

Merjenje majhnih sprememb frekvence - Doppler

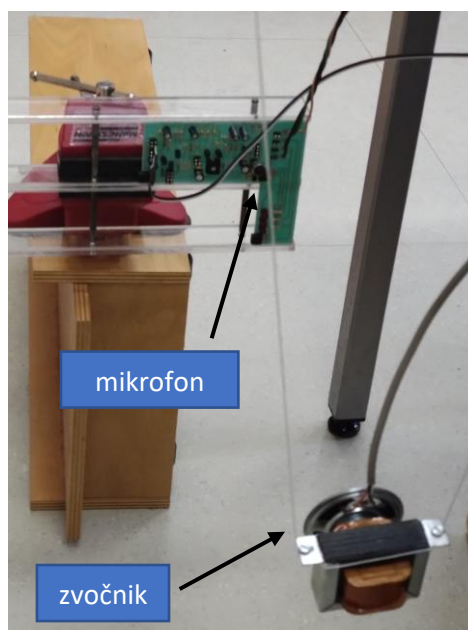
Pri merjenju hitrosti gibanja s pomočjo Dopplerjevega efekta se zahteva natančno merjenje frekvence signala, ki ga oddaja premikajoči oddajnik proti mirujočemu sprejemniku; možne so tudi druge postavitve oddajnika in sprejemnika. Informacija o hitrosti oddajnika je kodirana v razliki med oddajano (f_{oddana}) in sprejeto ($f_{sprejeta}$) frekvenco signala po formuli:

$$f_{sprejeta} = f_{oddana} \left(\frac{v_{razširjanja}}{v_{razširjanja} + v_{oddajnika}} \right)$$

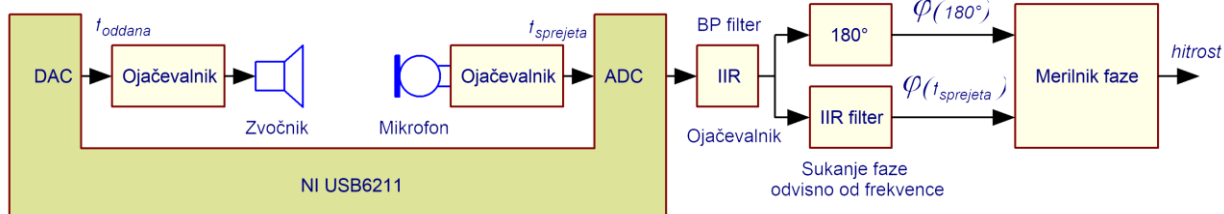
Hitrost oddajnika $v_{oddajnika}$ je pozitivna, če se oddajnik oddaljuje od sprejemnika in negativna, če se mu približuje. Če ilustriramo Dopplerjev pojav za zvočne frekvence ($v_{razširjanja} = 330 \text{ ms}^{-1}$) in privzamemo, da je frekvenca zvočila 1000 Hz, hitrost primikanja zvočila pa 1 ms^{-1} , je frekvenca sprejetega signala 1003 Hz. Za ovrednotenje tako majhnih hitrosti je torej treba precej natančno meriti frekvenco.

Pri našem eksperimentu želimo slediti hitrosti zvočila, ki je obešeno na vrvico in torej tvori nihalo, slika 1. Perioda nihanja znaša okoli 2 s, torej je treba določati frekvenco sprejetega zvočnega signala sproti; ni zadošča raba navadnega merilnika frekvence (»frekvenc-metra«), ki šteje prehode signala skozi nič izbran časovni interval, ki običajno znaša 1 s. S takim merilnikom ne bi sledili hitrosti gibanja nihala, saj bi dobili le povprečno hitrost gibanja dvakrat v nihaju.

Uporabimo trik: obstajajo enote, pri katerih je fazni kot izhodnega signala napram vhodnemu odvisen od frekvence. S tako enoto lahko sproti prevedemo frekvenco sprejetega zvočnega signala v fazo: faza bo, za primer, 0° za signal s frekvenco 1000 Hz, faza bo večja od nič (izhodni signal prehiteva vhodnega) za signale manjše od 1000 Hz in večja od nič (izhodni signal zaostaja za vhodnim) za signale s frekvenco nad 1000 Hz. Ko je sprememba frekvence opazovanega signala prevedena v spremembo faze, lahko uporabimo od prej znani merilnik fazne razlike med dvema signaloma (vhodnim in izhodnim signalom take enote), ta razlika skriva informacijo o frekvenci in torej hitrosti zvočila, slika 2. Na tak način lahko sproti sledimo spremembam frekvence signala in torej hitrosti gibanja zvočila.



