Odzivi sistemov s prenosno funkcijo drugega ali višjih redov

Zapišimo splošno prenosno funkcijo za sistem drugega reda:

$$T(p) = \frac{Dp^2 + Ep * f}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{y}{x}$$

Kar lahko prepišemo v diferencialno enačbo drugega reda:

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = D\ddot{x} + E\dot{x} + Fx$$

Odziv vezja je vsekakor posledica vzbujanja, a v tem poglavju nas zanima obnašanje sistema potem, ko je vzbujanja konec. Določili bomo torej obnašanje sistema po zgornji diferencialni enačbi po trenutku, ko vzbujanje postane enako nič ter se s časom več ne spreminja. Zato je vsa desna stran zgornje enačbe enaka nič in opravka imamo z enačbo, ki jo matematiki imenujejo homogena diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti:

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = 0$$

Tako enačbo rešujemo tako, da na podlagi izkušenj (drugih oseb) poskusimo uganiti funkcijo, ki tako enačbo rešuje in predlog preskusimo v enačbi. Matematiki svetujejo, da poskusimo z eksponentno funkcijo, zato lahko pišemo:

$$y = c\,e^{\alpha t} \qquad \dot{y} = \alpha\, c\, e^{\alpha t} \qquad \ddot{y} = \alpha^2\, c\, e^{\alpha t}$$

Pri tem sta c in α konstanti, ki ju moramo še določiti. In izračunane izraze vstavimo v homogeno diferencialno enačbo:

$$ce^{\alpha t}[A\alpha^2 + B\alpha + C] = 0$$

Enačbi je zadoščeno, če je konstanta c enaka nič, kar nas ne zanima, saj je v tem primeru $y = 0$. Izraz na levi strani enačaja je nič le, če je vrednost v oklepaju nič, torej:

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

Zgornjo enačbo imenujemo karakteristična enačba, iz nje določimo sprejemljive vrednosti za konstanto α in ustrezno splošno rešitev homogene linearne diferencialne enačbe (pri tem bi bilo treba konstanti c_1 in c_2 še določiti, a nas pravzaprav ne zanimata, saj iščemo le <u>obliko</u> odziva):

$$\alpha_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$ karakteristično enačbo pa zapišemo z ničlama: $(\alpha - \alpha_1) \cdot (\alpha - \alpha_2) = 0$

Rešitev diferencialne enačbe se zato glasi: $y = c_1\, e^{\alpha_1 t} + c_2\, e^{\alpha_2 t}$

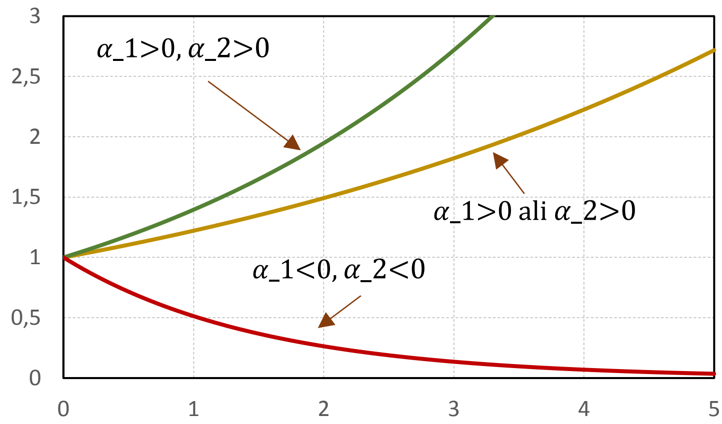
V odzivu torej nastopata dve eksponentni funkciji, ki se lahko obnašata na več različnih načinov glede na vrednost konstant $\alpha_{1,2}$. Preglejmo te možnosti drugo za drugo, začnimo z vrednostjo pod korenom.

