži in vzmeti, ko se na začetku ena utež zaleti v drugo. Pri tem pride do trenutnega impulza.

Zelo pomemben je tudi odziv sistema, če za vhod vzamemo *enotsko stopnico*

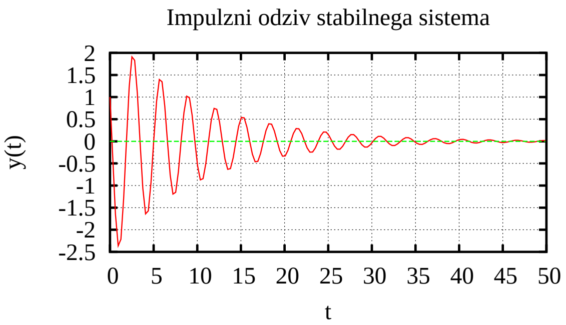
$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t \geq 0, \\ 0 & \text{za } t < 0. \end{cases}$$

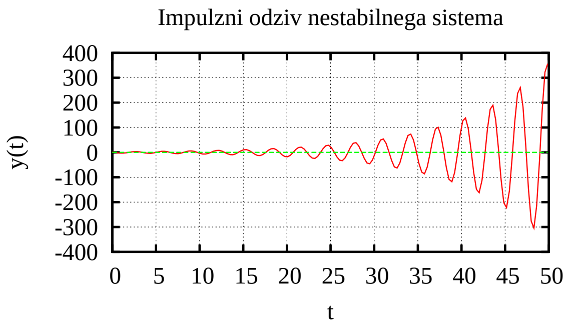
V tem primeru govorimo o *stopničnem odzivu* $g(t) = \mathcal{T}[e(t)]$. Do stopničnega odziva pride npr. takrat, ko vključimo kak neskončen proces, npr. prižgemo klimatsko napravo.

Definicija 2 *Linearni zvezni časovno nespremenljivi sistem je* vzhodno-izhodno stabilen, *kadar je v primeru omejenega vhoda tudi izhod omejen. To pomeni, da za vsako konstanto* $M > 0$ *obstaja* $N > 0$*, da iz* $|u(t)| \leq M$ *sledi* $|y(t)| \leq N$ *za vsak* $t \geq 0$.

Sistem je vhodno-izhodno stabilen, če je njegov impulzni odziv $h(t)$ v $L_1(\mathbb{R})$, torej obstaja konstanta K, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq K.$$





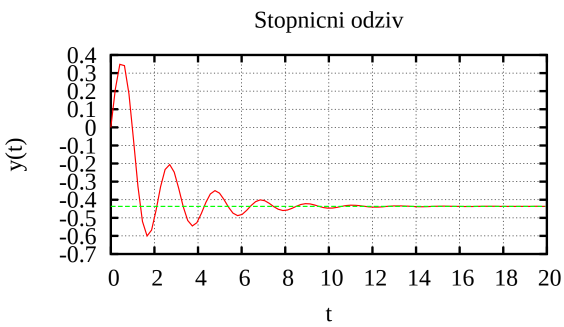
Na slikah imamo impulzna odziva odprtozančnih sistemov s prenosnima funkcijama

$$g_1(s) = \frac{(s-4)(s+2)}{(s+1.5)(s+0.1-2i)(s+0.1+2i)}, \quad g_2(s) = \frac{(s-4)(s+2)}{(s+1.5)(s-0.1-2i)(s-0.1+2i)}.$$

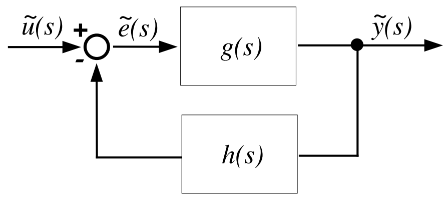
Prvi sistem je stabilen, drugi pa ne. Stabilnost sistema je odvisna od polov prenosne funkcije $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Če za vse pole velja, da je $\mathrm{re}(\mu_i) < 0$, je sistem stabilen. V primeru, ko obstaja $\mathrm{re}(\mu_i) > 0$, je sistem nestabilen. V primeru enostavnih polov na imaginarni osi ostane odziv omejen in sicer gre v primeru $\mu_i = 0$ proti konstanti, v primeru čisto imaginarnih polov pa proti sinusnemu nihanju.

