

Obnašanje vezij pri vzburjanju s harmonskimi signali

Delovanje vezij v časovnem prostoru popisuje prenosna funkcija $T(p)$. Ta v obliki operatorskega zapisa podaja diferencialno enačbo, ki popisuje odvisnost izhodnega signala od vhodnega. Ker imamo opravka z linearnimi vezji, se računanje lahko poenostavi v primeru, da je oblika vhodnega signala znana in hkrati taka, ki je vezje ne more spremeniti.

Z linearnimi operacijami lahko harmonski funkciji spremenimo le velikost in fazo. Signalu sinusne oblike lahko spremenimo velikost z ojačevanjem, lahko ga zakasimo in zmanjšamo z integriranjem

$$\int \cos \omega t \, dt = \frac{\sin \omega t}{\omega} + konst. = \frac{\cos (\omega - 90^\circ)}{\omega}$$

Linearna elektronska vezja torej ne morejo spremeniti oblike harmonskega signala, lahko pa temu signalu spremenijo velikost ali fazo. Zato bi utegnili tudi računanje izhodnih signalov linearnih vezij za harmonske vhodne signale enostavnejše.

Poskusimo najprej zapisati prenosno funkcijo izbranega vezja za harmonske signale, za zgled naj služi diferenciator:

$$T(p) = -RC p$$

Vhodni signal zapišemo: $x(t) = A \cos \omega t$, zato je izhodni signal $y(t) = A RC \omega \sin \omega t$. Zdaj lahko zapišemo prenosno funkcijo T_{har} za harmonske signale:

$$T_{har} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-A RC \omega \sin \omega t}{A \cos \omega t}$$

Izraz ni uporaben, saj v njem nastopa čas, lastnosti linearnega vezja in s tem tudi prenosna funkcija pa so od časa neodvisne. Za povrh v prenosni funkciji nastopajo kotne funkcije, ki niso linearne. S tako definirano prenosno funkcijo ne moremo biti zadovoljni, zato poskusimo drugače.

Za linearna vezja velja načelo superpozicije. Če vezje vzburjamo z dvema signaloma hkrati, je odziv vezja enak vsoti odzivov na posamezno vzburjanje. Pretvarjajmo se, da vzburjamo vezje s pravim signalom $x_R(t) = A \cos \omega t$ in dodatnim izmišljenim signalom $x_I(t) = i A \sin \omega t$, pri tem je i znak za imaginarno vrednost, ki zaznamuje izmišljeni signal. Oba signala hkrati zapišemo:

$$x(t) = x_R(t) + x_I(t) = A(\cos \omega t + i \sin \omega t) = A e^{i\omega t}$$

Ko tako kombinacijo signalov vodimo skozi diferenciator, dobimo izhodni signal:

$$y(t) = -A RC \frac{d}{dx} e^{i\omega t} = -i\omega A RC e^{i\omega t}$$

Zato lahko sestavimo izraz za prenosno funkcijo:

$$T(i\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-i\omega A RC e^{i\omega t}}{A e^{i\omega t}} = -i\omega RC$$

Tokrat v izrazu za prenosno funkcijo ni časa, funkcija pa je linearna. V njej nastopa frekvenca ω , funkcija pa je kompleksna, zato se je kot argument prenosne funkcije pojavil izraz $(i\omega)$. Tako definirano funkcijo imenujemo frekvenčna prenosna funkcija in spet podaja razmerje med izhodnim in vhodnim signalom. V prenosno funkcijo smo skrili informacijo o tem, kako je amplituda izhodnega signala odvisna od frekvence vzbujačnega signala ter kakšen je fazni razmik med izhodnim in vhodnim signalom; dve vrednosti se da skriti v eno prenosno funkcijo, saj je le ta kompleksnega značaja. Poglejmo, kako lahko

iz kompleksne prenosne funkcije $T(i\omega)$ izluščimo podatka o velikosti in fazi izhodnega signala v primerjavi z vhodnim signalom. Pri tem se spet zanašamo na načelo superpozicije. V realnem svetu na vhod vezja priključimo realni signal in ta povzroči realni del odziva. Zato pri izračunu upoštevamo le realni del odziva, imaginarni del pa zanemarimo, saj je posledica izmišljenega vzbujanja. Kompleksno prenosno funkcijo $T(i\omega)$ zapišemo kot absolutno vrednost in zasuk faze signalov.