a) $B^2 - 4AC > 0 \quad \Rightarrow$ konstanti $\alpha_{1,2}$ sta realni in sta lahko:

aa) $\alpha_1 < 0$ in $\alpha_2 < 0 \quad \Longrightarrow$ dobimo eksponentno usihajoč signal, saj sta vrednosti v eksponentih rešitve *y* negativni, torej odziv sčasoma izzveni

ab) $\alpha_1 > 0$ in $\alpha_2 < 0$ ali $\alpha_1 < 0$ in $\alpha_2 > 0 \quad \Longrightarrow$ eden od členov v rešitvi za *y* je eksponentno usihajoč, eden pa eksponentno naraščajoč, zato skupna vrednost rešitve *y* narašča proti neskončno tudi potem, ko sistem prenehamo vzbujati. Za tak sistem trdimo, da je nestabilen in ga ne moremo uporabljati.

ac) $\alpha_1 > 0$ in $\alpha_2 > 0$ $\Rightarrow$ oba člena v rešitvi sta eksponentno naraščajoča, zato gre skupna vrednost rešitve proti neskončno tudi potem, ko tak sistem prenehamo vzbujati. Za tak sistem trdimo, da je nestabilen in ga ne moremo uporabljati.



Slika 1: Poteki odzivov po prenehanju vzbujanja za sisteme z različnimi ničlami karakterističnega polinoma; abscisna os predstavlja normirani čas, ordinatna pa normirani odziv

V primeru, da je vrednost pod korenom večja od nič, se zato opredelimo do pripadajočih sistemov: uporabni so le tisti, za katere so ničle karakteristične enačbe manjše od nič.

b) $B^2 - 4AC = 0$ $\Rightarrow$ konstanti $\alpha_{1,2}$ sta enaki α, zato se izkaže, da predlagana rešitev *y* ni dobra. Matematiki predlagajo, da v tem primeru poskusimo s funkcijo:

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{\alpha t}$$

Spet je obliko te rešitve odvisna od predznaka konstante α. Če je α večja od nič, gre rešitev proti neskončno in sistem ni uporaben. Če je α negativna, odziv sistema sčasoma izzveni, take sisteme pa lahko uporabljamo.

c) $B^2 - 4AC < 0$ $\Rightarrow$ V tem primeru imamo opravka z negativno vrednostjo pod korenom, kar da kompleksni rešitvi za konstanti $\alpha_{1,2}$:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm i\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} = Re(\alpha_{1,2}) \pm i \cdot Im(\alpha_{1,2}) = \beta \pm i\omega$$

Zato se rešitev glasi:

$$y = c\, e^{Re(\alpha_{1,2})t} \cdot e^{\pm i \cdot Im(\alpha_{1,2})t} = c e^{\beta t} \cdot e^{\pm i\omega t}$$

Kar se prevede v splošno rešitev:

$$y = c\, e^{\beta t} \cdot \cos \omega t$$

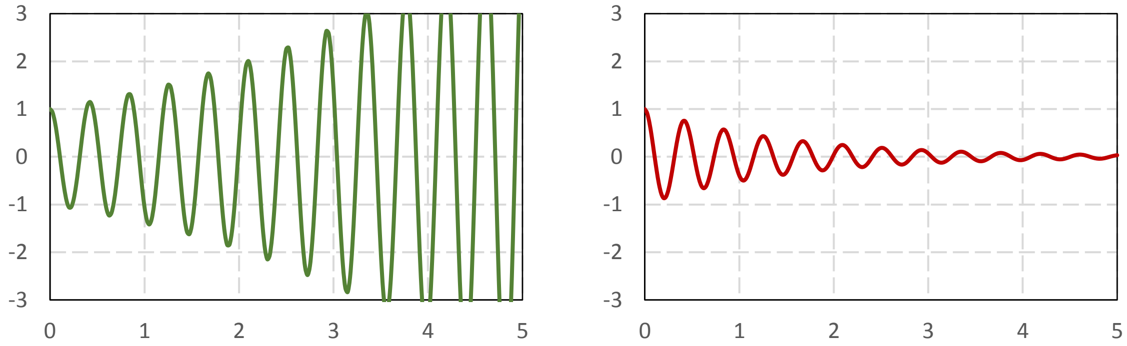
To pa predstavlja nihanje s frekvenco :

$$\omega = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

Obliko ovojnice tega nihanja določa vrednost faktorja dušenja β :