Naslednja slika prikazuje stopnični odziv sistema podanega s prenosno funkcijo

$$g(s) = \frac{(s-1)(s+4)}{(s+1)(s+0.4-3i)(s+0.4+3i)}. \tag{6}$$



Vsak izhod lahko razdelimo na vsoto *prehodnega odziva* in *stacionarnega odziva.* Vemo, da je izhod sestavljen kot vsota funkcij oblike $c_{ik}t^k e^{\mu_i t}$. V prehodni odziv pridejo členi, ki gredo proti 0, ko gre $t \to \infty$, torej $\mathrm{re}(\mu_i) < 0$, ostali členi pa v stacionarni odziv. Kot je vidno tudi iz zgornje slike, se pri majhnem t, ko prevladuje prehodni odziv, vrednosti lahko dosti razlikujejo od željene končne vrednosti.



V primeru povratne zveze imamo $\widetilde{e}(s) = \widetilde{u}(s) - h(s)\widetilde{y}(s)$. Od tod dobimo $\widetilde{y}(s) = g(s)\widetilde{e}(s) = g(s)(\widetilde{u}(s) - h(s)\widetilde{y}(s))$. Ko izrazimo $\widetilde{y}(s)$, dobimo

$$\widetilde{y}(s) = \frac{g(s)}{1 + g(s)h(s)}\widetilde{u}(s) = g_z(s)\widetilde{u}(s),$$

kjer je g_z zaprtozančna prenosna funkcija.

Denimo, da je vhod enotska stopnica $u(t) = e(t)$. Naj bo

$$g_z(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(-\mu_i)\prod_{i=1}^{m}(s - y_i)}{\prod_{i=1}^{m}(-y_i)\prod_{i=1}^{n}(s - \mu_i)},$$

kjer so poli zaprtozančne prenosne funkcije enostavni. Potem dobimo $\widetilde{u}(s) = 1/s$ in

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\mu_i t},$$

kjer je

$$A_i = \lim_{s \to \mu_i} \frac{(s - \mu_i)g_z(s)}{\mu_i}.$$

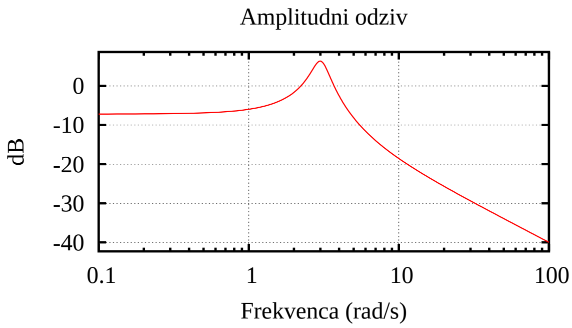
Denimo, da imamo stabilen sistem. Če za vhod vzamemo sinusni signal $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$, kjer je u_0 konstanta, potem se izkaže, da tudi stacionarni odziv niha s frekvenco ω in ima obliko

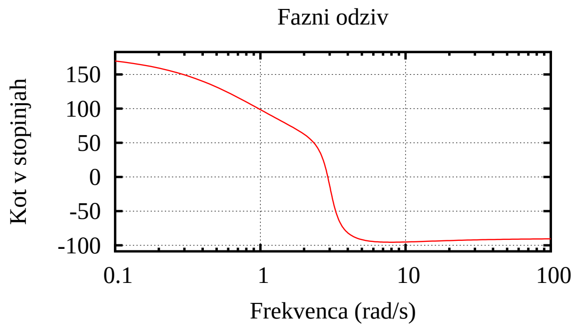
$$y(t) = u_0|g_z(i\omega)|\cos[\omega t + \arg(g_z(i\omega))].$$