$$T(i\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow y(t) = T(i\omega) \cdot x(t) = |T(i\omega)| e^{i\varphi} \cdot x(t)$$

↓

$$x(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

↓

$$y(t) = |T(i\omega)| e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |T(i\omega)| e^{i(\omega t + \varphi)} = |T(i\omega)| (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi))$$

Realni del namišljenega vzbujanja $x(t)$ torej povzroči realni del odziva

$$\text{Re}[x(t)] = \cos \omega t \quad \text{povzroči} \quad \text{Re}[y(t)] = |T(i\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Vidimo, da se je amplituda odziva spremenila za absolutno vrednost frekvenčne prenosne funkcije, signal pa je fazno premaknjen za kot φ , ki ga določimo po običajni metodi:

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[T(i\omega)]}{\text{Re}[T(i\omega)]} \right]$$

Frekvenčno prenosno funkcijo lahko računamo za vsako vezje posebej, lahko pa se zanašamo na do sedaj povedano o običajnih prenosnih funkcijah $T(p)$. Za primer zapišimo prenosno funkcijo za vezje drugega reda:

$$T(p) = \frac{Dp^2 + Ep + F}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Ko to prenosno funkcijo razpišemo v diferencialno enačbo, dobimo:

$$A \ddot{y} + B \dot{y} + c y = D \ddot{x} + E \dot{x} + F x$$

Ker vezje vzbujamo s kompleksnim harmonskim signalom $x = e^{i\omega t}$ in odziv vezja izračunamo kot $y = T(i\omega) \cdot x$, lahko člene v zgornji enačbi nadomestimo:

$$\begin{aligned} x &= e^{i\omega t} \quad , \quad \dot{x} = (i\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x} = (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} \\ y &= T(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad \dot{y} = (i\omega) \cdot T(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{y} = (i\omega)^2 \cdot T(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Po kratkem računu dobimo splošni izraz za frekvenčno prenosno funkcijo vezja drugega reda:

$$T(i\omega) = \frac{D \cdot (i\omega)^2 + E \cdot (i\omega) + F}{A \cdot (i\omega)^2 + B \cdot (i\omega) + C} = \frac{y}{x}$$

Po obliki sta prenosna funkcija in frekvenčna prenosna funkcija enaki, le operator p je zamenjan z $i\omega$. Zato lahko iz prenosne funkcije poljubnega vezja vedno izpišemo frekvenčno prenosno funkcijo tako, da:

$$T(i\omega) = T(p)|_{p \rightarrow i\omega}$$

Frekvenčna prenosna funkcija $T(i\omega)$ je v splošnem torej kvocient dveh polinomov parametra $(i\omega)$, glej prejšnjo stran spodaj. Obema polinomoma lahko poiščemo ničle ter ju zapišemo v razcepljeni obliki. Za primer zapišimo frekvenčno prenosno funkcijo drugega reda v razcepljeni obliki:

$$T(i\omega) = konst \cdot \frac{(i\omega - \omega_{n0}) \cdot (i\omega - \omega_{n1})}{(i\omega - \omega_{p0}) \cdot (i\omega - \omega_{p1})}$$

Pri tem so nekateri koeficienti v polinomu lahko enaki nič. Ničle polinomov bi lahko nastopale tudi v konjugirano kompleksnih parih, a o takih vezjih v tem zapisu ne bomo govorili. Za stabilna vezja (o stabilnosti bomo še govorili) so ničle imenovalca negativne. Po predelavi zgornjega izraza in upoštevanju vsega pravkar navedenega imajo členi v števcu (imenujmo jih $T_n(i\omega)$) lahko sledeče oblike:

$$konstanta \quad \text{ali} \quad i \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{ali} \quad 1 + i \frac{\omega}{\omega_0}$$

Členi v imenovalcu (imenujmo jih $T_p(i\omega)$) pa dajo:

$$\frac{1}{i \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{ali} \quad \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Za zgornjo frekvenčno prenosno funkcijo zato pišemo:

$$T(i\omega) = konstanta \cdot T_{n0}(i\omega) \cdot T_{n1}(i\omega) \cdot T_{p0}(i\omega) \cdot T_{p1}(i\omega)$$