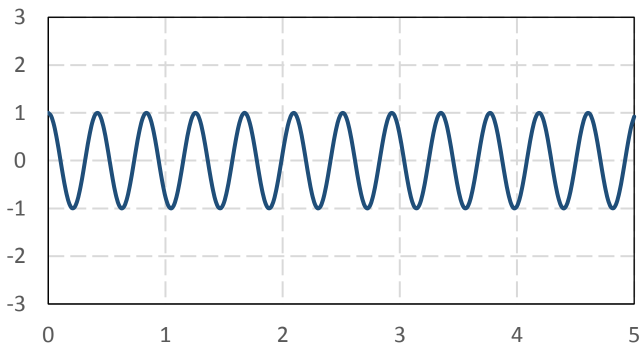
ca) Če je faktor dušenja $\beta < 0$, nihanje eksponentno usiha, taki sistemi so stabilni in uporabni.

cb) Če je faktor dušenja $\beta > 0$, se amplituda nihanja eksponentno povečuje proti neskončno in taki sistemi niso uporabni.



Slika 2: Eksponentno naraščajoč odziv za $\beta > 0$ (levo) in eksponentno upadajoč odziv za $\beta < 0$ (desno); abscisna os predstavlja normiran čas, ordinatna pa normiran odziv

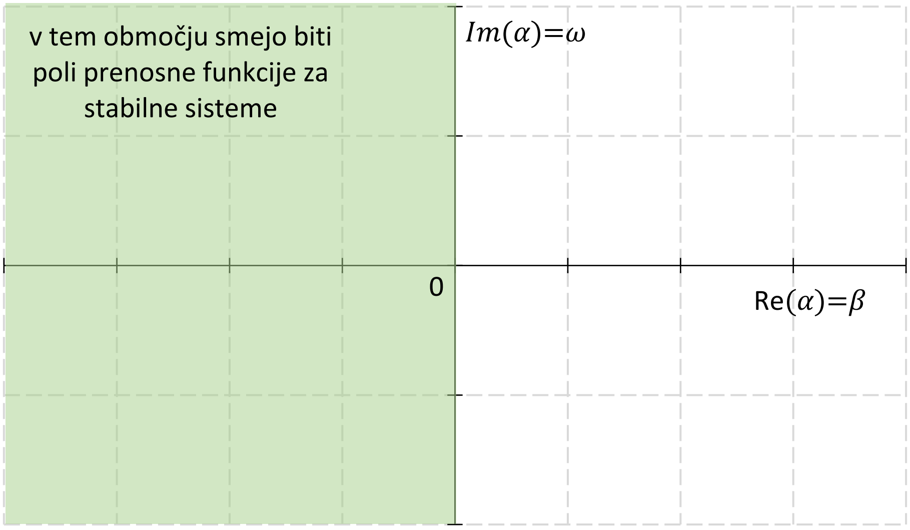
cc) V posebnem primeru, ko je faktor dušenja $\beta = 0$, ostaja amplituda nihanja konstantna in opraviti imamo s sistemom, ki niha s konstantno amplitudo in frekvenco.



Slika 3: V posebnem primeru (za $\beta = 0$) se lahko nihanje tudi ohranja; osi sta spet normirani

Iz povedanega sklepamo, da je oblika odziva sistema drugega reda po vzbujanju odvisna le od imenovalca prenosne funkcije oziroma položaja ničel karakteristične enačbe, ki jo dobimo z razpisovanjem v diferencialno enačbo in postavljanjem vzbujanja na nič; to so hkrati poli prenosne funkcije. Če so vsi poli realni in negativni, prenosna funkcija popisuje stabilen sistem, katerega odziv po vzbujanju sčasoma izzveni. Odziv sčasoma izzveni tudi v primeru, da so poli prenosne funkcije konjugirano kompleksni, če je le realni del vseh polov negativen. Razlika je le v tem, da tokrat odziv sistema niha proti končni vrednosti s frekvenco, ki jo določajo vrednosti koeficientov v imenovalcu prenosne funkcije.