To pomeni, da se amplituda pomnoži s faktorjem $|g_z(i\omega)|$, ki mu pravimo *amplitudni odziv*, faznemu premiku odziva $\arg(g_z(i\omega))$ pa pravimo *fazni odziv.* Funkcijo $g_z(i\omega)$, iz katere dobimo zgornji dve količini, imenujemo *frekvenčna prenosna funkcija.* Za izbrano frekvenčno območje lahko narišemo grafa amplitudnega in faznega odziva ter tako dobimo *Bodejev diagram.* V tem diagramu amplitudni odziv merimo v decibelih kot

$$|G(i\omega)||_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|G(i\omega)|,$$

fazni odziv pa v stopinjah. Naslednja slika prikazuje Bodejev diagram za sistem s prenosno funkcijo (6).





3 Opis v prostoru stanj

V prostoru stanj *linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem* opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \tag{7}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{8}$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrika stanja*, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *vhodna matrika*, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *izhodna matrika*, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *matrika direktnega prenosa*, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *vektor stanja*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ *vhodni signal* in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ *izhodni signal*. Ponavadi velja $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (7) pravimo *enačba stanja*, (8) pa je *izhodna enačba*.

Iz stanja sistema x_0 v trenutku t_0 in obnašanja vhoda na časovnem intervalu (t_0, t) lahko reguliramo obnašanje izhoda za $t \geq t_0$.

Sistem lahko opišemo tudi tako, da matrike A, B, C in D, ki sestavljajo linearni zvezni kontrolni sistem, sestavimo v bločno matriko

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Velja:

- če je $m = 1$ imamo *enovhodni sistem* in lahko pišemo $B = b \in \mathbb{R}^n$,
- če je $m > 1$ imamo *večvhodni sistem*,
- če je $r = 1$ imamo *enoizhodni sistem* in lahko pišemo $C = c^T$ za $c \in \mathbb{R}^n$,
- če je $r > 1$ imamo *večizhodni sistem*,
- v primeru $m = 1$ in $r = 1$ imamo *univariantni sistem* oz. *SISO sistem* (single-input single-output),
- v primeru $m > 1$ in $r > 1$ imamo *multivariantni sistem* oz. *MIMO sistem* (multi-input multi-output),
- če je $u(t) \equiv 0$, imamo *nevsiljeni sistem*,
- ponavadi je $D = 0$.

Pri nekaterih linearnih kontrolnih sistemih so lahko vektorji stanja, vhoda in izhoda definirani le ob fiksnih trenutkih $t_k = k\Delta t$, kjer časovno konstanto Δt imenujemo *interval vzorčenja*. V tem primeru imamo *linearni diskretni časovno nespremenljivi linearni sistem*, ki ga lahko zapišemo v obliki

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \tag{9}$$
$$y_{k+1} = C_d x_k + D_d u_k. \tag{10}$$

En način, kako lahko pridemo do diskretnega sistema, je diskretizacija linearnega zveznega kontrolnega sistema. V tem primeru predpostavimo, da je vhodni vektor $u(t)$ konstanten na intervalu $(k-1)\Delta t \le t < k\Delta t$. Do takšne situacije pride npr. takrat, ko uporabljamo digitalno krmiljenje.

V nekaterih primerih linearni kontrolni sistem opišemo v obliki

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

za zvezni primer oziroma

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\ y_{k+1} &= C_d x_k + D_d u_k \end{aligned}$$

za diskretni primer, v obeh primerih je $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Takšnim sistemom pravimo *deskriptorski sistemi* oz. *singularni*, če je E singularna. V primeru, ko je E nesingularna, lahko deskriptorski sistem prevedemo na obliko (7,8) oz. (9,10). Je pa res, da z numeričnega stališča v primeru, ko je E blizu singularne matrike, zaradi slabe pogojenosti ni priporočljivo uporabljati matrike E^{-1}.