Splošno zapisano frekvenčno prenosno funkcijo s poljubnim številom ničel in polov lahko zato tretiramo kot produkt niza delnih frekvenčnih prenosnih funkcij $T_n(i\omega)$ in $T_p(i\omega)$, vsaka od delnih funkcij ima obliko enega od petih možnih členov zgoraj.

$$T(i\omega) = \prod_k T_{nk}(i\omega) \cdot \prod_j T_{pj}(i\omega) = \prod_k |T_{nk}(i\omega)| e^{i\varphi_{nk}} \cdot \prod_j |T_{pj}(i\omega)| e^{i\varphi_{pj}}$$

To je tako, kot da bi več električnih vezij vezali zaporedno, vsako od vezij pa opravlja eno od prej zapisanih delnih frekvenčnih prenosnih funkcij $T_{nk}(i\omega)$ ali $T_{pk}(i\omega)$. Ojačenje za frekvenčno prenosno funkcijo, ki je sestavljena iz večjega števila zgoraj zapisanih členov, je enako produktu ojačenj vseh členov, fazni zasuk pa je enak vsoti faznih zasukov posameznih členov.

$$|T(i\omega)| = \prod_k |T_{nk}(i\omega)| \cdot \prod_j |T_{pj}(i\omega)|$$

$$\varphi = \sum_k \varphi_{nk} + \sum_j \varphi_{pj}$$

Če želimo analizirati ojačenje in fazni zasuk vezja s komplicirano frekvenčno prenosno funkcijo, moramo torej to funkcijo zapisati v razcepljeni obliki ter zmnožiti ojačenja posameznih členov in sešteti njihove fazne zasuke. To nam daje močno orodje za analizo vezij v frekvenčnem prostoru. Poznati bo treba le obnašanje osnovnih členov, pot do lastnosti skupka členov je potem enostavna.

Analizirajmo posamezne člene; narisali bomo po dva diagrama za vsak člen, zgornjega za potek ojačenja (amplitudna karakteristika) in spodnjega za potek faze (fazna karakteristika), oboje v odvisnosti od frekvence. V diagramih je horizontalna skala podana kot razmerje ω/ω_n , vertikalna pa je za ojačenje kar enaka ojačevalnemu faktorju, za fazo pa je podana v stopinjah. Ker opazujemo potek obeh karakteristik v velikem frekvenčnem obsegu, nanašamo na abscisno os frekvenco v

logaritemskem merilu. Ker pričakujemo velike spremembe ojačenja v odvisnosti od frekvence, uporabimo logaritemsko skalo tudi za ordinatno os pri amplitudni karakteristiki.

Pri podajanju ojačenja pogosto posegamo po logaritemskem merilu, temu je prilagojeno izražanje ojačenja G v decibelih:

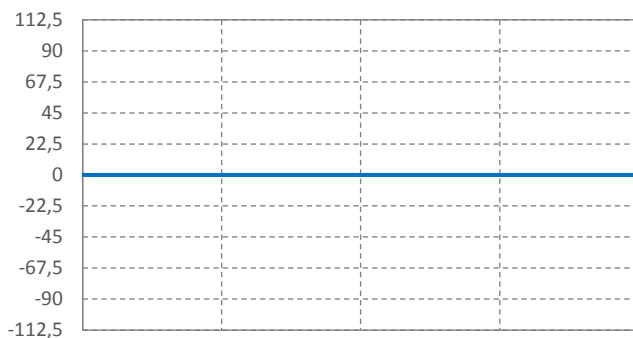
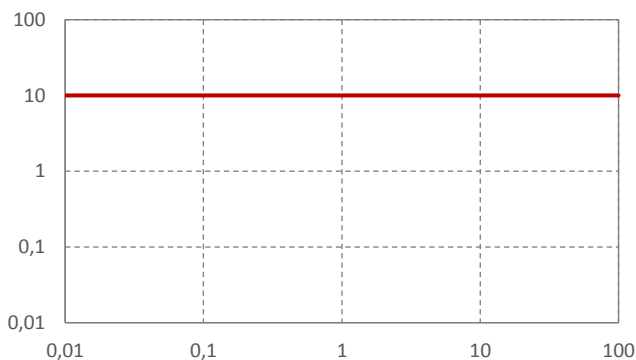
$$G = 20 \cdot \log \frac{y}{x} \quad [dB]$$

Ojačenje 0 dB pomeni ojačenje 1, ojačenje +20 dB je ekvivalent ojačenju za 10 krat, ojačenje -40 dB pa ekvivalent ojačevalnemu faktorju 0,01.

a) Konstanta

konst. \Leftrightarrow konst.