Enako velja za sisteme višjih redov. Dobri (stabilni) sistemi so tisti, katerih poli prenosne funkcije ležijo na negativni strani realne osi v kompleksni ravnini, slika 4, označeno področje. Odziv sistema eksponentno usiha proti končni vrednosti takrat, ko so poli prenosne funkcije na negativnem delu abscisne osi. Sistem se izniha eksponentno usihajoče takrat, ko so poli konjugirano-kompleksni in ležijo v označenem delu. Kadar ležijo poli na imaginarni osi, imamo opravka s sistemom pod točko cc), odziv je tokrat harmonsko nihanje s stalno amplitudo in frekvenco.

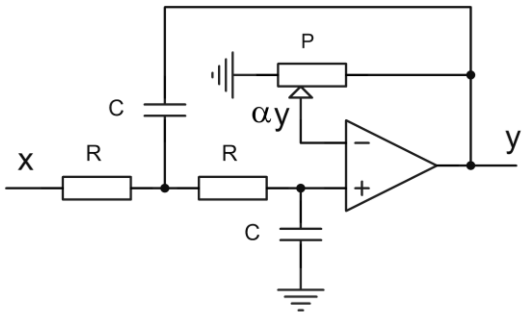


Slika 4: Del kompleksne ravnine za pole stabilne prenosne funkcije

<u>Zgled</u>: vezje drugega reda z operacijskim ojačevalnikom in enim nastavljivim parametrom

Shema vezja je na sliki 5. V vezju je nastavljivi potenciometer P, s katerim lahko nastavljamo napetost $u = \alpha y$ na invertiranem vhodu v operacijski ojačevalnik od vrednosti y (za $\alpha = 1$) do 0 (za $\alpha = 0$). Prenosna funkcija vezja je:

$$T(p) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\tau^2 p^2 + \frac{3\alpha - 1}{\alpha} \tau p + 1}$$



Slika 5: Shema vezja za zgled

Najprej ugotovimo, za katere nastavitve potenciometra je vezje stabilno.

$$\beta = -\frac{B}{2A} = -\frac{3\alpha - 1}{2\alpha\tau} < 0$$

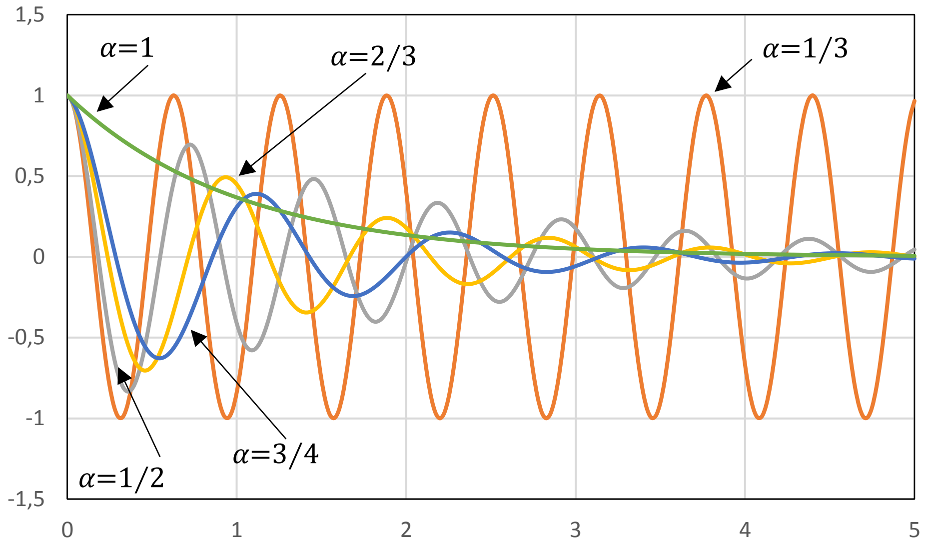
In od tod: $\alpha > {}^1/_3$

Če zasukamo potenciometer P na vrednost 1/3, vezje po prenehanju vzbujanja daje harmonski signal po sliki 3. Če potenciometer zasukamo k vrednostim, ki so manjše od 1/3, ima izhodni signal harmonsko obliko, amplituda nihanja pa se eksponentno povečuje in vezje ni uporabno, slika 2 levo. Če potenciometer zasukamo k vrednostim $\alpha > {}^1/_3$, je izhodni signal po vzbujanju kosinusne oblike, a amplituda nihanja eksponentno pojema s časom. Izračunajmo še frekvenco nihanja:

$$\omega = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} = \frac{\sqrt{4\tau^2 - \left(\frac{3\alpha - 1}{\alpha}\tau\right)^2}}{2\tau^2} = \frac{\sqrt{-5\alpha^2 + 6\alpha - 1}}{2\alpha\tau}$$

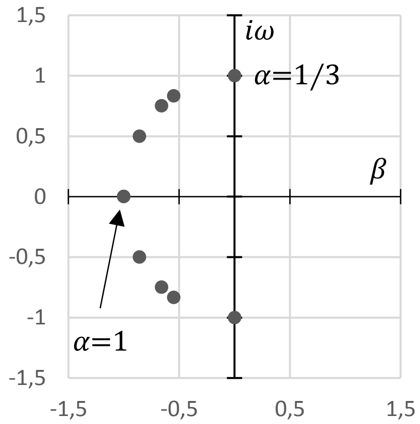
α	β	ω
${}^1/_3$	0	${}^1/_\tau$
${}^1/_2$	$-{}^1/_{2\tau}$	${}^{0,86}/_\tau$
${}^2/_3$	$-{}^3/_{4\tau}$	${}^{0,66}/_\tau$
${}^3/_4$	$-{}^5/_{6\tau}$	${}^{0,55}/_\tau$
1	$-{}^1/_\tau$	0

Tabelirani rezultati



Slika 6: Normirani odzivi vezja po vzbujanju za različne nastavitve potenciometra P, frekvenca nihanja ni narisana v merilu ($\tau = 1/10$)

Vezje ne niha, če zavrtimo potenciometer v položaj $\alpha = 1$, takrat je frekvenca nihanja enaka nič. Če bi lahko zasukali potenciometer k vrednostim $\alpha > 1$, bi dobili še bolj počasen eksponentno izzvenevajoč odziv brez nihanja. Na sliki 6 so podane značilne oblike izhodnega signala po vzbujanju za zgornje vezje v odvisnosti od nastavitve potenciometra P.



Slika 7: Položaj lege polov za različne nastavitve iz tabele zgoraj

Položaje polov prenosne funkcije lahko narišemo v kompleksno ravnino na sliki 7. Za $\alpha = 1$ je pol dvojen, ostali so konjugirano-kompleksni. Za $\alpha = 1/3$ sta pola na imaginarni osi, vezje oscilira.

<u>Zgled</u>: Generator harmonske napetosti

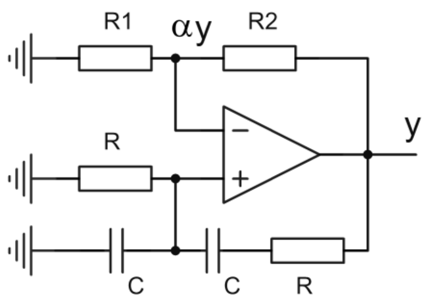
Povedano ponuja priložnost, da naredimo oscilator – vezje, ki daje harmonski signal znane frekvence in amplitude. Tako vezje nam bo prišlo prav na primer za vzbujanje senzorjev pri fizikalnih eksperimentih. Vezje Wienovega oscilatorja je na sliki 8. Vezje nima priključka za vhodni signal, le priključek za izhodnega.