Tako kot pri klasični teoriji lahko tudi sedaj s pomočjo Laplaceove transformacije pridemo do prenosne funkcije. V zveznem primeru pri $x(0) = 0$ dobimo

$$\widetilde{y}(s) = G(s)\widetilde{u}(s),$$

kjer sta $\widetilde{y}(s)$ in $\widetilde{u}(s)$ Laplaceovi transformiranki $u(t)$ in $y(t)$, za prenosno funkcijo $G(s)$ pa velja

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{11}$$

Lastne vrednosti A so zelo pomembne za obnašanje sistema. Imenujemo jih tudi *poli sistema*.

4 Rešitev enačbe stanja

Rešitev nevsiljenega sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

je

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

kjer je e^{At} *eksponentna funkcija matrike*. Nekaj njenih lastnosti je

- $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \cdots,$
- $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$,
- e^{At} je vedno nesingularna matrika,

- $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$,
- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$.

Matriko e^{At} imenujemo tudi *zvezna prehodna matrika stanja*, saj velja

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s)$$

in lahko tako z množenjem s prehodno matriko pridemo iz enega stanja v drugega.

V primeru nehomogene enačbe

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

je rešitev

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Očitno je, da za reševanje enačbe stanja potrebujemo ekonomično in natančno računanje eksponentne funkcije matrike in računanje integralov z e^{At}. Teoretično si sicer lahko pomagamo z Jordanovo formo, toda vemo, da je Jordanova forma numerično nestabilna. Obstaja več numeričnih metod za računanje eksponentne funkcije matrike, a nobena ni popolna [3]. Obravnavali bomo nekaj metod, ki so se izkazale za boljše od ostalih.

Za teoretične izpeljave bo zelo koristna rešitev dobljena preko Jordanove forme. Naj bo $A = XJX^{-1}$, kjer je J Jordanova forma oblike $J = \text{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_m)$, in kjer je J_k Jordanova kletka dimenzije n_k oblike

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

in $n_1 + \cdots + n_m = n$. Potem je

$$e^{At} = Xe^{Jt}X^{-1} = X\text{diag}(e^{J_1t}, e^{J_2t}, \ldots . e^{J_kt})X^{-1},$$

kjer je

$$e^{J_kt} = e^{\lambda_kt} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n_k-1)!}t^{n_k-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j} g_{ij}\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_it}x_{ij},$$

če je

$$X = [\, x_{11} \quad \cdots \quad x_{1n_1} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{2n_2} \quad \cdots \quad x_{mm_1} \quad \cdots \quad x_{mn_m} \,]$$

matrika lastnih in korenskih vektorjev. Za koeficiente g_{ij} velja

$$g = [\, g_{11} \quad \cdots \quad g_{1n_1} \quad g_{21} \quad \cdots \quad g_{2n_2} \quad \cdots \quad g_{mm_1} \quad \cdots \quad g_{mn_m} \,]^T,$$

kjer je $g = X^{-1}x_0$.

V primeru, ko se da A diagonalizirati, se da odziv sistema izraziti z linearno kombinacijo lastnih nihanj vzdolž lastnih vektorjev x_i v obliki $e^{\lambda_i t}x_i$. Matriki $X = [\,x_1 \quad \cdots \quad x_n\,]$ z lastnimi vektorji pravimo *modalna matrika*.

Pri diskretnem sistemu je rešitev homogene enačbe stanja $x_{k+1} = Ax_k$ podana z $x_k = A^k x_0$, rešitev nehomogene enačbe stanja $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ pa je

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu_i.$$

Tukaj je glavni problem, kako natančno in učinkovito izračunati potence A^k.

