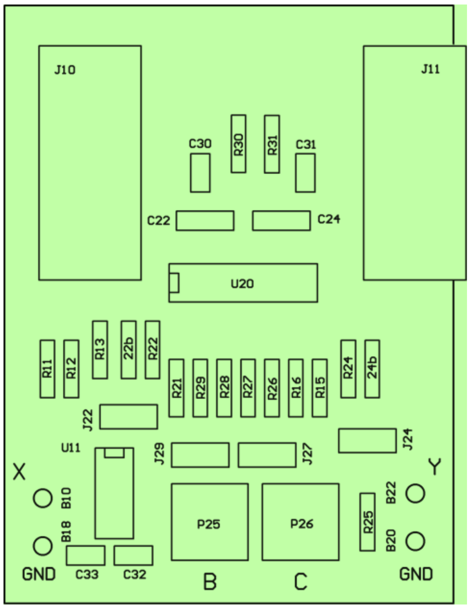
3.13 Vezje s prenosno funkcijo drugega reda – Amplitudna karakteristika

Teorija uči, da je amplitudna karakteristika vezja, ki ga popisuje diferencialna enačba prvega reda oziroma frekvenčna prenosna funkcija prvega reda monotono padajoča ali naraščajoča. Fazna karakteristika za tako vezje je oblike $\tan^{-1}$. Za zgled vezja s prenosno funkcijo prvega reda lahko služi RC člen.

Za vezja, ki jih popisuje frekvenčna prenosna funkcija drugega reda, na primer:

$$T(i\omega) = \frac{1}{A(i\omega\tau)^2 + iB\omega\tau + C} = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} \qquad \text{, pri tem je } i \text{ imaginarna enota}$$

pa je amplitudna karakteristika lahko tudi bolj živahna. Njena oblika je odvisna od velikosti parametrov *A*, *B* in *C*. V amplitudni karakteristiki lahko najdemo največ en ekstrem (eno izbočenje ali eno vbočenje amplitudne karakteristike). Fazna karakteristika take je običajno močneje zvita kot tista za frekvenčno prenosno funkcijo prvega reda. Za zgornjo frekvenčno prenosno funkcijo je ojačenje za konstantne signale 1, za velike frekvence pa pade na nič, torej imamo opravka z nizko-prepustnim filtrom. Vmes, v frekvenčnem področju med 0 in neskončno, pa amplitudna karakteristika ni nujno monotono padajoča.



Slika 1: Tloris tiskanega vezja za poskušanje

Premerimo amplitudno in fazno karakteristiko vezja s frekvenčno prenosno funkcijo drugega reda po zgornji formuli. Uporabili bomo kar vezje iz vaje 3.12 (tloris vezja je na sliki 1), saj sta tam parametra *B* in *C* nastavljiva s potenciometri, parameter *A* pa je fiksiran na 1. Tudi tokrat bomo za začetek zasukali potenciometer za parameter *C* v položaj 1, potenciometer za parameter *B* pa v položaj 5. Amplitudno karakteristiko lahko otipamo ročno pri nekaj diskretno izbranih frekvencah okoli prelomne frekvence vezja (1 Hz ali 1 kHz, odvisno od vstavljenih vrednosti komponent). Lahko pa jo tudi izrišemo na osciloskopov zaslon, le primeren funkcijski generator, ki zmore »sweep« funkcijo (avtomatsko spreminjanje frekvence) in osciloskop je treba izbrati, pa z nastavitvami se je treba poigrati. Za popolno avtomatizacijo meritve lahko izberemo tudi sposobnejši osciloskop, ki zna samostojno opraviti merjenje frekvenčne karakteristike.

Naloga:

a. Na vhod vezja priključi harmonski signal z amplitudo okoli 1 V in spremenljivo frekvenco. Območje spreminjanja frekvence izberi glede na pričakovano amplitudno karakteristiko vezja tako, da zajameš področje od vsaj ene dekade pod do vsaj ene dekade nad prelomno frekvenco tega vezja.

b. Če boš meritev izvajal ročno, izberi nekaj diskretnih vrednosti frekvenc pod in nekaj diskretnih vrednosti nad prelomno frekvenco v prej omenjenem območju in papir za risanje karakteristike.
c. Posnemi niz amplitudnih karakteristik za različne nastavitve parametra *B*; parameter *C* naj ostane ena za vse meritve. Kako se med sabo razlikujejo pridobljene amplitudne karakteristike? Katero bi izbral za najboljše možno filtriranje električnega signala? Koliko takrat znaša parameter *B*?
d. Posnemi fazno karakteristiko za parameter *B* = 0.63 za referenco. Kako se spremeni oblika fazne karakteristike pri spremenjenih parametrih *B* = 0.4 in *B* = 0.8?