Spet napišemo izraz za izhodni signal *y*, ki ga dobimo z reševanjem in kombiniranjem dveh enačb za vozlišči ob obeh vhodih v operacijski ojačevalnik ter upoštevanju lastnosti idealnega ojačevalnika.

$$y\left[\tau^2 p^2 + \left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)\tau p + 1\right] = 0$$

Kar prevedemo v homogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti:

$$\tau^2 \ddot{y} + \left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)\tau \dot{y} + y = 0 \qquad ; \qquad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



Slika 8: Wienov oscilator

Reševanja te enačbe se lotimo enako, kot smo to storili na začetku poglavja, pri tem so koeficienti:

$$A = \tau^2 \qquad B = \frac{3\alpha - 1}{\alpha}\,\tau \qquad C = 1$$

Vezje daje enakomeren harmonski signal takrat, ko je dušenje enako nič:

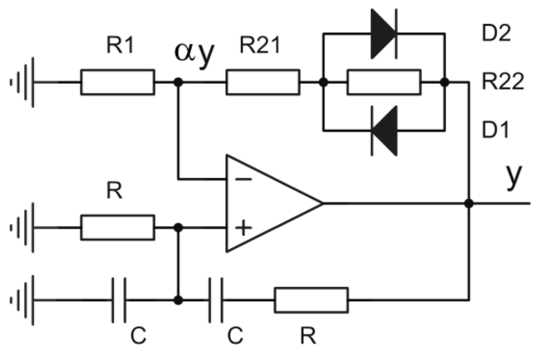
$$\beta = -\frac{B}{2A} = -\frac{(3\alpha - 1)\,\tau}{2\alpha\tau^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = 2R_1$$

Frekvenca nihanja pa takrat znaša:

$$\omega = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} = \frac{1}{\tau}$$

Za stalno amplitudo nihanja skrbi pravo razmerje upornikov R_1 in R_2. Ker vrednosti upornikov ne moremo dovolj natančno izbrati, amplituda izhodnega signala ne ostaja konstantna. Če je $R_2 > 2R_1$, je $\beta > 0$ in amplituda izhodnega signala narašča. Poskrbeti je treba za stabilizacijo, kar lahko naredimo, na primer, z žarnico. Vzemimo, da je amplituda nihanja premajhna: potem je treba narediti faktor dušenja pozitiven, to pa dosežemo tako, da zmanjšamo faktor α oziroma zmanjšamo vrednost upornika R_1. Če namesto upornika R_1 vstavimo v vezje žarnico, zaradi premajhne amplitude harmonske napetosti teče skoznjo premalo toka in žarilna nitka je hladna: hladna nitka ima manjšo upornost od vroče, zato se amplituda izhodne napetosti poveča do take, ki žarnico ravno prav segreje do temperature, kjer ima upornost žarnice vrednost $R_2/2$. Obratno velja, če je amplituda izhodne napetosti prevelika: nitka se bolj pogreje in dobi večjo upornost, faktor dušenja pa postane negativen in povzroči zmanjšanje amplitude. Lastnosti žarnice se spreminjajo le počasi in so odvisne tudi od temperature okolice, zato za stabilizacijo amplitude izhodne napetosti oscilatorja ni idealna.

Enak efekt dosežemo tudi z vezavo po sliki 9, ko v povratno vezavo vežemo dva upornika in dve diodi. Vsoto upornosti $R_{21} + R_{22}$ izberemo tako, da bi amplituda izhodne napetosti eksponentno naraščala, torej naj bo $R_{21} + R_{22} > 2R_1$, vrednost upornika R_{21} pa tako, da bi amplituda izhodnega signala eksponentno padala ($R_{21} < 2R_1$). Ko amplituda izhodne napetosti zaradi prevelike upornosti $R_{21} + R_{22}$ preseže željeno vrednost, nastane na uporniku R_{22} dovolj velik padec napetosti, da začneta prevajati diodi D_{21} in D_{22}, ki sta vezani vzporedno R_{22} : to efektivno zmanjša vrednost upornika $R_{21} + R_{22}$ na tako mero, da se velikost nihanja ohranja.



Slika 9: Wienov oscilator z diodama za stabilizacijo amplitude; $R_{21} \cong R_{22} \approx 1{,}5 \cdot R_1$