Slika 1: Nihalo

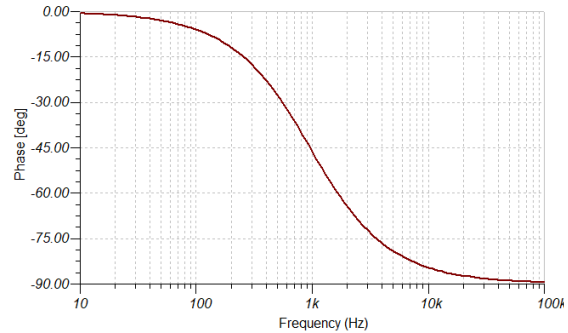


Slika 2: Bločna shema detekcije hitrosti po Dopplerju

V analogni elektroniki je takšna enota že RC člen, saj se za tak člen fazni kot med vhodno in izhodno napetostjo spreminja po funkciji:

$$\varphi = \text{atan}(-2\pi f \cdot RC)$$

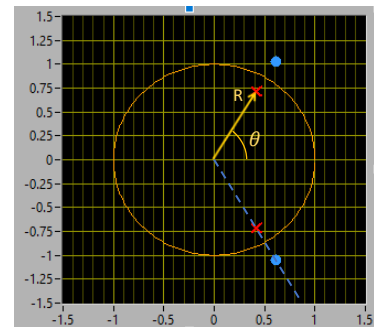
Izberimo upornost in kapacitivnost obeh elementov RC člena tako, da je časovna konstanta $\tau = RC = 1/2\pi f = 1/2\pi \cdot 1000$. Potem je fazni kot med vhodnim in izhodnim signalom tega RC člena enak 45° takrat, ko je frekvenca vhodnega signala 1000 Hz. Za večje frekvence je fazni kot večji, za manjše pa manjši. Ker je funkcija atan pri 45° precej linearna, je tudi sprememba faze za majhne spremembe frekvence okoli 1000 Hz precej linearna. Strmina krivulje v diagramu na sliki 3 je pri 45° največja, kar pomeni največjo spremembo faze zaradi spremembe frekvence. Žal je ta strmina še vedno majhna, saj znaša $\Delta\varphi \cong -\Delta f/f$, za naš primer torej 0.057° za spremembo frekvence 1 Hz pri 1000 Hz. Potrebovali bi enoto, kjer se faza občutneje spreminja s spreminjanjem frekvence zato, da bi bila občutljivost merilnega sistema večja.



Slika 3: Fazna karakteristika za RC člen

V računalniku lahko enoto za sukanje faze v odvisnosti od frekvence zgradimo kot IIR filter. Poglejmo lastnosti IIR filtra, ki ima dve ničli in dva pola razporejena tako, da sta pola oddaljena od izhodišča za razdaljo R , ničli pa za razdaljo $1/R$; pri tem mora biti R med 0 in 1, torej v notranjosti enotskega kroga v z -ravnini, slika 4. Pol in ničla paroma ležita na istih premicah, ki presekata izhodišče pod kotom $\pm\theta$. Ničli $z_{n1,2}$ in pola $z_{p1,2}$ torej zapišemo:

$$z_{n1,2} = \frac{1}{R} e^{\pm i\theta} \quad z_{p1,2} = R \cdot e^{\pm i\theta}$$



Slika 4: Ničli in pola za IIR filter, ki suka fazo; oznake veljajo za pol

Pri tem je kot θ odvisen od frekvence f_0 , pri kateri naj pride do sukanja faze: $\theta = \frac{f_0}{f_v/2}$, f_v pa je frekvenca vzorčenja. Diskretno prenosno funkcijo $H(z)$ zato zapišemo:

$$H(z) = \frac{(z - z_{n1}) \cdot (z - z_{n2})}{(z - z_{p1}) \cdot (z - z_{p2})} = \frac{1 - \frac{2}{R} \cos \theta \cdot z^{-1} + \frac{1}{R^2} z^{-2}}{1 - 2R \cos \theta \cdot z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

Iz diskretne prenosne funkcije izpišemo diferenčno enačbo:

$$y_k - 2R \cos \theta \cdot y_{k-1} + R^2 \cdot y_{k-2} = x_k - \frac{2}{R} \cos \theta \cdot x_{k-1} + \frac{1}{R^2} \cdot x_{k-2}$$

