3.12 Vezje s prenosno funkcijo drugega reda – časovni odziv

Teorija uči, da se izhodni signal vezja, ki ga popisuje diferencialna enačba prvega reda oziroma prenosna funkcija prvega reda eksponentno približuje končni vrednosti potem, ko se vzbujanje takega vezja umiri. Za zgled vezja s prenosno funkcijo prvega reda lahko služi RC člen.

Za vezja, ki jih popisuje prenosna funkcija drugega reda, na primer:

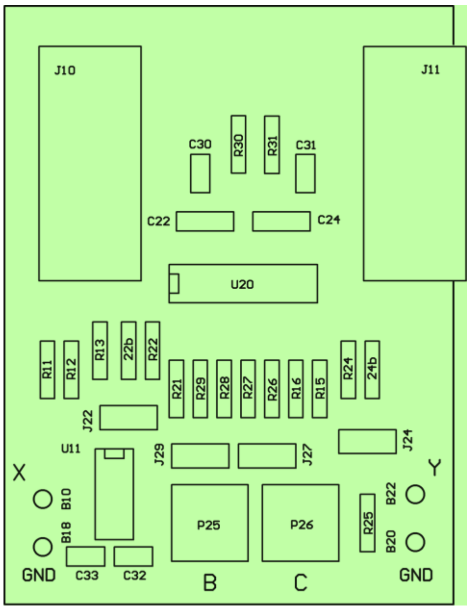
$$T(p) = \frac{Dp^2 + Ep + F}{Ap^2 + Bp + C} = \frac{y}{x} \qquad \text{, pri tem je } p \text{ operator odvajanja}$$

Se izhodni signal po umiritvi vzbujanja *x* približuje končni vrednosti $y_{stacionarna}$ na enega od treh možnih načinov, ki jih definirajo vrednosti faktorjev A, B in C v imenovalcu prenosne funkcije. Reševanje ustrezne diferencialne enačbe vodi do računanja diskriminante imenovalca. Kadar je ta nič se izhodna vrednost *y* najhitreje umiri pri končni vrednosti; običajno stremimo za takimi rešitvami. Kadar je diskriminanta pozitivna, je približevanje počasnejše, za negativne vrednosti diskriminante pa izhodni signal dušeno niha okoli končne vrednosti; dušenje je odvisno od velikosti faktorja B v imenovalcu prenosne funkcije.

Na razpolago je vezje, ki ga popisuje zgornji podobna prenosna funkcija z osiromašenim števcem:

$$T(p) = \frac{1}{\tau^2 p^2 + B\tau p + C} = \frac{y}{x} \qquad \text{, pri tem je } \tau = RC$$

Pri tem vezju lahko parametra B in C spreminjamo z vrtenjem nastavljivih potenciometrov P25 in P26; za skrajno levo lego drsnika potenciometra je ustrezni parameter enak nič, za skrajno desno lego pa 1. Z dvema jahačema (J29 za parameter B in J27 za parameter C) lahko območje nastavljanja povečamo na od 0 do 5. Na sliki 1 je tloris tiskanega vezja za to enoto.



Slika 1: Tloris tiskanega vezja za poskušanje

a. Naloga: preverimo delovanje vezja
b. Priključi na vhodno sponko *X* signal pravokotne oblike s frekvenco nekaj Hz in amplitudo okoli 1 V. Zavrti potenciometer za parameter B v položaj 5 (skrajno desni položaj, jahač J29 je v desnem položaju) in potenciometer za parameter C v položaj 1 (skrajno desni položaj, jahač J27 je v levem položaju).
c. Opazuj izhodni signal na sponki *Y*. Oceni hitrost približevanja stacionarni vrednosti.
d. Postopoma vrti potenciometer za parameter B proti vrednosti 0 in vsakokrat opazuj obliko izhodne napetosti *Y*. Za katero nastavitev je približevanje stacionarni vrednosti najhitrejše? Natančen položaj drsnika potenciometra P25 lahko oceniš tako, da vezje odklopiš ob napajanja in z merilnikom upornosti, ohm-metrom, pomeriš upornost od drsnika do obeh skrajnih priključkov istega potenciometra in iz izmerkov izračunaš lego drsnika. Grobo se da lego drsnika oceniti tudi iz nagiba zarezice na potenciometru.
e. Kaj se zgodi, ko potenciometer za parameter B zavrtiš v lego 0? Pride do nihanja? Oceni frekvenco nihanja in jo primerjaj s teoretično izračunano vrednostjo.

f. Kako položaj drsnika potenciometra C vpliva na frekvenco nihanja v točki d)? Kako položaj drsnika potenciometra C vpliva na stacionarno vrednost izhodnega signala Y? Se to sklada s teorijo?