Zvezni sistem lahko aproksimiramo z diskretnim sistemom. To uporabimo npr. v primeru digitalnega krmiljenja, ko ima vhod $u(t)$ obliko kosoma linearne funkcije. Predpostavimo torej, da velja $u(t) = u(k\Delta t)$ za $k\Delta t \le t < (k+1)\Delta t$, kjer je Δt interval vzorčenja. Rešitev zveznega sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

za $t \ge k\Delta t$ je

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-k\Delta t)}x(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

torej za vektor stanja v trenutku $t = (k+1)\Delta t$ velja

$$x((k+1)\Delta t) = e^{A\Delta t}x(k\Delta t) + \left(\int_0^{\Delta t} e^{As}ds\right) Bu(k\Delta t)ds.$$

Če označimo

$$x_k = x(k\Delta t), \qquad y_k = y(k\Delta t), \qquad u_k = u(k\Delta t),$$

dobimo diskretni sistem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\ y_{k+1} &= Cx_k + Du_k, \end{aligned}$$

kjer je

$$A_d = e^{A\Delta t}, \qquad B_d = \left(\int_0^{\Delta t} e^{As}ds\right) B.$$

5 Stabilnost

Definicija 3 *Linearni zvezni časovno nespremenljivi invariantni sistem, opisan z homogeno enačbo*

$$\dot{x} = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{12}$$

je

- asimptotično stabilen, *če za vsak* x_0 *velja* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$,

- stabilen, *če za vsak* x_0 *obstaja konstanta* c*, da je* $\|x(t)\| < c$*, ko gre* $t \to \infty$*,*

- nestabilen, *če obstaja* x_0*, pri katerem gre* $\|x(t)\| \to \infty$*, ko gre* $t \to \infty$*.*

Stabilnost je odvisna od lastnih vrednosti matrike A.

Izrek 4 *Naj bodo* λ_k*,* $k = 1, \ldots, n$*, lastne vrednosti matrike* A*. Potem za sistem (12) velja:*

- *Sistem je asimptotično stabilen, če za vse lastne vrednosti velja* $\mathrm{re}(\lambda_k) < 0$*.*

- *Sistem je stabilen, če za vse lastne vrednosti velja* $\mathrm{re}(\lambda_k) \le 0$*, tiste lastne vrednosti, kjer je* $\mathrm{re}(\lambda_k) = 0$ *pa so polenostavne.*

- *Sistem je nestabilen, če obstaja lastna vrednost z* $\mathrm{re}(\lambda_k) > 0$ *ali pa defektna lastna vrednost z* $\mathrm{re}(\lambda_k) = 0$*.*

Definicija 5 *Če za vse lastne vrednosti* λ_k *matrike* A *velja* $\mathrm{re}(\lambda_k) < 0$*, potem je* A stabilna matrika*. V tem primeru je*

$$\min\{-\mathrm{re}(\lambda_k) : \ k = 1, \ldots, n\}$$

meja stabilnosti *matrike* A*.*

Pri definiciji stabilnosti smo upoštevali, da je začetni pogoj x_0 lahko poljuben. Če omejimo x_0 na nek invariantni podprostor $\mathcal{U}$ matrike A, potem je $\mathcal{U}$ tudi invariantni podprostor za e^{At}, to pa pomeni, da velja $x(t) \in \mathcal{U}$ za poljuben $t \ge 0$. Za takšne primere je pomembno, če je matrika A zožena na podprostor $\mathcal{U}$, stabilna ali ne.

Označimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{re}(z) < 0\}, \\
i\mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{re}(z) = 0\}, \\
\mathbb{C}^+ &= \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{re}(z) > 0\}.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ lahko razdelimo na $\mathbb{R}^n = \mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^+$, kjer so $\mathcal{U}^-$, $\mathcal{U}^0$ in $\mathcal{U}^+$ invariantni podprostori A, ki po vrsti pripadajo lastnim vrednostim iz $\mathbb{C}^-$, $i\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}^+$. Sedaj gre $x(t)$ proti 0 natanko takrat, ko velja $x_0 \in \mathcal{U}^-$, norma $\|x(t)\|$ pa ostane omejena, če je $x_0 \in \mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0$. Zato lahko rečemo, da je $\mathcal{U}^-$ *asimptotično stabilen*, $\mathcal{U}^- \oplus \mathcal{U}^0$ *stabilen*, $\mathcal{U}^+$ pa *nestabilen* podprostor sistema (12).