Uteži v zgornji enačbi oziroma koeficienti IIR filtra v notaciji, ki jo potrebuje Labview, so torej:

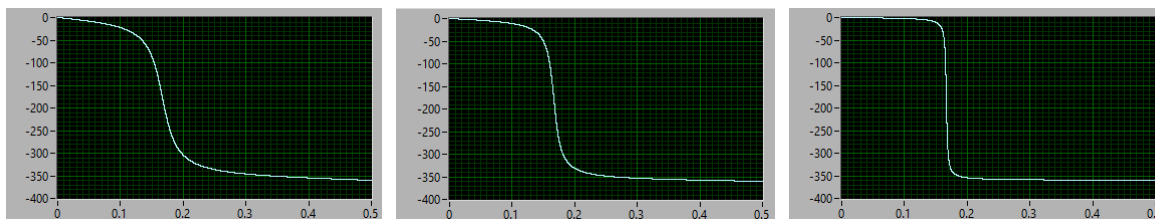
"reverse": $[1, -2R \cos \theta, R^2]$ in "forward": $\left[1, -\frac{2}{R} \cos \theta, \frac{1}{R^2}\right]$

Po običajnih matematičnih postopkih lahko izračunamo fazno karakteristiko takega IIR filtra:

$$H(i\omega) = H(z) \text{ če opravimo zamenjavo: } z = e^{i\omega T_v}$$

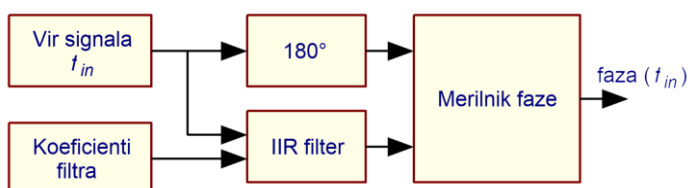
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\text{IM}[H(i\omega)]}{\text{RE}[H(i\omega)]}$$

Na sliki 5 so trije primeri fazne karakteristike za dani IIR filter s po dvema ničloma in poloma. Za levi IIR filter ($R=0.9$) je občutljivost $1^\circ/\text{Hz}$, za srednji IIR filter ($R=0.95$) je občutljivost $2.3^\circ/\text{Hz}$, za desni IIR filter ($R=0.99$) pa skoraj $12^\circ/\text{Hz}$; vse pri 1000 Hz in frekvenci vzorčenja 6000 Hz ($\theta = 60^\circ$). Vsi filtri sukajo fazo za 180° pri frekvenci 1 kHz.



Slika 5: Fazne karakteristike IIR filtra za $R = 0.9$, $R = 0.95$ in $R = 0.99$, vse za $\theta = 60^\circ$; horizontalna skala zajema Nyquistovo področje od 0 do polovice frekvence vzorčenja, vertikalna skala v stopinjah

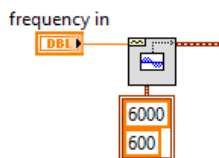
Sestavimo zdaj program za digitalno procesiranje signalov, ki omogoča spreminjanje frekvence signala v fazo. Potrebujemo bloke po shemi na sliki 6.



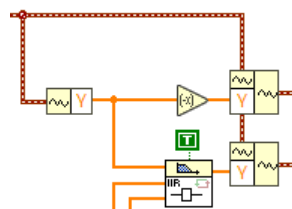
Slika 6: Bločna shema sistema, ki ponovi originalni signal z nasprotnim predznakom in z IIR filtrom generira fazno premaknjenega ter določi fazni kot med njima

Implementirajmo to bločno shemo v simulacijskem programu. Frekvenca vzorčenja naj bo 6000 Hz:

- Vir signala: uporabimo modul za generiranje sinusnega signala, s pomočjo drsnika mu nastavimo frekvenco. Ta modul, izveden v Labview, je na sliki 7.