Teorija

Frekvenčno prenosno funkcijo $T(i\omega)$ zapišemo iz običajne prenosne funkcije, v kateri operator *p* zamenjamo z $i\omega$. Frekvenčna prenosna funkcija drugega reda lahko izgleda tudi takole:

$$T(i\omega) = \frac{1}{A(i\omega\tau)^2 + iB\omega\tau + C}$$

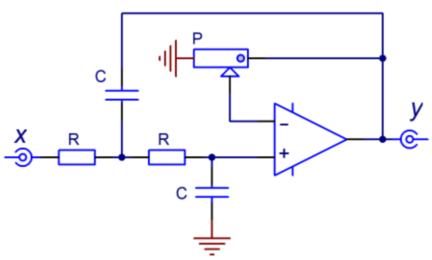
Zanima nas amplitudna karakteristika, torej ojačenje vezja v odvisnosti od frekvence vhodnega harmonskega signala. Ko izberemo *A* = *C* = 1, ojačenje *G* izračunamo kot absolutno vrednost frekvenčne prenosne funkcije za to vrednost parametrov:

$$G = |T(i\omega)| = \frac{1}{|(i\omega\tau)^2 + iB\omega\tau + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (B\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4\tau^4 + (B^2-2)\omega^2\tau^2 + 1}}$$

Ojačenje torej lahko s frekvenco samo pada za parameter $B \geq \sqrt{2} \approx 1.41$, saj v tem primeru vrednost izraza pod korenom s frekvenco narašča. Za manjše vrednosti parametra *B* pa se vrednost pod korenom v določenem območju frekvenc zmanjšuje, kar implicira povečanje ojačenja vezja v tem frekvenčnem področju. Z izbiro parametra $0 \leq B < \sqrt{2}$ torej naredimo izboklino v amplitudnem spektru. Izrazitost izbokline je odvisna od velikosti parametra *B*, vrh izbokline pa je blizu $\omega = 1/\tau$.

Dodatno za motivacijo

Predstavljeno vezje ima frekvenčno prenosno funkcijo drugega reda in ga imenujemo nizkoprepustni filter drugega reda. Seveda je mogoče vezje s tako frekvenčno prenosno funkcijo narediti na več različnih načinov, eden možnih in bistveno enostavnejših načinov je na sliki 2. Mi smo pri vaju uporabili že pripravljeno vezje samo zato, ker je pri njem mogoče s potenciometrom nastavljati vrednosti faktorjev *B* in *C*, sicer pa je vezje s slike 2 precej racionalnejše.



Slika 2: Bolj racionalna *shema za filter drugega reda*

Neželjeni signali, torej motnje, so v frekvenčnem prostoru žal po Murphy-ju vedno blizu tistega področja frekvenc, ki je za nas zanimivo. Zato za izločanje motenj navadno potrebujemo filter, ki zelo selektivno ločuje želeni del frekvenčnega spektra od neželjenega; pravimo, da mora imeti filter dobro selektivnost. Za filter drugega reda selektivnost ni posebno dobra, saj se pri desetkratniku prelomne frekvence ojačenje filtra zmanjša na eno stotino, dušenje pri desetkratniku prelomne frekvence torej znaša 40 dB. Če bi, na primer, naš željeni signal imel frekvenco 1 kHz in amplitudo 1 V, bi motilni signal, ki ima enako amplitudo in frekvenco 10 kHz na izhodu nizko-prepustnega filtra drugega reda s prelomno frekvenco 1 kHz bil motilni signal še vedno velik 10 mV. Malo bi se zmanjšal tudi koristni signal, njegova amplituda bi padla na polovico. Če bi bil motilni signal po frekvenci še bližje željenemu, bi ga filter zadušil še manj. Potrebujemo torej še bolj selektivne filtre.