Asimptotična stabilnost nam pri kontrolnem sistemu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ zagotavlja, da bo pri omejenem vhodu $u(t)$ tudi stanje $x(t)$ omejeno. Obstajajo metode, kako lahko določimo stabilnost sistema brez računanja lastnih vrednosti matrike A. Nekaj možnosti je:

- preko koeficientov karakterističnega polinoma,

- preko matrične enačbe Ljapunova,

- z uporabo Gerschgorinovih krogov in drugih lokacijskih izrekov.

Podobno teorijo lahko razvijemo tudi za diskretne sisteme.

Izrek 6 *Sistem* $x_{k+1} = Ax_k$ *je*

- *asimptotično stabilen natanko tedaj, ko je* $\rho(A) < 1$*,*

- *stabilen kadar je* $\rho(A) = 1$*, tiste lastne vrednosti, kjer je* $|\lambda_k| = 1$ *pa so polenostavne,*

- *nestabilen kadar je $\rho(1) > 1$ ali pa obstaja defektna lastna vrednost z $|\lambda_k| = 1$.*

Definicija 7 *Če za njen spektralni radij velja $\rho(A) < 1$, potem je A* konvergentna matrika.

Med diskretnim in zveznim modelom obstaja naslednja povezava. Če je A matrika diskretnega sistema in je $A+I$ obrnljiva, lahko definiramo $A_z = (A-I)(A+I)^{-1}$. Med lastnimi vrednostmi μ matrike A_z in lastnimi vrednostmi λ matrike A velja povezava

$$\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad \text{oz.} \quad \mu = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

To pomeni, da je $|\lambda_k| < 1$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{re}(\mu_k) < 0$. Od tod sledi, da je A konvergentna matrika natanko tedaj, ko je A_z stabilna matrika.

Tudi za preverjanje konvergentnosti matrike A imamo poleg računanja lastnih vrednosti na voljo še druge kriterije. Spet lahko uporabimo npr. koeficiente karakterističnega polinoma ali pa diskretno matrično enačbo Ljapunova.

6 Vodljivost in spoznavnost

Definicija 8 *Linearni kontrolni sistem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, je* v celoti vodljiv, *če za poljubno začetno stanje x_0 in poljubno predpisano končno stanje x_f obstaja končni t_f in kontrola $u(t)$, $0 \le t \le t_f$, da je $x(t_f) = x_f$.*

Če je sistem vodljiv, potem pravimo, da je par (A, B) *vodljiv.* Pri vodljivem sistemu lahko s primerno izbrano kontrolno funkcijo u iz poljubnega začetnega stanja v končnem času dosežemo poljubno predpisano končno stanje. Izkaže se, da lahko brez škode za splošnost vedno privzamemo, da je $x_f = 0$.

Izrek 9 *Linearni kontrolni sistem (7,8) je v celoti vodljiv natanko tedaj, ko ima $n \times nm$ kontrolabilna matrika*

$$P = [\,B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\,]$$

rang n. Če je $\mathrm{rang}(B) = p$, *se to reducira na*

$$\mathrm{rang}\,([\,B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-p}B\,]) = n.$$

Podobno, kot smo $\mathbb{R}^n$ razdelili na stabilen in nestabilen podprostor, lahko sedaj prostor razdelimo na vodljiv podprostor $\mathcal{C}$ in na nevodljivi podprostor $\mathcal{C}^\perp$, pri čemer $\mathcal{C}$ sestavljajo tisti vektorji x_0, za katere velja, da lahko s primerno kontrolo v končnem času stanje pripeljemo v 0.

V številnih primerih ne potrebujemo, da je sistem v celoti vodljiv. Če želimo stabilizirati dani sistem, potem nam zadošča, da velja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^+$. To pomeni, da lahko vsa stanja, ki ne pripadajo asimptotično stabilnemu podprostoru $\mathcal{U}^-$, vodimo proti 0. Če sistem izpolnjuje ta pogoj, potem pravimo, da se*da stabilizirati.* Ker je to odvisno le od matrik A in B, pravimo tudi, da se par (A, B) da stabilizirati. Seveda se sistem avtomatično da stabilizirati kadar je vodljiv.