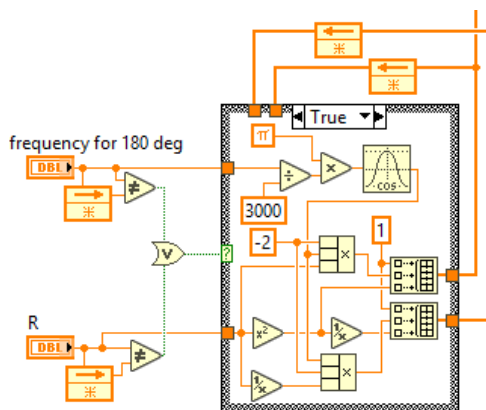


Slika 7: Generiranje sinusnega signala s frekvenco f_{in}



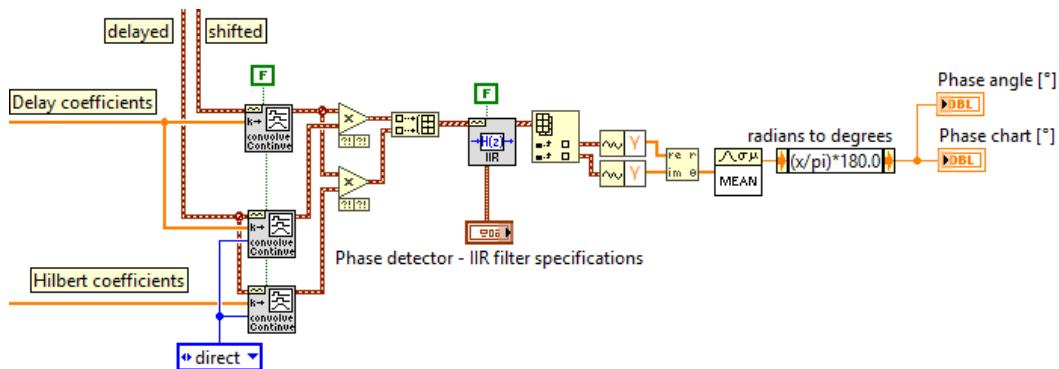
Slika 8: IIR filter in sukanje faze za 180°

- Sukanje faze v odvisnosti od frekvence signala: Za sukanje uporabimo modul IIR filtra, ki mu dovedemo pravilne koeficiente filterskega jedra, slika 8, spodnji rob. V IIR filtru se signalu spremeni faza za 180° pri frekvenci 1 kHz, zato naj se za isto mero pri vseh frekvencah spremeni faza tudi po zgornji veji; to dosežemo tako, da v zgornji veji množimo z -1. Ker oba kraka obdelave zahtevata polje vrednosti in ne »Waveform«, je treba pred obdelavo »Waveform« razstaviti in po obdelavi spet sestaviti.
- Koeficienti filtra: Izračunamo jih po prej navedenih formulah »reverse« in »forward«. Modul za računanje je na sliki 9; nove koeficiente računamo le, če se je katera od nastavitvev R ali »frequency for 180 deg« spremenila.



Slika 9: Računanje koeficientov IIR filtra

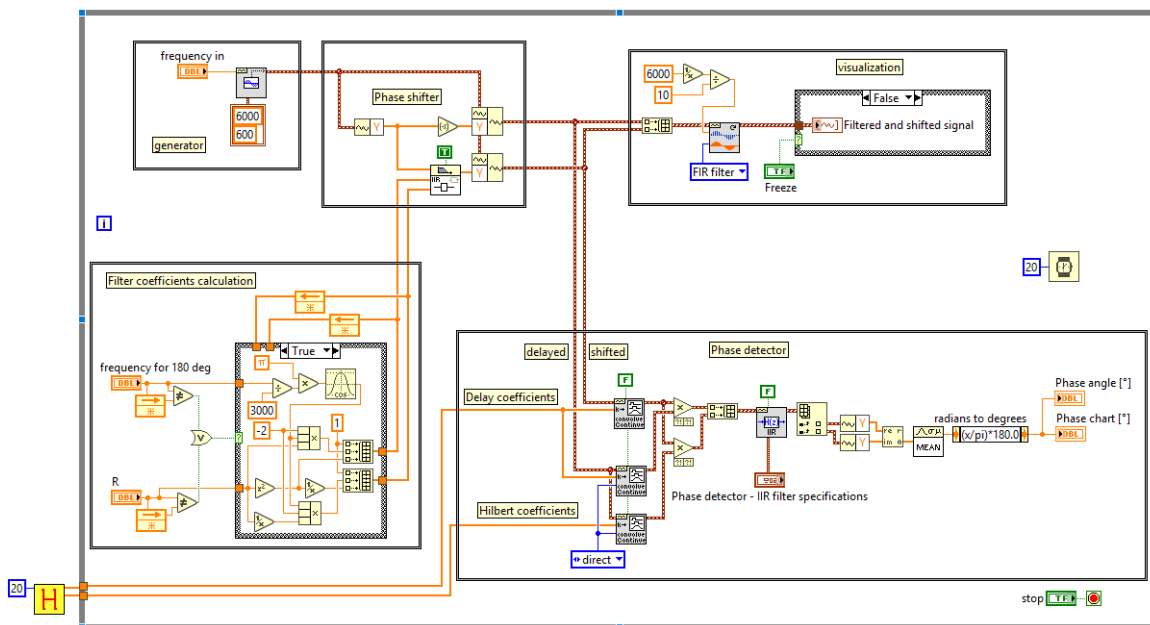
- Merjenje faznega kota sledi običajnemu postopku: potrebujemo referenčna, za 90° stopinj premaknjena signala, ki ju tvorimo v spodnjih dveh konvolucijskih blokih. Signala se v blokih zakasni za polovično dolžino konvolucijskega jedra, zato je treba enako kasniti tudi merjeni signal v zgornji veji z blokom za konvolucijo. Oba referenčna signala zmnožimo z merjenim signalom in opravimo filtriranje z nizkoprepustnim filtrom IIR. Dobljeni filtrirani komponenti tretiramo za realno in imaginarno komponento ter določimo kot med njima. Za konec rezultate še povprečimo za bolj stabilen odčitek, ki ga pokažemo uporabniku (enote so zdaj stopinje).