Vzemimo, da je ojačenje člena enako 10, slika desno. Člen ima tako ojačenje za vse frekvence, faza med izhodnim in vhodnim signalom pa je nič stopinj.



b) Diferenciator:

$$T_n(i\omega) = i \frac{\omega}{\omega_n} = i\omega\tau_n$$

\Downarrow

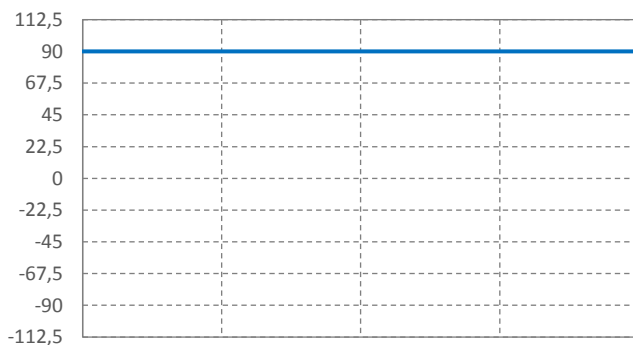
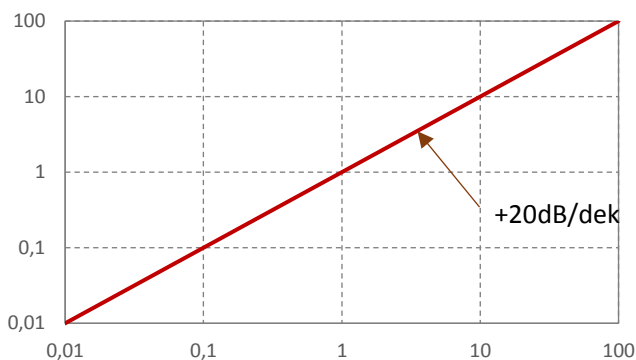
$$T_n(p) = \tau_n p$$

$\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow$

$$|T_n(i\omega)| = \omega\tau_n$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\omega\tau_n}{0} \right] = +90^\circ$$

Velikost izhodnega signala je odvisna od frekvence in se podeseteri za desetkratnik frekvence. Pravimo, da amplituda narašča za 20dB na dekado. Člen ima ojačenje 1 pri frekvenci, ki je enaka $1/\tau_n$. Izhodni signal prehiteva vhodnega za 90 stopinj pri vseh frekvencah.



c) Integrator:

$$T_n(i\omega) = \frac{1}{i \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{1}{i\omega\tau_n}$$

$$\Downarrow$$

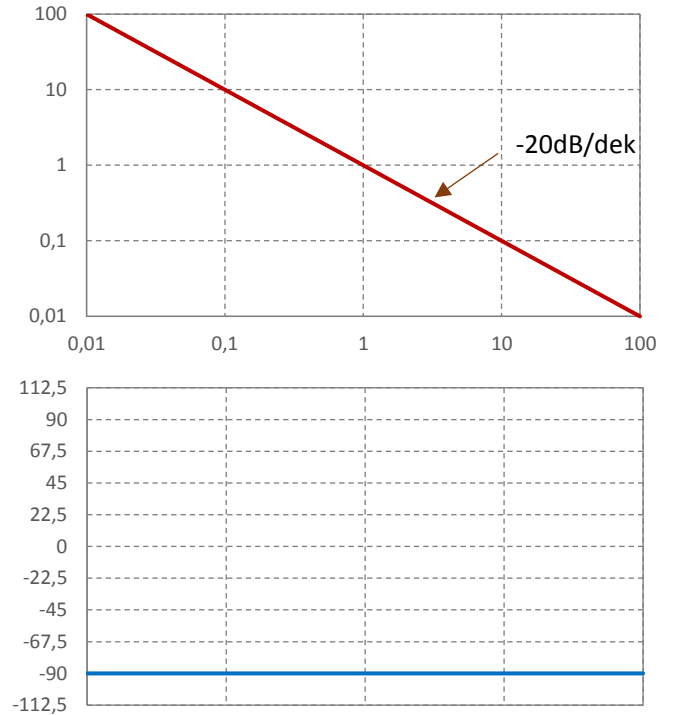
$$T_n(p) = \frac{1}{\tau_n p}$$

$$\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow$$

$$|T_n(i\omega)| = \frac{1}{\omega\tau_n}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{-1/\omega\tau_n}{0} \right] = -90^\circ$$