Teorija

Prenosno funkcijo T(p) zapišemo kot diferencialno enačbo in rešujemo homogeno verzijo te enačbe. Tako dobimo obliko približevanja odziva stacionarni vrednosti, natančno pa lahko izračunamo odziv le ob upoštevanju oblike in velikosti vzbujalnega signala.

$$T(p) = \frac{1}{\tau^2 p^2 + B\tau p + C} = \frac{y}{x} \qquad \text{predelamo v:} \qquad \tau^2 \ddot{y} + B\tau\dot{y} + Cy = 0$$

Desno enačbo rešujemo z nastavkom $y = \alpha e^{\beta t}$, od koder: $\dot{y} = \alpha\beta e^{\beta t}$ in $\ddot{y} = \alpha\beta^2 e^{\beta t}$. Ko to umestimo v diferencialno enačbo, dobimo:

$$\alpha e^{\beta t}(\tau^2\beta^2 + B\tau\beta + C) = 0$$

Od tod izračunamo vrednost $\beta_{1,2}$:

$$\beta_{1,2} = \frac{-B\tau \pm \sqrt{B^2\tau^2 - 4\tau^2 C}}{2\tau^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2\tau}$$

1. Izraz pod korenom je lahko pozitiven, takrat imamo opravka s počasnim približevanjem stacionarni vrednosti.
2. Izraz pod korenom je lahko enak nič, takrat imamo opravka z najhitrejšim približevanjem, pri katerem ne pride do iznihavanja okoli stacionarne vrednosti.
3. Izraz pod korenom je lahko negativen, takrat imamo opravka s hitrim približevanjem stacionarni vrednosti, a tudi z nihanjem okoli nje.

Zgornje tri točke torej določajo obnašanje vezja takrat, ko fiksiramo parameter *C* na vrednost 1: za *B* = 2 je približevanje optimalno hitro in brez opletanja okoli končne vrednosti, za *B* > 2 je približevanje počasno, za *B* < 2 je približevanje zelo hitro, a izhodni signal niha okoli stacionarne vrednosti. Za *B* = 0 ni dušenja in vezje niha, frekvenca nihanja znaša: $\omega = {}^{1}/_{\tau}$.

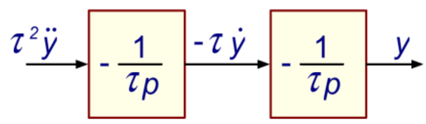
Dodatno za motivacijo

Vezje sestavljata med drugim dva zaporedno vezana integratorja. Izhodni signal drugega integratorja je dostopen na sponki Y. Vhodni signal drugega integratorja je torej odvod izhodnega signala Y, opazuješ ga lahko na nožici 14 integriranega vezja U20. Ta nožica je hkrati tudi izhodni priključek prvega integratorja, vhodni signal prvega integratorja pa je spet odvod njegovega izhodnega signala, torej drugi odvod izhodnega signala vezja Y. Vhodni signal v prvi integrator lahko opazuješ na nožici 1 integriranega vezja U20. Ako na zaslonu osciloskopa opazuješ te signale paroma lahko potrdiš, eden drugemu odvod.

Z enakim vezjem je mogoče narediti analogni računalnik, ki rešuje poljubno linearno ali nelinearno diferencialno enačbo. Parametre, ki nastopajo v taki enačbi, je mogoče spreminjati z vrtenjem potenciometrov in izbiro časovnih konstant. Na ta način je mogoče hitro ovrednotiti obnašanje diferencialne enačbe za različne parametre in vhodne signale. Glede na stanje in razširjenost računalnikov danes raje take enačbe rešujemo z numeričnimi metodami, svojo metodo pa naj raje izbere vsak sam. Analogni računalnik je vsekakor težje implementirati, a je preverjanje rešitev in pridobivanje občutka za vpliv posameznega parametra morda bolj učinkovito od vnašanja vedno novih parametrov v računalnik.

Za radovedne

Vezje, ki je predstavljeno v tej vaji, temelji na zaporedni vezavi večjega števila integratorjev in pravilnim interpretiranju vmesnih signalov. Vzemimo, da je izhodni signal integratorja označen z y. Potem je njegov vhodni signal odvod izhodnega signala pomnožen s časovno konstanto integratorja, slika 2.