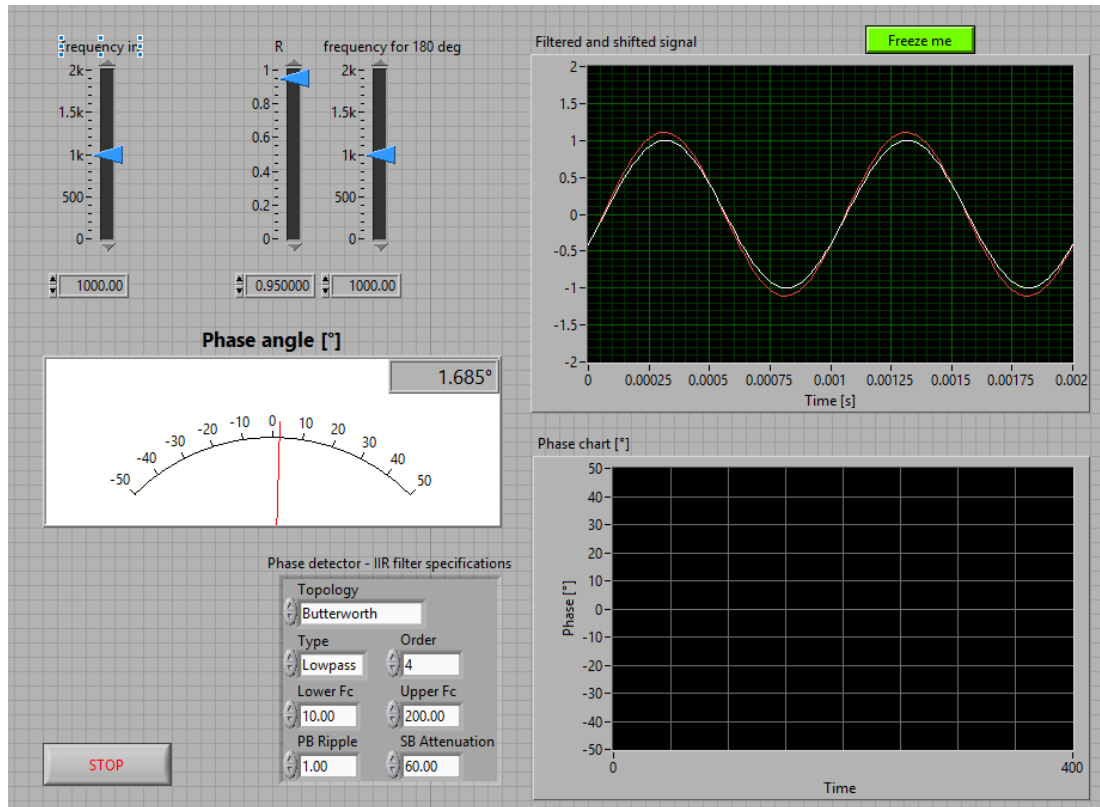
Slika 10: Fazni detektor; levo vstopajo koeficienti za Hilbertovo jedro in ustrezni kasilni koeficienti, zgoraj vstopata oba signala, med katerima merimo fazni kot

- Računanje koeficientov Hilbertovega transformata opravlja podprogram po ustaljeni metodi.
- Prikaz originalnega in zajetega signala: frekvenca vzorčenja je le šestkratnik frekvence opazovanega signala, zato imamo v eni periodi signala na voljo le šest vzorcev, kar je precej pemalo za lepo sliko harmonskih signalov. Zato pred prikazom v diagramu opravimo interpolacijo tako, da je v diagramu na razpolago desetkrat toliko vzorcev; en nihaj sinusnega signala torej pokažemo v 60 točkah, kar pa že zadošča za očesu prijazno sliko.