Če sistem ni v celoti vodljiv, ga lahko z nesingularno transformacijo stanja prevedemo v obliko

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

kjer je par (A_{11}, B_1) vodljiv, dimenzija x_1 pa je $\mathrm{rang}\,([\,B \quad AB \quad \cdots A^{n-1}B\,]) < n$. Vektor $x_2(t)$ vsebuje komponente stanja, ki so popolnoma nevodljive. Lastne vrednosti A_{22} so *nevodljivi poli* sistema. Sistem se da stabilizirati, če je A_{22} stabilna matrika. Lastna nihanja sistema, ki se da stabilizirati, so asimptotično stabilna. Če je sistem asimptotično stabilen, potem se torej tudi da stabilizirati.

Definicija 10 *Linearni kontrolni sistem* $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, $y(t) = Cx(t)$ *je* v celoti spoznaven, *če za vsako začetno stanje* x_0 *obstaja končni čas* t_f, *da lahko iz poznavanja* $u(t)$ *in* $y(t)$ *za* $0 \le t < t_f$ *določimo* x_0.

Spoznavnost pomeni, da lahko prostor stanj določimo le z opazovanjem. Vse je odvisno od para (A, C).

Izrek 11 *Linearni kontrolni sistem (7,8) je v celoti spoznaven natanko tedaj, ko ima* $rn \times n$ *spoznavnostna matrika*

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

rang n.

Opazimo lahko, da je spoznavnostna matrika ravno transponirana vodljivostna matrika P za par (A^T, C^T). Zaradi tega lahko za ugotavljanje spoznavnosti uporabimo tudi kakšno izmed metod, ki jih imamo za ugotavljanje vodljivosti.

Za linearni kontrolni sistem (7,8) oz. za matrični par (C, A) pravimo, da je *zaznaven*, če se par (A^T, C^T) da stabilizirati.

7 Razporejanje polov

Najpreprostejši način zaprtozančnega linearnega sistema je, da uporabimo linearno povratno zvezo in za vhod uporabimo

$$u(t) = -Kx(t),$$

kjer je $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *povratna matrika*. Seveda to lahko naredimo le, če imamo v vsakem trenutku dostop do stanja $x(t)$. Enačba stanja v ustreznem zaprtozančnem sistemu je potem

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t).$$

Ker je obnašanje sistema, ko gre t proti neskončnosti, določeno s poli sistema, si ponavadi izberemo povratno matriko K tako, da bodo lastne vrednosti $A - BK$ ležale v izbranem območju kompleksne ravnine. Izkaže se, da lahko pole razporedimo skoraj poljubno, saj velja naslednji izrek.

Izrek 12 *Naj bo* Λ *za konjugiranje zaprta množica* n *kompleksnih števil. Za poljubno tako množico* Λ *obstaja matrika* $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *pri kateri so lastne vrednosti* $A - BK$ *enake* Λ *natanko tedaj, ko je par* (A, B) *vodljiv.*

Izkaže se, da je matrika K, s katero razporedimo pole, enolična, če imamo enovhodni sistem, sicer pa imamo neskončno mnogo rešitev.

Dostikrat nimamo dostopa do stanja $x(t)$ in moramo potem za povratno zvezo uporabiti izhod $y(t)$. V tem primeru za vhod vzamemo

$$u(t) = -Ky(t).$$

Ker je $y(t) = Cx(t)$ (predpostavimo, da je $D = 0$), potem dobimo zaprtozančni sistem z enačbo stanja

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t).$$

Podobno kot prej želimo določiti K tako, da bo imela matrika $A - BKC$ vnaprej predpisano razporeditev lastnih vrednosti.

