Naloge iz LaTeXa : 2. del

Prepišite naslednji matematični tekst.

Izrek. Naj bo λ_i enostavna lastna vrednost A, x_i ustrezni desni, y_i levi lastni vektor in $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Če je $\lambda_i + \delta\lambda_i$ ustrezna lastna vrednost $A + \delta A$ in $x_i + \delta x_i$ ustrezni lastni vektor, potem velja

$$\lambda_i + \delta\lambda_i \approx \lambda_i + \frac{y_i^* \delta A x_i}{y_i^* x_i}.$$

in

$$x_i + \delta x_i \approx x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{y_j^* \delta A x_i}{(\lambda_i - \lambda_j) s_j} x_j.$$

Dokaz. Velja $Ax_i = \lambda_i x_i$ in $(A + \delta A)(x_i + \delta x_i) = (\lambda_i + \delta\lambda_i)(x_i + \delta x_i)$. Če zanemarimo kvadratne δ člene in pomnožimo enačbo z leve z y_i^*, dobimo

$$\delta\lambda_i = \frac{y_i^* \delta A x_i}{y_i^* x_i}.$$

Definicija. Če definiramo $s_i := \frac{y_i^* x_i}{\|x_i\|_2 \|y_i\|_2}$, je s_i^{-1} občutljivost enostavne lastne vrednosti λ_i. Če je λ_i večkratna lastna vrednost, je občutljivost ∞.

Če je $A = A^T$, potem je $s_i = 1$, saj so levi lastni vektorji enaki desnim.

Prepišite naslednji matematični tekst.

Vzemimo število $x > 0$ in ga s kalkulatorjem najprej 80-krat korenimo in nato 80-krat kvadriramo. Kaj dobimo? Izkaže se, da za $x \geq 1$ dobimo 1, za $0 < x < 1$ pa dobimo 0! Za razumljivejšo razlago si poglejmo model kalkulatorja HP 48G, kjer je baza desetiška, dolžina mantise pa je 12.

Poglejmo najprej primer $0 < x < 1$. Za takšne x velja $\sqrt{x} > x$. Največje predstavljivo število, ki je še manjše od 1, je $1 - 10^{-12}$ oziroma $0.\underbrace{9\ldots9}_{12}$. Zaradi

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

velja

$$\sqrt{1 - 10^{-12}} = 1 - \frac{1}{2}10^{-12} - \frac{1}{8}10^{-24} + \cdots = 0.\underbrace{9\ldots9}_{12}4\underbrace{9\ldots9}_{11}87\ldots,$$

in število se zaokroži na $0.\underbrace{9\ldots9}_{12}$. Tako s korenjenjem nikoli ne pridemo do 1, ko pa kvadriramo, je število vedno manjše, dokler ne pride do podkoračitve in dobimo 0.

Prvo predstavljivo število, ki je večje od 1 je $1 + 10^{-11}$. Tu dobimo

$$\sqrt{1 + 10^{-11}} = 1 + \frac{1}{2}10^{-11} - \frac{1}{8}10^{-22} + \cdots = 1.\underbrace{0\ldots0}_{11}4\underbrace{9\ldots9}_{10}87\ldots,$$

kar se zaokroži na 1. Tako s korenjenjem pridemo do 1, s kvadriranjem pa se to ne spremeni.

Prepišite naslednji matematični tekst.

Iščemo koeficiente polinoma $p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, ki na $[0, 1]$ aproksimira zvezno funkcijo f tako, da je napaka $E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$ minimalna.

Torej mora veljati $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ za $i = 1, \ldots, n$, kjer je

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 2 \int_0^1 (p(x) - f(x)) x^{i-1} dx.$$

Od tod dobimo

$$\int_0^1 f(x) x^{i-1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} x^{i-1} \right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{i+j-1}.$$

Dobimo sistem s Hilbertovo matriko H_n, kjer je $h_{ij} = x_j^{i-1}$. Hilbertove matrike so primeri zelo občutljivih matrik, saj velja npr. $\kappa(H_4) = 1.6 \cdot 10^4$, $\kappa(H_7) = 4.8 \cdot 10^8$ in $\kappa(H_{10}) = 1.6 \cdot 10^{13}$.