Velikost izhodnega signala je odvisna od frekvence in pade na desetino ko se frekvenca vhodnega signala poveča za desetkrat. Pravimo, da amplituda izhodnega signala narašča za 20 dB na dekada. Člen ima ojačenje ena spet pri frekvenci, ki je enaka $1/\tau_n$. Fazni kot med izhodnim in vhodnim signalom tokrat znaša -90 stopinj, torej izhodni signal zaostaja za vhodnim.



d) Približni diferenciator:

$$T_n(i\omega) = 1 + i \frac{\omega}{\omega_n} = 1 + i\omega\tau_n$$

$$\Downarrow$$

$$T_n(p) = 1 + \tau_n p$$

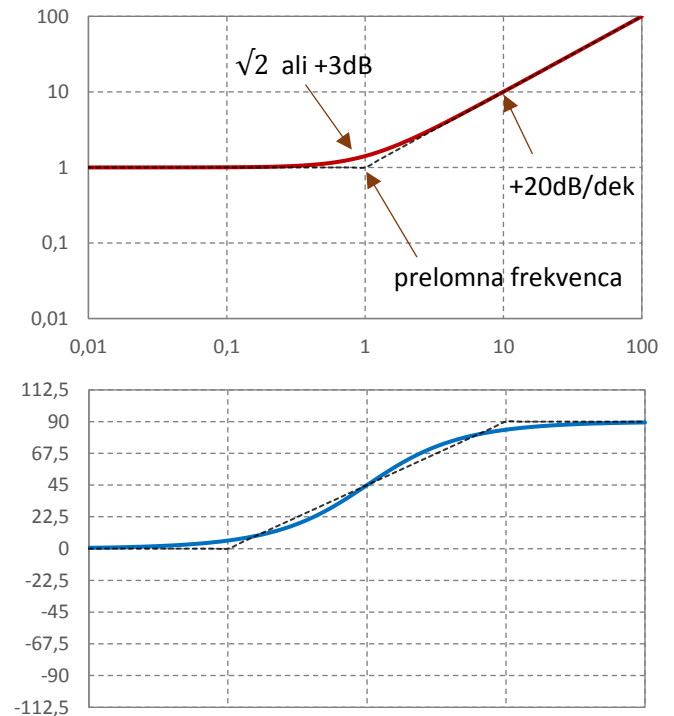
$$\Downarrow\Downarrow\Downarrow\Downarrow$$

$$|T_n(i\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau_n^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\omega\tau_n}{1} \right]$$

Potek obeh funkcij določimo s tabeliranjem:

ω/ω_n	$ T_n(i\omega) $	φ
0,01	$1,00005 \cong 0 \text{ dB}$	$0,57^\circ \approx 0^\circ$
0,1	$1,005 \cong 0 \text{ dB}$	$5,71^\circ \approx 0^\circ$
1	$\sqrt{2} \cong +3 \text{ dB}$	45°
10	$10,05 \cong +20 \text{ dB}$	$84,28^\circ \approx 90^\circ$
100	$100,005 \cong +40 \text{ dB}$	$89,43^\circ \approx 90^\circ$



Ojačenje približnega diferenciatorja je za majhne frekvence blizu ena, pri frekvenci $\omega = 1/\tau_n$ se poveča na 1,41, od te frekvence pa narašča tako, da se amplituda izhodnega signala podeseteri, če se frekvenca vhodnega signala poveča za desetkrat. Opisan potek aproksimiramo z dvema premicama, ki sta v amplitudni karakteristiki narisani črtkano. Stičišče premic je pri prej omenjeni frekvenci, ki jo imenujemo prelomna frekvenca.