8 Optimalna kontrola

Obstaja več vhodnih funkcij, s katerimi reguliramo sistem tako, da se, ko gre $t \to \infty$, čim bolj ujema z zastavljenimi cilji. Ponavadi pa nam ne zadošča kakršna koli rešitev, temveč bi radi poiskali optimalno glede na določene kriterije. Npr., če s klimatsko napravo uravnavamo temperaturo v prostoru, potem bi radi to naredili tako, da bomo porabili čim manj energije. Podobno, če imamo sistem blažilnikov v avtomobilu, potem bi radi, da delujejo tako, da se bodo potniki počutili udobno.

Pri *problemu optimalne linearne kvadratične kontrole* iščemo tisto vhodno funkcijo sistema (7,8), ki minimizira

$$J(x) = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt, \tag{13}$$

kjer je $Q = M^T M$ semidefinitna matrika, R pa pozitivno definitna matrika. Matrika Q je *utež stanja*, matrika R pa *utež kontrole.*

Izkaže se, da ima problem (13) rešitev, če se par (A, B) da stabilizirati in je par (A, Q) zaznaven. Do rešitve pridemo z reševanjem *algebraične Riccatijeve enačbe*

$$XA + A^T X + Q - XBR^{-1}B^T X = 0. \tag{14}$$

Če je X enolična pozitivno semidefinitna rešitev (14) in definiramo $K = R^{-1}B^T X$, potem je optimalna vhodna funkcija $u^0(t)$, ki minimizira (13), podana z

$$u^0(t) = -Kx(t).$$

Velja tudi, da je zaprtozančna matrika $A - BK$ stabilna in da je minimalna vrednost $J(x)$ enaka $x_0^T X x_0$, kjer je $x_0 = x(0)$.

Definicija 13 *Algebraični Riccatijevi enačbi*

$$XA + A^T X + Q - XSX = 0, \tag{15}$$

kjer je $S = BR^{-1}B^T$ pravimo zvezna algebraična Riccatijeva enačba *oz. s kratico* CARE. *Če je simetrična matrika X taka rešitev CARE, da je matrika $A - SX$ stabilna, potem pravimo, da je X* stabilizirajoča rešitev.

Definicija 14 *Matriko H oblike*

$$H = \begin{bmatrix} A & G \\ Q & -A^T \end{bmatrix},$$

kjer so A, G in Q $n \times n$ matrike in sta G in Q simetrični, imenujemo Hamiltonska matrika.

Če definiramo poševno simetrično matriko

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je I identiteta $n \times n$, potem je H Hamiltonska matrika natanko tedaj, ko velja

$$HJ = (HJ)^T.$$

Riccatijevi enačbi (15) je pridružena Hamiltonska matrika

$$H = \begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & A^T \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Izkaže se, da ima v primeru, ko se par (A, B) da stabilizirati in je par (A, Q) zaznaven, Hamiltonska matrika (16) n lastnih vrednosti v $\mathbb{C}^-$, n lastnih vrednosti v $\mathbb{C}^+$ in nobenih lastnih vrednosti v $i\mathbb{R}$. V tem primeru ima CARE (15) enolično stabilizirajočo rešitev X. Velja še, da so lastne vrednosti zaprtozančne matrike $A - BK$ ravno stabilne lastne vrednosti H.

En numeričen algoritem za reševanje problem optimalne kontrole tako poteka preko računanja stabilnega invariantnega podprostora pridružene Hamiltonske matrike.

Pri diskretnih linearnih sistemih (9), (10) iščemo vhod, ki bo minimiziral

$$J_D(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k R u_k).$$

S tem problemom je povezana *diskretna algebraična Riccatijeva enačba*

$$A^T XA - X + Q - A^T XB(R + B^T XB)^{-1} B^T XA = 0$$

oziroma s kratico *DARE*.

Literatura

[1] S. Barnett, R. G. Cameron: *Introduction to Mathematical Control Theory*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] B. N. Datta: *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

[3] C. Moler, C. Van Loan: *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later*, SIAM Review **45**, 2003, str. 3–49.

[4] P. Hr. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov: *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall, 1991.