2.5 Končne diference

Če so vse točke *ekvidistantne*, kar pomeni $x_i = x_0 + ih$, kjer je h razmik med sosednjima točkama, lahko formule še poenostavimo. Naj bodo $y_i = f(x_i)$ vrednosti.

Definicija 1. *Končne diference so definirane rekurzivno kot*

$$\Delta^m y_k = \begin{cases} y_k, & m = 0 \\ \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, & m > 0 \end{cases}.$$

Iz vrednosti y_i sestavimo *diferenčno tabelo*:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Za prve tri diference dobimo:

$$\begin{aligned}
\Delta\, y_0 &= y_1 - y_0, \\
\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0, \\
\Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.
\end{aligned}$$

Obratno velja:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \Delta y_0 = (I + \Delta) y_0 \\
y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = (I + \Delta) y_1 = (I + \Delta)^2 y_0
\end{aligned}$$

Lema 1. *Veljata formuli:*

a)

$$\Delta^m y_0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y_{m-k},$$

b)

$$y_m = (I + \Delta)^m y_0 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k y_0.$$

Lema 2. *Če je p polinom stopnje n z vodilnim koeficientom a_0, potem velja*

$$\Delta^n p(x) = n! h^n a_0$$

in

$$\Delta^m p(x) = 0 \quad \text{za } m > n.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\Delta p(x) &= (a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \cdots + a_n) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \\ &= n h a_0 x^{n-1} + \cdots .\end{aligned}$$

Pri vsaki diferenci se stopnja zmanjša za ena, vodilni koeficient pa pomnoži s stopnjo n in s h. ∎

Prema Newtonova interpolacijska formula

Ideja je, da za $x = x_0 + sh$ zapišemo

$$I_n(x_0 + sh) = (I + \Delta)^s y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \Delta^k y_0.$$

Ker interpoliramo s polinomom, odpadejo vsi členi vsote, kjer je $k > n$.

Lema 3. (prema Newtonova interpolacijska formula)

$$I_n(x_0 + sh) = (I + \Delta)^s y_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0$$

je interpolacijski polinom stopnje kvečjemu n za točke $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$, in vrednosti $y_0, \ldots, y_n$.

Dokaz. Očitno je I_n stopnje kvečjemu n in velja $I_n(x_i) = y_i$ za $i = 0, \ldots, n$. ∎

Zgled uporabe končnih diferenc

Sestavi diferenčno tabelo za podatke do tretje diference in izračunaj $I_3(0.02)$.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.00	0.11	0.28	0.57	1.04

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
0.0	0.00			
		0.11		
0.1	0.11		0.06	
		0.17		0.06
0.2	0.28		0.12	
		0.29		0.06
0.3	0.57		0.18	
		047		
0.4	1.04			

$$h = 0.1, \quad s = \frac{x - x_0}{h} = 0.2$$

$$\begin{aligned} I_3(0.02) &= 0.00 + 0.2 \cdot 0.11 + \frac{0.2 \cdot (-0.8)}{2} 0.06 + \frac{0.2 \cdot (-0.8) \cdot (-1.8)}{6} 0.06 \\ &= 0.02008. \end{aligned}$$

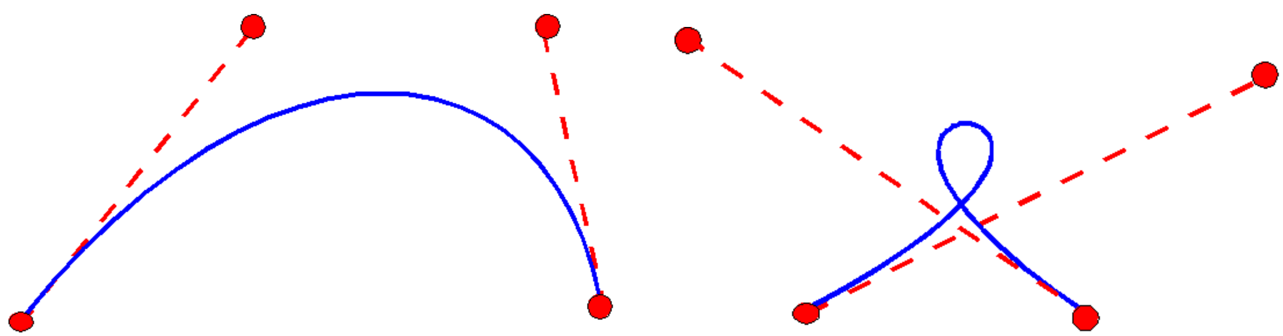
2.6 Beziérove krivulje

Pri interpolaciji krivulj v ravnini so pomembno orodje Beziérove krivulje. Vsaka Beziérova krivulja je določena s kontrolnimi točkami $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Formula za točke na krivulji je

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} p_k,$$

kjer je $t \in [0, 1]$. Najpogosteje se uporabljajo kubične Beziérove krivulje.



Nekaj lastnosti Beziérovih krivulj:

- $P(0) = p_0$ in $P(1) = p_n$,
- krivulja leži znotraj konveksne ogrinjače $p_0, \ldots, p_n$,
- Naklon pri $t = 0$ je enak naklonu premice skozi p_0 in p_1, podobno se naklon pri $t = 0$ ujema z naklonom premice skozi p_{n-1} in p_n.

Namesto Beziérovih krivulj na veliko točkah sestavljamo kubične Beziérove krivulje v zlepek. Pogoj za geometrijsko zveznost odvoda je, da zadnje dve točki prve krivulje in prvi dve točki druge krivulje ležijo na isti premici.

Nekaj pojmov:

- geometrijska zveznost: krivulji se dotikata (zadnja točka prve krivulje je začetna točka druge),
- geometrijska zveznost odvodov G1: tangenti prve druge krivulje imata v skupni točki enako smer,
- parametrična zveznost odvodov C1: prva odvoda prve in druge krivulje v skupni točki se ujemata.