Fazni kot med izhodnim in vhodnim signalom sledi funkciji \tan^{-1} in je blizu nič do frekvence $\omega_l = 1/10 \cdot \tau_n$, nato pa opazneje narašča do frekvence $\omega_h = 10/\tau_n$, kjer se ustali na skoraj $+90^\circ$. Pri prelomni frekvenci znaša fazni kot 45° , tam se z naraščanjem frekvence najhitreje spreminja. Opisan potek faze aproksimiramo s tremi premicami, ki so v diagramu narisane s črtkano črto. Pravimo, da se faza začne spreminjati eno dekada pred prelomno frekvenco in doseže končno vrednost eno dekada za prelomno frekvenco.

e) Približni integrator:

$$T_n(i\omega) = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{1}{1 + i\omega\tau_n}$$

⇕

$$T_n(p) = \frac{1}{1 + \tau_n p}$$

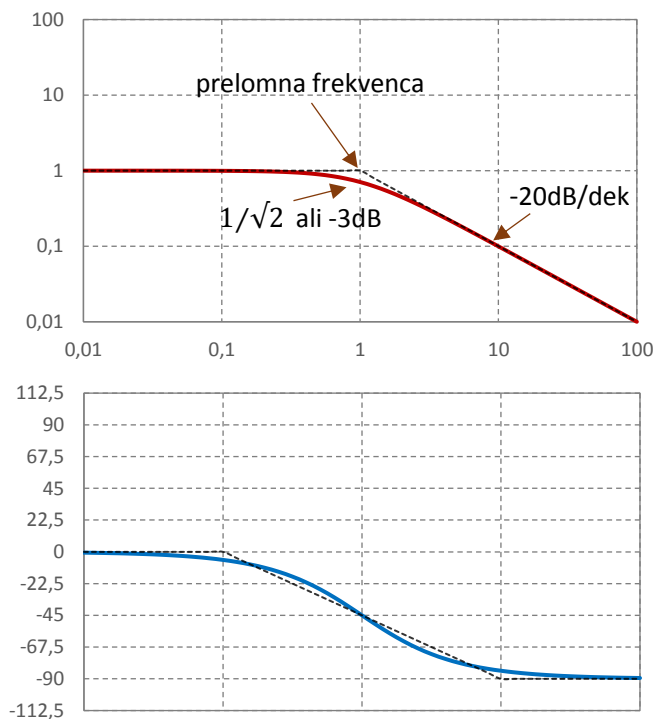
↓↓↓↓↓

$$|T_n(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_n^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{-\omega\tau_n}{1} \right]$$

Potek spet določimo s tabeliranjem:

ω/ω_n	$ T_n(i\omega) $	φ
0,01	$0,99995 \cong 0 \text{ dB}$	$-0,57^\circ \approx 0^\circ$
0,1	$0,995 \cong 0 \text{ dB}$	$-5,71^\circ \approx 0^\circ$
1	$1/\sqrt{2} \cong -3 \text{ dB}$	-45°
10	$0,0995 \cong -20 \text{ dB}$	$-84,28^\circ \approx -90^\circ$
100	$0,00999 \cong -40 \text{ dB}$	$-89,43^\circ \approx -90^\circ$



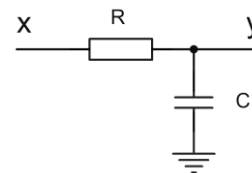
Potek tek dveh karakteristik je recipročen poteku karakteristik za približni diferenciator. Prelomna frekvenca je spet pri $\omega = 1/\tau_n$, faza se začne občutneje spreminjati pri desetini te frekvence in doseže -90° pri desetkratniku prelomne frekvence.

Nekaj vezij in njihove lastnosti v frekvenčnem prostoru

aa) RC vezje

Vezju pripišemo prenosno funkcijo $T(p) = \frac{1}{1+RC p}$ in zato frekvenčno prenosno funkcijo:

$$T(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$



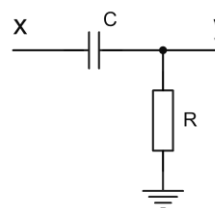
Ta je enake oblike kot prenosna funkcija člena iz oddelka e), taki sta zato tudi frekvenčna in fazna karakteristika vezja. Prelomna frekvenca je pri $\omega_0 = 1/RC$, pri manjših frekvencah je amplituda izhodnega signala iz RC člena skoraj enaka amplitudi vhodnega signala. Natančna analiza pokaže, da je pri prelomni frekvenci amplituda izhodnega signala 0,707 amplitude vhodnega signala, oziroma za 3 dB manjša od vhodnega signala. RC člen torej posreduje na izhod harmonske signale manjših frekvenc neokrnjene, signale s frekvencami nad prelomno frekvenco pa oslABLJENE. Slabljenje se nad prelomno frekvenco enakomerno povečuje.