Zgoraj navedene kose programa sestavimo v simulacijski program je na sliki 11, na sliki 12 pa je predlog uporabniškega vmesnika tega programa.

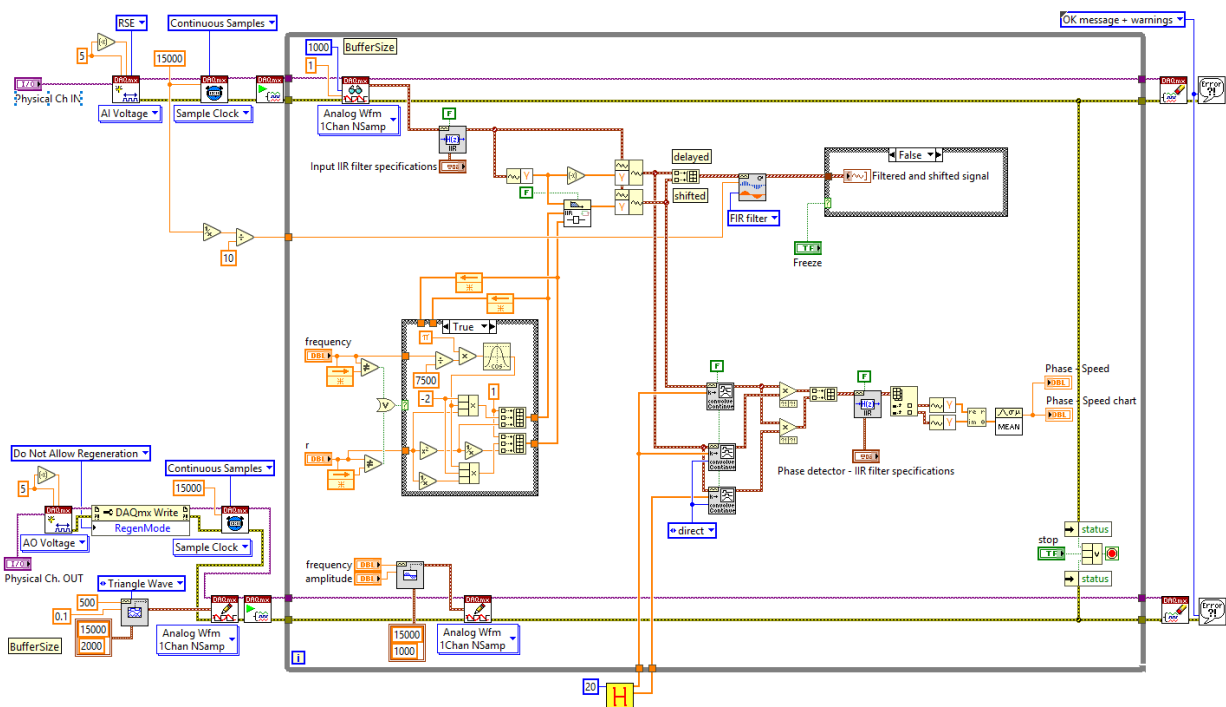


Slika 11: Simulacijski program



Slika 12: Predlog za uporabniški vmesnik

Isti algoritem uporabimo tudi v pravem merilnem programu za opazovanje gibanja zvočila po sliki 1. Tokrat signal z vira na sliki 7 zamenjamo z vzorčenim signalom, ki ga preskrbi NI vmesnik. Isti vmesnik lahko tudi generira signal za zvočnik preko analognih izhodov NI vmesnika. Zaradi lastnosti zvočnika je tokrat izbrana frekvenca okoli 3 kHz, kar zahteva povečanje frekvenca vzorčenja; frekvenca vzorčenja v tem primeru znaša 15 kHz. Program je na sliki 13.



Slika 13: Program za rabo z vmesnikom NI 6211