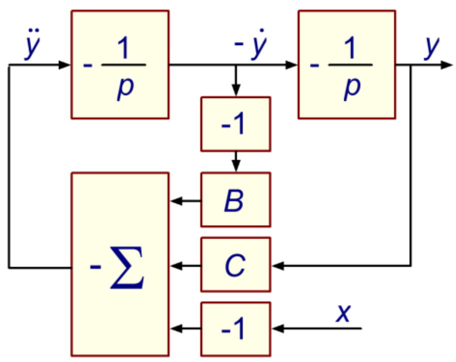
Slika 2: Re-interpretacija signalov pri zaporedno vezanih integratorjih

Linearno diferencialno enačbo, na primer drugega reda, zapišemo:

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = x$$

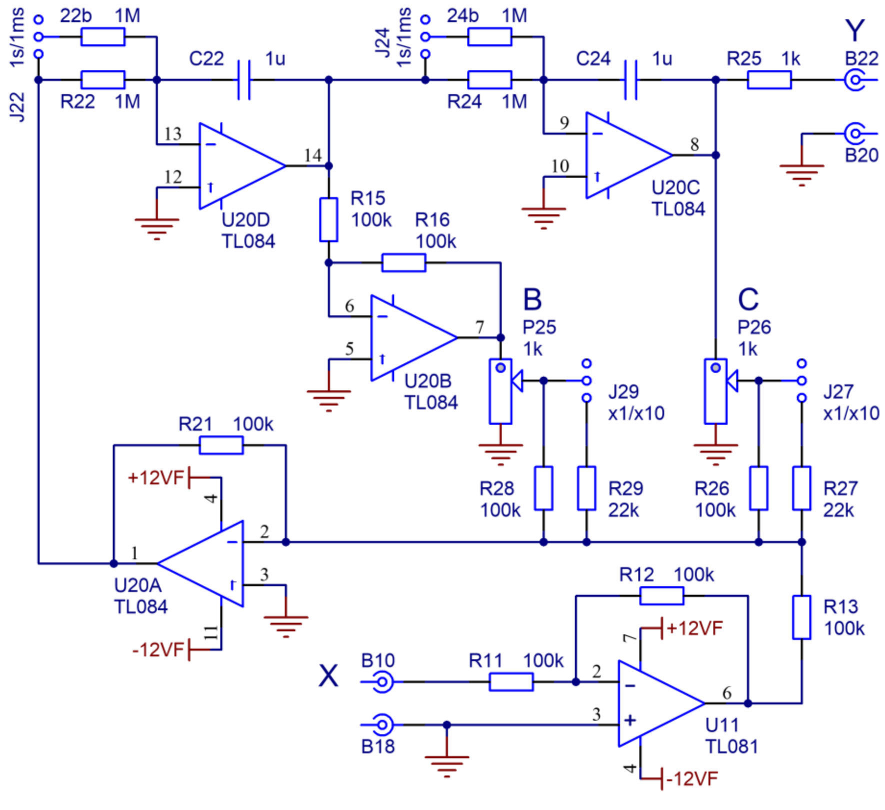
Izrazimo iz te enačbe drugi odvod vrednosti y in vse skupaj normirajmo s parametrom $A = 1$:

$$\ddot{y} = x - B\dot{y} - Cy$$



Slika 3: Blokovna shema vezja za računanje diferencialne enačbe drugega reda

Če zgornjo enačbo prenesemo v elektronsko vezje: zaporedno vežemo dva integratorja s časovnima konstantama $\tau = 1$, na vhodni priključek prvega integratorja pa dovedemo signal, ki ga izračunamo kot desno stran zgornje enačbe. Tako sestavljeno vezje rešuje dano diferencialno enačbo. Očitno poleg dveh integratorjev potrebujemo še seštevalnik (no, odštevalnik…) za računanje desne strani zgornje enačbe in morda en ojačevalnik z ojačenjem -1, saj integratorji v elektroniki pri integriranju obrnejo predznak rezultata. Kompletna blokovna shema vezja, ki računa po zgornji enačbi, je na sliki 3. V to blokovno shemo umestimo bloke elektronskih vezij, ki jih že poznamo: integratorja, seštevalnik in obračalnik predznaka in dobimo elektronsko shemo na sliki 4.



Slika 4: Elektronska shema vezja po blokovni shemi na sliki 3