S pomočjo okolja `array` v tekst vstavite naslednjo tabelo.

$$\begin{array}{ll}
\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha & \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha & \cos 3\alpha = 3\cos^3\alpha - 4\cos\alpha \\
\sin 4\alpha = 8 \cos^3\alpha \sin\alpha - 4\cos\alpha \sin\alpha & \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1
\end{array}$$

Sestavite (rešiti ga ni potrebno ...) naslednji kolokvij.

NUMERIČNE METODE

1. Matrika A dimenzije $m \times n$ ima obliko $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, kjer je A_1 nesingularna matrika dimenzije $n \times n$ in A_2 matrika dimenzije $(m-n) \times n$. Pokaži, da velja

$$\|A^+\|_2 \leq \|A_1^{-1}\|_2.$$

2. S Householderjevimi zrcaljenji in QR razcepom reši linearni sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -7 \\
2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 6.
\end{array}$$

Zapiši vmesne rezultate!

3. Za matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiramo kroge

$$K_i = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\ \}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Prvi Gerschgorinov izrek pravi, da lastne vrednosti matrike A ležijo v uniji krogov K_i, iz drugega Gerschgorinovega izreka pa sledi, da v izoliranem krogu K_i leži natanko ena lastna vrednost.

(a) Dokaži prvi Gerschgorinov izrek. Nasvet: Po komponentah izenači $Ax = \lambda x$ in pravilno preoblikuj izraz.

(b) Dana je matrika $A = \begin{pmatrix} 0.44331 & 2\cdot 10^{-5} & -10^{-5} \\ 2\cdot 10^{-5} & 0.76543 & 3\cdot 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3\cdot 10^{-5} & 0.45169 \end{pmatrix}$.
S pomočjo Gerschgorinovih izrekov dobi čim boljšo oceno za napako približka 0.76543 za lastno vrednost. Nasvet: Pomagaj si z matriko DAD^{-1}, kjer je $D = \mathrm{diag}(1, d, 1)$.

4. (a) Ena izmed meritev

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y	0.30154	0.41390	0.52481	0.63490	0.74360	0.85113	0.95751

dovolj gladke funkcije v ekvidistantnih točkah je napačna. Odkrij, katera meritev je napačna in jo popravi.

(b) Izračunaj vrednost interpolacijskega polinoma v točki $x = 0.23$.

Prepišite naslednji matematični tekst:

Definicija 1 *Problem* $\mathbf{W}$ *oblike*

$$W_i(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j V_{ij} - V_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ (n \geq 2), \tag{1}$$

kjer je $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*,* V_{ij} *pa so linearni operatorji na Hilbertovem prostoru* G_i*, imenujemo šibko povezan* n*-parametrični problem lastnih vrednosti.*

Pri večparametričnem problemu (1) iščemo take n-terice $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, kjer so vsi operatorji $W_i(\boldsymbol{\lambda})$ singularni.

Definicija 2 *Če pri večparametričnem problemu (1) za* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *obstajajo taki vektorji* $x_i \in G_i$*,* $x_i \neq 0$*,* $i = 1, \ldots, n$*, da je*

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

potem je $\boldsymbol{\lambda}$ *lastna vrednost večparametričnega problema* $\mathbf{W}$*.*

Na tenzorskem produktu $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n$ lahko definiramo operatorsko determinanto

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} V_{11}^\dagger & V_{12}^\dagger & \cdots & V_{1n}^\dagger \\ V_{21}^\dagger & V_{22}^\dagger & \cdots & V_{2n}^\dagger \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{n1}^\dagger & V_{n2}^\dagger & \cdots & V_{nn}^\dagger \end{vmatrix},$$

kjer je $V_{ij}^\dagger$ linearna preslikava na H, inducirana z V_{ij} in definirana z

$$V_{ij}^\dagger(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \cdots \otimes x_n$$

in linearnostjo.

Zapišite naslednji verižni ulomek.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}}$$

Prepišite naslednji matematični tekst.

V primeru ekvidistantnih točk raje uporabljamo končne diference. Le te so definirane rekurzivno:

$$\Delta^m y_k = \begin{cases} y_k, & m = 0 \\ \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, & m > 0 \end{cases}$$

Iz podanih vrednosti y_i sestavimo diferenčno tabelo:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Zapišite naslednjo tabelo.

Rešitve kvadratne neenačbe $ax^2 + bx + x \geq 0$			
	$D = b^2 - 4ac$		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$	vsa premica	premica brez korena	unija poltrakov z robovi v korenih
$a < 0$	prazna množica množica	prazna množica	interval med korenoma