Signali, katerih frekvenca je kvečjemu ena desetina prelomne frekvence, se pojavijo na izhodu RC člena skoraj poravnani z vhodnim signalom, pri naraščanju frekvence pa se izhodni signal bolj in bolj zaostaja za vhodnim. Pri prelomni frekvenci doseže fazni kot -45° , zaostanek pa se še povečuje do desetkratnika prelomne frekvence, ko doseže blizu -90° . Pri nadaljnjem povečevanju frekvence se zaostanek za skoraj -90° ohranja.

bb) CR vezje

Vezju pripišemo prenosno funkcijo $T(p) = \frac{RC p}{1+RC p}$ in od tod:

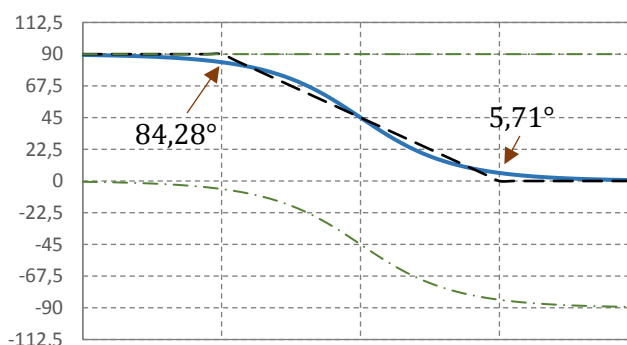
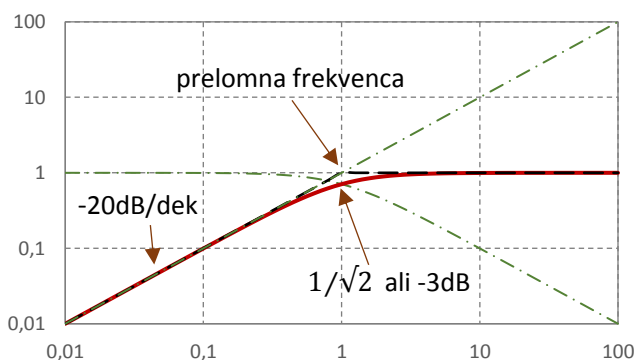
$$T(i\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot i\omega RC$$



Torej sta zaporedno vezana člena, ki sta opisana v odstavkih b) diferenciator in e) približni integrator. Oba člena imata enako značilno (prelomno) frekvenco $\omega_0 = 1/\tau = 1/RC$. Amplitudno karakteristiko zaporedno vezanih členov dobimo z množenjem amplitudnih karakteristik posameznega člena (ali seštevanjem krivulj v diagramu z logaritemskim merilom na ordinatni osi), fazno pa s seštevanjem faznih zasukov posameznega člena.

Na diagramih desno sta amplitudni in fazni karakteristiki obeh členov vrisani s »črta-pika-črta« linijama, z debelima polnima črtama pa sta vrisani končna amplitudna in fazna karakteristika. S črno črtkano črto je vrisana segmentna poenostavitev obeh karakteristik.

CR člen prepušča harmonske signale s frekvencami nad prelomno frekvenco tako, da je



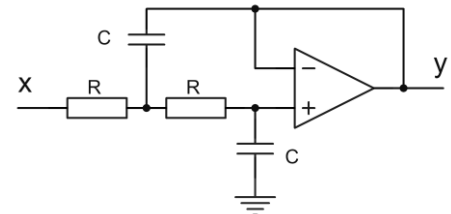
izhodna amplituda le malo manjša od vhodne, signale z manjšimi frekvencami za duši. Nižje ko so frekvence, večje je dušenje. CR vezje enosmernih signalov ne prepušča.

Za signale, ki jih CR vezje dobro prepušča, je fazni kot med izhodnim in vhodnim signalom majhen. Izhodni signal prehiteva vhodni signal za 45° pri prelomni frekvenci, pri manjših frekvencah pa še bolj. Pri zelo majhnih frekvencah je fazni kot enak 90°.

cc) Filter 2. reda z operacijskim ojačevalnikom

Vezju pripišemo prenosno funkcijo $T(p) = \frac{1}{(1+RC p)^2}$ in od tod:

$$T(i\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega RC)^2} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot \frac{1}{1 + i\omega RC}$$



Torej imamo opraviti z dvema zaporedno vezanima členoma iz odstavka e) približni integrator. Oba člena imata enako prelomno frekvenco $\omega_0 = 1/\tau = 1/RC$. Do amplitudne in fazne karakteristike pridemo enako, kot smo to naredili za CR vezje: v diagrama vrišemo karakteristiki členov in ju zmnožimo oziroma seštejemo da dobimo končni rezultat.