Če vežemo dva taka filtra drugega reda zaporedno, bo dušenje motečega signala večje in njegova amplituda bo na izhodu drugega filtra znašala vsega 100 μV. Slišati je dobro, žal pa bo zaradi oblosti amplitudnih karakteristik uporabljenih filtrov močneje prizadet tudi koristni signal, njegova amplituda bo znašala vsega četrtino.

Pa poskusimo s trikom. Uporabimo take filtre, ki tik ob prelomni frekvenci malo bolj ojačijo, potem koristni signal ne bo tako zelo zmanjšan. Motilni signal, ki je po frekvenci precej stran od željenega, pa bo zadušen na prej omenjeno vrednost.

Trikov v tem smislu je precej. Večje število filtrov drugega reda se da zaporedno vezati na različne načine, vsakokrat pa je treba skrbno izbrati vrednosti dušenja in prelomne frekvence, tako lahko izdelamo filtre, ki imajo veliko selektivnost in so optimirani glede na želje uporabnika. Z optimizacijo so se ukvarjali na primer Bessel, Butterworth in Čebišev. Vsak od njih je predlagal svojo optimizacijsko shemo za zaporedno vezavo filtrskih blokov drugega reda in vsaka od shem ima svoje prednosti in slabosti. Za tale zapis je podrobnosti o filtriranju že dovolj, zato se tule ustavimo. O filtriranju se bomo podrobneje pogovarjali pri drugih predmetih.

Za radovedne

Za vezje s slike 2 zapišimo frekvenčno prenosno funkcijo. Tudi tu imamo na razpolago potenciometer P, s katerim lahko nastavljamo dušenje, torej obliko amplitudne karakteristike. Položaj drsnika potenciometra naj v formuli zaznamuje parameter α, ki ima vrednost 1 takrat, ko je drsnik v skrajno desnem položaju (ob piki v shemi) in 0 takrat, ko je drsnik v skrajno levem položaju (pri GND). Frekvenčna prenosna funkcija je podana z:

$$T(i\omega) = \frac{1}{(i\omega\tau)^2 + i\left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)\omega\tau + 1}$$

Podobno kot prej lahko tudi tokrat izračunamo ojačenje:

$$G = |T(i\omega)| = \frac{1}{\left|(i\omega\tau)^2 + i\left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)\omega\tau + 1\right|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4\tau^4 + \left(\left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\right)\omega^2\tau^2 + 1}}$$

Iz zgornje formule izračunamo parameter α tako, da ojačenje pada z naraščanjem frekvence:

$$\left(\left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{1}{3 - \sqrt{2}}$$

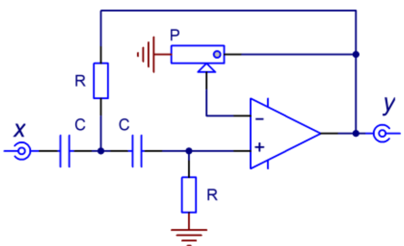
Zato je s potenciometrom v položaju 0.63 tokrat amplitudna karakteristika še monotono padajoča, za manjše vrednosti parametra α (drsnik potenciometra bliže GND) pa pride do bolj ali manj izrazitega vrha v amplitudni karakteristiki. Pozor: za $\alpha \leq 1/3$ vezje niha! Amplitudne karakteristike za različne nastavitve α so podane na sliki 3.

Včasih potrebujemo filter, ki prepušča le signale večjih frekvenc, imenujemo ga visoko-prepustni filter. Takrat uporabimo shemo s slike 4, pri kateri so le kondenzatorji in uporniki ob ne-invertiranem vhodu v operacijski ojačevalnik zamenjali mesta. Frekvenčna prenosna funkcija se tokrat glasi:

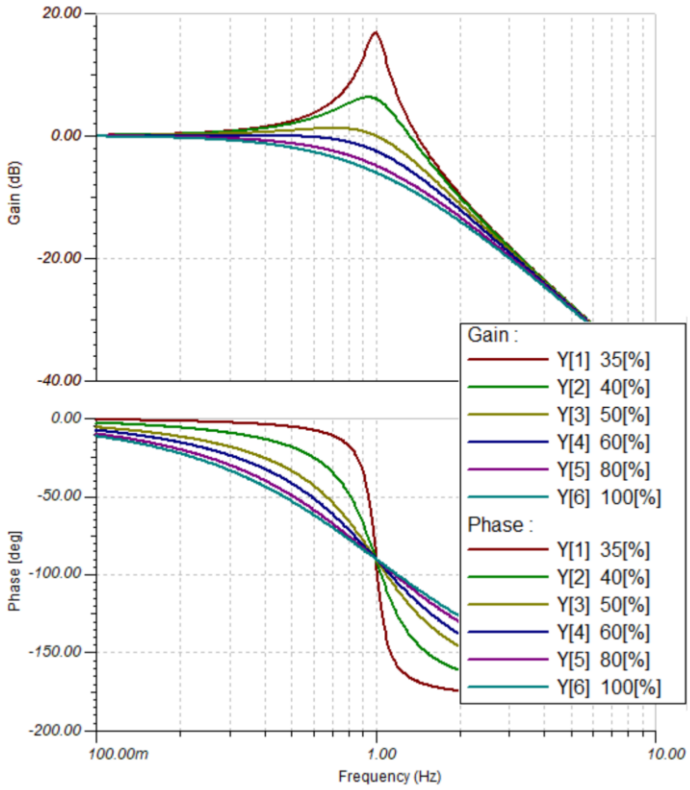
$$T(i\omega) = \frac{(i\omega\tau)^2}{(i\omega\tau)^2 + i\left(3 - \frac{1}{\alpha}\right)\omega\tau + 1}$$

Če potrebujemo filter, ki prepušča pas frekvenc, zaporedno vežemo po en nizko in visoko- prepustni filter ter izberemo primerni prelomni frekvenci in parametra α za oba. Enako lahko naredimo tudi pasovno zaporni filter, le da moramo tokrat nizko- in visoko-prepustni filter vezati vzporedno, njuna izhodna signala pa sešteti.

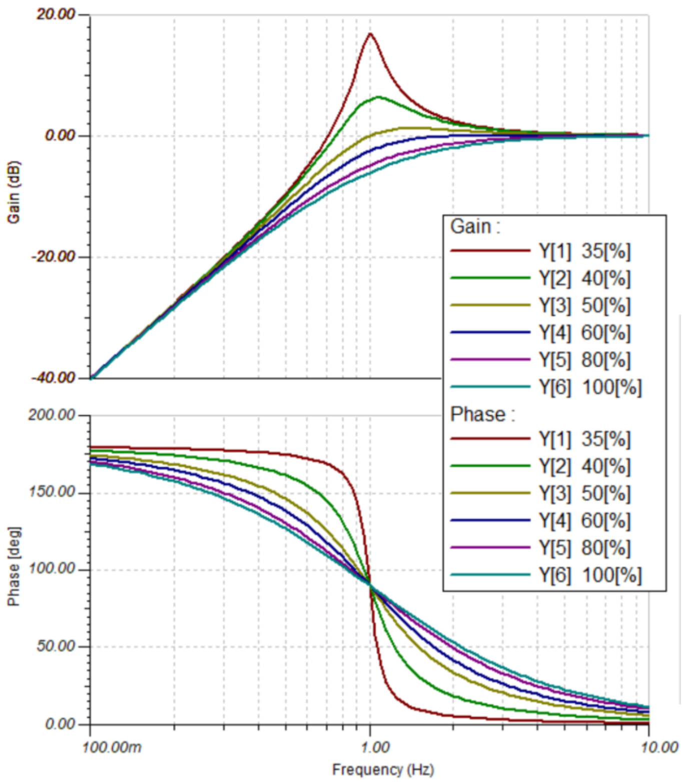
Tudi pasivna vezja, ki so sestavljena iz samih kondenzatorjev, tuljav in upornikov, imajo lahko podobne frekvenčne karakteristike. A v elektroniki se rabi tuljav izogibamo, saj pripisujemo tuljavi poleg induktivnosti vselej tudi upornost žice, ta pa vpliva na lastnosti vezij.



Slika 4: Takole naredimo visoko-prepustni filter drugega reda



Slika 3: Amplitudne karakteristike za filter s slike 2 in različne nastavitve α od 35% do 100%



Slika 5: Amplitudne karakteristike za filter s slike 4 in različne nastavitve α od 35% do 100%