Z vezavo dveh enakih členov se dušenje za frekvence nad prelomno močno poveča, zdaj velikost izhodnega signala pade na eno stotino ko se frekvenca podeseteri. Žal je prehod od ojačenja 1 do bistvenega slabljenja precej medel, pri prelomni frekvenci znaša slabljenje tokrat 1/2. Faza se, po pričakovanju spreminja za dvakratnih spreminjanja člena iz odstavka e).

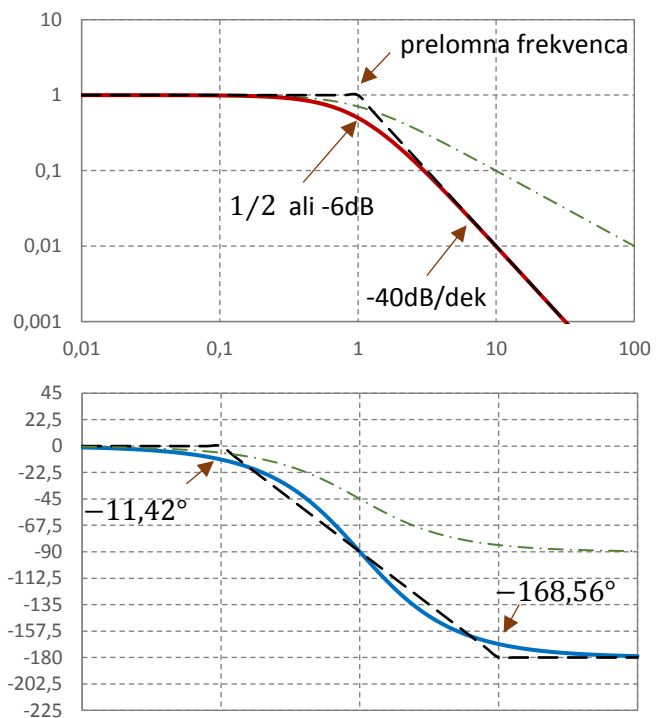
Vezje je filter, ki prepušča harmonske signale majhnih frekvenc – nizkoprepustni filter.

Če v vezju s slike zamenjamo mesta kondenzatorjev in upornikov, dobimo vezje s prenosno funkcijo $T(p) = \frac{(RC p)^2}{(1+RC p)^2}$ in od tod:

$$T(i\omega) = \frac{(i\omega RC)^2}{(1 + i\omega RC)^2} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \cdot \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

To pa je enako, kot da bi zaporedno vezali dve vezji iz odstavka bb). Dobimo amplitudno karakteristiko, ki je zrcalna podoba amplitudne karakteristike zgoraj in fazno karakteristiko, ki je za 180° višje od zgoraj narisane fazne karakteristike (vsak od členov v imenovalcu suka fazo za +90°).

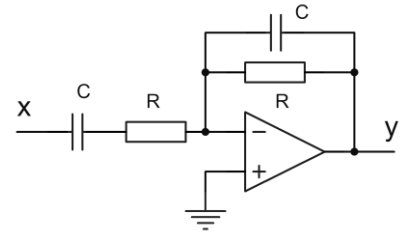
Vezje je filter, ki prepušča harmonske signale velikih frekvenc – visokoprepustni filter.



dd) Pasovnoprepustni filter

Vezju pripišemo prenosno funkcijo $T(p) = \frac{RC p}{(1+RC p)^2}$ in od tod:

$$T(i\omega) = \frac{i\omega RC}{(1 + i\omega RC)^2} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot i\omega RC$$



Tokrat je torej treba sestaviti karakteristike treh členov (b in dvakrat e), gre pa tudi enostavneje. Sestavimo lahko v tem poglavju narisane karakteristike vezij, na primer aa) in bb), kar je narisano na sliki desno, ali na podoben način člen b) diferenciator in vezje cc). Vse tri značilne frekvence v zgornji formuli so enake.

